

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Kurikulum pendidikan tinggi di Indonesia untuk bidang studi matematika memuat matakuliah-matakuliah dasar dan inti yang merupakan perwujudan dari ilmu pengetahuan matematika itu sendiri secara konkrit, utuh dan menyeluruh. Secara garis besar matakuliah-matakuliah tersebut terbagi atas kelompok: (1) matakuliah analisis seperti Kalkulus, Teori Bilangan, Analisis Real maupun Analisis Kompleks. (2) matakuliah aljabar seperti Aljabar Linear, Aljabar Abstrak atau Struktur Aljabar (3) matakuliah geometri seperti Geometri Euclid, Geometri Analitik Bidang dan Ruang maupun Geometri Transformasi dan (4) mata kuliah terapan seperti Model Linear, Matematika Diskrit maupun Pemodelan.

Semua matakuliah di atas mempunyai tujuan untuk memberi mahasiswa pengetahuan tentang ilmu matematika yang mencakup fakta-fakta, konsep, prinsip, pola-pola dan prosedur serta keterampilan untuk bernalar/berpikir logis yang dapat digunakan dalam matematika itu sendiri, mata pelajaran lain, dalam kehidupan sehari-hari ataupun untuk keperluan studi lanjut.

Hal ini sesuai dengan tujuan kurikuler pengajaran matematika, agar mahasiswa dapat : (1) memiliki pengetahuan dan keterampilan matematika untuk menyelesaikan permasalahan matematika itu sendiri, pemakaian praktis dalam mata pelajaran lain dan dalam kehidupan sehari-hari serta untuk studi lanjut, (2) memahami hubungan bagian-bagian matematika, (3) memiliki kemampuan membuat analisa, sintesa dan kesimpulan, (4) memiliki sikap dan kebiasaan berfikir logis, kritis, sistematis, cermat, tekun dan bertanggung jawab, (5) menghargai dan

meresapi keindahan konsep-konsep, struktur-struktur dan pola-pola matematika (Russefendi, 2006).

Keterampilan berpikir yang dilatihkan dalam mempelajari matematika mencakup keterampilan berpikir tingkat rendah (*lower order thinking skills*) dan keterampilan berpikir tingkat tinggi (*higher order thinking skills*). Adapun keterampilan berpikir tingkat rendah seperti mengingat definisi/pengertian, memahami konsep-konsep matematika ataupun menerapkan konsep untuk menyelesaikan soal-soal matematika, sedangkan keterampilan berpikir tingkat tinggi meliputi kemampuan berpikir kritis dan kemampuan berpikir kreatif. Kemampuan berpikir kritis seperti menganalisis, membuat sintesa dan mengevaluasi, sementara kemampuan berpikir kreatif seperti memecahkan masalah, membuktikan dan menciptakan. Menurut Stein dan Lane dalam (Thompson, 2008) bahwa kemampuan berpikir tingkat tinggi menggunakan pemikiran yang kompleks, non algoritmik untuk menyelesaikan suatu masalah yang tidak dapat diprediksi, menggunakan pendekatan yang berbeda dengan tugas yang telah ada atau contoh latihan, sementara Voogt dan Roblin dalam (Widana, 2017) mengemukakan bahwa pengukuran keterampilan berpikir tingkat tinggi dapat meningkatkan keterampilan berpikir kritis, kreatif dan kemandirian. Taksonomi Bloom yang direvisi mengelompokkan dimensi kognitif menjadi dua dimensi, dimensi pertama adalah tipe pengetahuan, dibagi menjadi empat tipe pengetahuan yaitu: (1) pengetahuan faktual (*factual knowledge*), (2) pengetahuan konsep (*conceptual knowledge*), (3) pengetahuan prosedural (*procedural knowledge*), dan (4) pengetahuan metakognitif (*metacognitive knowledge*). Sementara dimensi kedua adalah dimensi proses kognitif yang terdiri atas keterampilan berpikir tingkat rendah, yang mencakup mengingat (*remember*), memahami (*understand*), menerapkan (*apply*),

keterampilan berpikir tingkat tinggi yang mencakup menganalisis (*analysis*), mengevaluasi (*evaluate*), dan mencipta (*create*) (Krathwohl, 2002).

Umumnya keterampilan berpikir tingkat rendah dapat dengan mudah dikuasai oleh mahasiswa, sementara keterampilan berpikir tingkat tinggi tidak demikian. Diantara keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam matematika adalah keterampilan untuk membuktikan kebenaran pernyataan-pernyataan/sifat-sifat matematika seperti membuktikan sifat-sifat pada konsep bilangan, konsep himpunan, konsep fungsi, konsep matriks, konsep vector dan sebagainya.

Berdasarkan pengalaman selama kuliah S1 dan S2 serta sebagai dosen pengajar mata kuliah matematika, kebanyakan mahasiswa enggan jika bekerja dengan masalah pembuktian, yaitu membuktikan pernyataan/sifat matematika yang sudah ada ataupun yang baru akan ditemukan, mereka lebih menyenangi keterampilan menghitung dan menerapkan konsep-konsep untuk mencari penyelesaian masalah/soal. Penyebab kesulitan tersebut di antaranya adalah (1) kurangnya pemahaman mahasiswa terhadap konsep yang akan dibuktikan, mereka masih mengalami kesulitan dalam mengidentifikasi apa yang diketahui dan apa yang akan dibuktikan, (2) kurangnya penguasaan konsep prasyarat tentang konsep logika matematika dan teknik-teknik pembuktian, (3) kurangnya kemampuan dalam menggunakan/memanipulasi fakta-fakta yang diketahui dan mengkaitkannya dengan yang akan ditunjukkan serta, (4) kurangnya kemampuan dalam menyusun alur/sistematika bukti tersebut. Menurut Lee (2004) pembuktian matematika pada tingkat perguruan tinggi bentuknya lebih akurat dan lebih formal dibandingkan pembuktian di sekolah dasar dan sekolah menengah.

Moore (1994) telah melakukan identifikasi terhadap kelemahan dan kesulitan mahasiswa dalam pembuktian matematika, yang dikelompokkan ke dalam

tujuh jenis kesulitan, sebagai berikut: (1) Mahasiswa tidak dapat mengemukakan definisi dengan bahasanya sendiri, (2) Intuisi pemahaman terhadap suatu konsep yang dimiliki mahasiswa sedikit, (3) Gambaran konsep (*concept images*) untuk mengerjakan pembuktian tidak cukup, (4) Mahasiswa tidak dapat dan tidak berkeinginan membuat contoh sendiri, (5) Mahasiswa tidak mengetahui bagaimana menggunakan definisi untuk memperoleh struktur pembuktian yang menyeluruh, (6) Mahasiswa tidak dapat memahami dan menggunakan bahasa dan notasi matematik, (7) Mahasiswa tidak mengetahui bagaimana memulai pembuktian. Padahal bukti/pembuktian merupakan jantung dari matematika dan berpikir matematika (Swan & Ridgway, 2015). Ada beberapa alasan mengapa perlu diberikan pengajaran pembuktian, yaitu: (1) pembuktian adalah bagian yang integral dalam matematika, (2) untuk verifikasi dan penemuan fakta, (3) untuk pengembangan kemampuan berpikir logis dan kritis, (4) untuk mempercepat dan meningkatkan pemahaman matematik siswa (Dickerson, 2008).

Pada tahap awal, pekerjaan memahami bukti bukanlah sesuatu yang menarik karena lebih banyak bergelut dengan simbol variabel dan pernyataan logika ketimbang berhadapan dengan angka-angka yang biasanya dianggap sebagai karakter matematika. Kenyataan inilah yang menjadi salah satu alasan mahasiswa malas untuk memahami bukti dalam matematika. Alasan lainnya adalah pekerjaan membuktikan lebih sulit dan tidak penting. Padahal banyak manfaat yang dapat diperoleh dari pengalaman membuktikan, salah satunya adalah melatih *logically thinking* dalam belajar matematika.

Bukti/pembuktian merupakan karakteristik utama dari kegiatan bermatematika, dan menjadi komponen kunci dalam pembelajaran matematika. Di Amerika Serikat, *National Council of Teacher of Mathematics* (NCTM) telah

menetapkan agar bukti/pembuktian dimasukkan dalam kurikulum matematika. Dokumen kurikulum tersebut *Principles and Standards for School Mathematics*, dinyatakan bahwa pembelajaran matematika pada sekolah-sekolah di Amerika Serikat harus membekali siswa dengan pemahaman yang berhubungan dengan penalaran dan pembuktian. Misalnya, (1) siswa menyadari bahwa penalaran dan pembuktian adalah hal yang mendasar dalam matematika, (2) siswa dapat membuat dan menyelidiki suatu konjektur, (3) siswa dapat mengembangkan dan menilai benar atau salah suatu argumen dan bukti matematika, dan (4) siswa dapat memilih dan menggunakan bermacam-macam metode pembuktian dan cara bernalar (NCTM, 2000).

Di Indonesia, siswa juga dikehendaki agar mempunyai kemampuan dalam membuat bukti/pembuktian, misalnya dalam Kurikulum Berbasis Kompetensi secara eksplisit dinyatakan agar siswa mempunyai kompetensi matematika dalam bentuk keterampilan menyusun bukti, yaitu siswa SD dan SMP menyusun bukti secara induktif, sedangkan siswa SMA menyusun bukti secara induktif dan deduktif (Depdiknas, 2002). Demikian pula menurut BSNP (2006), bahwa dalam pembelajaran matematika bertujuan diantaranya agar peserta didik memiliki kemampuan menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika.

Penelitian yang berkenaan dengan pembuktian matematika di perguruan tinggi, khususnya pembuktian dalam teori grup (Aljabar Abstrak), misalnya telah dilakukan Moore (1994), Asikin (2002) dan Arnawa (2006). Mereka menyimpulkan bahwa sebagian besar mahasiswa masih kesulitan dalam membuat pembuktian.

Upaya untuk mengatasi kesulitan mahasiswa dalam pembuktian matematika perlu diupayakan penerapan strategi-strategi pembelajaran yang dapat menjembatani peningkatan tahap berpikir mahasiswa agar kemampuan membuktikan mahasiswa, dapat berkembang secara optimal. Beberapa pendekatan/strategi pembelajaran yang mengembangkan kemampuan pembuktian matematika untuk tingkat mahasiswa ini telah diteliti oleh peneliti sebelumnya diantaranya: Uhlig (2003) yang mengembangkan suatu pendekatan untuk memahami dan mengkonstruksi suatu pembuktian pada mata kuliah aljabar linear elementer dengan pendekatan WWHWT (*What, Why, How, What and Theorems*), Arnawa (2006) yang menggunakan strategi pembelajaran berdasarkan teori APOS (*Action, Process, Object and Schema*) pada mata kuliah Aljabar Abstrak, Kusnandi tahun 2008 yang menggunakan pembelajaran dengan strategi Abduktif-Deduktif (PSAD) pada mata kuliah Teori Bilangan dan Yerison (2011) yang menggunakan strategi pembelajaran berdasarkan teori M-APOS (APOS yang dimodifikasi) pada mata kuliah Analisis Real.

Menurut Reid dalam (Sabri, 2004), bukti/pembuktian membuat matematika unik dan berbeda dari disiplin ilmu lainnya. Melalui tugas pembuktian, dosen dapat melihat: (1) bagaimana kemampuan mahasiswa dalam berargumentasi secara logis, (2) bagaimana mahasiswa menggunakan contoh dan lawan contoh untuk mendukung argumentasinya, (3) kelemahan-kelemahan apa saja yang dialami mahasiswa dalam bernalar, dan (4) miskonsepsi apa yang sering dialami mahasiswa. Sementara Epp (2003) mengemukakan bahwa salah satu pendekatan yang paling baik untuk mengembangkan kemampuan berpikir abstrak siswa/mahasiswa adalah melalui keterlibatan yang bermakna dalam mengkonstruksi dan menyelesaikan pembuktian-pembuktian matematika.

Dickerson (2008) mengemukakan, ada beberapa alasan kenapa perlu diberikan pengajaran pembuktian yaitu: (1) bukti adalah bagian yang integral dalam matematika, (2) untuk verifikasi dan penemuan fakta, (3) untuk pengembangan kemampuan berpikir logis dan kritis siswa, dan (4) mempercepat dan meningkatkan pemahaman matematis siswa.

Matakuliah Analisis Real merupakan salah satu matakuliah dalam kurikulum program studi matematika dan pendidikan matematika di Perguruan Tinggi. Isi mata kuliah Analisis Real adalah: (1) Tinjauan ulang tentang himpunan, fungsi/pemetaan, dan induksi matematika, (2) Sistem bilangan Real dengan sifat aljabar, sifat urutan dan sifat kelengkapannya, (3) Barisan dan limitnya, barisan monoton, subbarisan, serta kriteria barisan konvergen dan divergen, (4) Limit fungsi dan sifat-sifatnya, (5) Fungsi kontinu dan sifat-sifatnya, (5) Turunan fungsi dan sifat-sifatnya, (6) Integral Rieman dan sifat-sifatnya, serta (7) Barisan fungsi dan deret takhingga.

Menurut Gunawan (2016) melalui perkuliahan Analisis Real, mahasiswa diharapkan (1) memiliki wawasan yang memadai tentang konsep-konsep dasar Analisis Real, khususnya tentang bilangan Real, barisan, limit, kekontinuan, turunan dan integral, (2) mempunyai kemampuan bernalar dan analisis matematika yang baik dan dapat menerapkannya dalam pemecahan masalah matematika. Mata kuliah Analisis Real memberikan dasar untuk melakukan proses analisis dan pengkajian yang lebih mendalam dan terstruktur tentang konsep-konsepnya. Pendekatan yang digunakan dalam mempelajari Analisis Real lebih di dominasi pada kegiatan menalar, mengkaji, menganalisis, dan membuktikan yang merupakan kemampuan kognitif tingkat tinggi.

Sementara pada tahun-tahun pertama mahasiswa program studi Matematika dan Pendidikan Matematika terbiasa, terlatih dan trampil dengan kegiatan belajar yang merupakan kegiatan menghitung, mencari, mendrill atau membuktikan konsep-konsep matematika yang sederhana, sehingga pada saat mereka menerima matakuliah Analisis Real ataupun Aljabar Abstrak yang mempunyai pendekatan berbeda dengan yang sudah mereka alami sebelumnya, mereka pun banyak yang mendapatkan kesulitan.

Kesulitan umumnya dialami mahasiswa pada masalah pembuktian baik dalam hal memahami bukti dari teorema, lemma, *corollary*, ataupun dalam hal menyelesaikan soal-soal pembuktian. Kesulitan ini misalnya disebabkan oleh: (1) konsep-konsep dalam Analisis Real yang abstrak, (2) tidak memahami bukti dan proses pembuktian, (3) tidak tahu bagaimana memulai proses pembuktian, (4) tidak dapat mengidentifikasi premis-premis dan *conclusion* dari permasalahan pembuktian matematika, (5) tidak memahami metode-metode pembuktian yang akan digunakan, (6) tidak terlatih menulis dengan logis dan sistematis, serta (7) tidak dapat menikmati proses pembuktian sebagai pembentukan proses berpikir dan bernalar. Kesulitan yang dihadapi mahasiswa dalam bekerja dengan pembuktian pada perkuliahan Analisis Real ini berujung pada rendahnya hasil belajar mahasiswa pada mata kuliah tersebut.

Analisis Real sebagai bagian dari matematika yang sarat dengan definisi, lema, teorema dan konsep-konsep yang menunjukkan proses membuktikan/pembuktian matematika dan menghendaki kemampuan mahasiswa untuk dapat memahami dan dapat bekerja dalam menunjukkan proses membuktikan/pembuktian tersebut. Oleh karena itu *Mathematical Proving Ability* (kemampuan

pembuktian matematika) dalam mempelajari Analisis Real mutlak untuk dimiliki mahasiswa agar dapat menguasai mata kuliah tersebut.

Penelitian ini untuk mengatasi kesulitan mahasiswa dalam memahami pembuktian matematika pada mata kuliah Analisis Real maka akan digunakan pendekatan pembelajaran melalui penerapan strategi Abduktif-Deduktif. Pendekatan pembelajaran melalui penerapan strategi Abduktif-Deduktif telah diteliti oleh Kusnandi yang berhasil dalam menumbuhkembangkan kemampuan membuktikan pada mahasiswa dalam perkuliahan Teori Bilangan.

Pendekatan ini merupakan suatu pendekatan pembelajaran yang dimulai dengan menyajikan masalah kepada mahasiswa, kemudian mereka dituntut untuk dapat mengelaborasi setiap informasi atau fakta yang diberikan secara deduktif, serta merumuskan suatu kondisi secara abduktif agar target akhir yang diharapkan dapat tercapai. Masalah yang diberikan harus dapat mengantarkan mahasiswa untuk memahami objek-objek matematika dan kaitan antara objek matematika yang satu dengan objek yang lainnya, sementara dosen mendorong mahasiswa untuk melakukan *transactive reasoning* seperti mengkritik, menjelaskan, mengklarifikasi, menjustifikasi dan mengelaborasi suatu gagasan yang diajukan, baik yang diinisiasi oleh mahasiswa maupun dosen (Kusnandi, 2008).

Agar mahasiswa dapat terlibat dalam kegiatan *transactive reasoning* tersebut, maka penguasaan konsep prasyarat seperti konsep logika matematika dan teknik-teknik pembuktian matematika mutlak diperlukan dan memegang peranan yang sangat penting. Hal ini senada pendapat Arnawa yang mengemukakan bahwa agar dapat membuat pembuktian matematika dengan baik, mahasiswa dituntut memiliki pengetahuan-pengetahuan prasyarat, misalnya logika matematika dan metode pembuktian dalam matematika (Arnawa, 2006).

Logika matematika memberikan dasar tentang logika dalam berargumentasi atau menarik kesimpulan atas pernyataan-pernyataan matematika, sementara metode pembuktian matematika memberikan cara-cara yang dapat digunakan/ditempuh dalam membuktikan kebenaran suatu pernyataan matematika, seperti bukti langsung, bukti tidak langsung, induksi matematika dan sebagainya. Metode pembuktian matematika yang mencakup pengertian, struktur, dan prosedur perlu untuk dipahami mahasiswa sebagai dasar untuk dapat menentukan cara pembuktian yang digunakan serta dengan logika yang benar dapat menyusun langkah-langkah yang tepat dalam proses pembuktian matematika yang dihadapi. Dengan demikian pemahaman konsep prasyarat seperti konsep logika matematika dan metode pembuktian matematika harus dimiliki oleh mahasiswa agar mereka dapat menyelesaikan masalah pembuktian matematika.

Di samping penerapan strategi pembelajaran yang tepat, perlu juga diupayakan penerapan strategi yang dapat mengukur kemampuan pembuktian matematika mahasiswa, yaitu melalui teknik penilaian/asesmen yang digunakan. Melalui penggunaan teknik asesmen yang tepat, akan dapat mengukur kemampuan pembuktian matematika mahasiswa serta memotivasi mahasiswa dalam menunjukkan kemampuannya tersebut karena dihargai, diperlakukan secara adil dan transparan.

Penilaian/asesmen merupakan bagian yang terintegrasi dari program pembelajaran, yang mempunyai peranan penting dalam mengungkapkan efektifitas proses pembelajaran dan pencapaian hasil belajar. Penilaian adalah proses pengumpulan berbagai data yang bisa memberikan gambaran perkembangan belajar peserta didik dimana gambaran tersebut perlu diketahui oleh guru/pengajar agar bisa memastikan bahwa peserta didik mengalami proses pembelajaran dengan

benar. Data yang diperoleh melalui penilaian, pengajar dapat mengambil tindakan yang tepat dalam proses pembelajaran sehingga tujuan pembelajaran dapat tercapai. Oleh karena gambaran tentang kemajuan belajar itu diperlukan di sepanjang proses pembelajaran, maka asesmen tidak dilakukan semata di akhir pembelajaran, tetapi dilakukan pula sepanjang proses pembelajaran, itu menunjukkan bahwa penilaian merupakan bagian dari kegiatan pembelajaran. Hal ini selaras dengan pendapat Popham (1995) yang mengemukakan bahwa asesmen sudah seharusnya merupakan bagian dari pengajaran dan bukan merupakan hal yang terpisahkan.

Penilaian/assesmen mempermasalahkan bagaimana guru/pengajar dapat mengetahui proses dan hasil pembelajaran yang telah dilakukan. Melalui penilaian pengajar mengetahui sejauh mana peserta didik telah mengerti bahan yang telah diajarkan atau sejauh mana tujuan/kompetensi dari kegiatan pembelajaran yang dikelola telah tercapai. Penilaian perlu dilakukan agar dapat : mendiagnosa kelebihan dan kekurangan peserta didik, memantau kemajuan belajar, memberi atribut nilai, dan menentukan efektifitas pembelajaran (Popham, 1995).

Karakteristik belajar di perguruan tinggi menuntut mahasiswa untuk aktif mencari, mandiri, mengembangkan kemampuan berpikir tingkat tinggi seperti : menalar, mengkonstruksi, menganalisa, mensintesa ataupun mengevaluasi yang menuntut dosen selain dapat menerapkan strategi pembelajaran yang tepat juga dapat menerapkan teknik penilaian yang tepat. Menurut Andrew dan Willingham dalam (Widana, et al., 2018) bahwa untuk mencapai kompetensi esensial di abad 21, tiga komponen utama harus dilaksanakan secara komprehensif yaitu: 1) kurikulum yang lebih adaptif, 2) melibatkan lebih banyak model pembelajaran dan 3) penilaian yang lebih bermakna untuk mengembangkan *higher order thinking skills*.

Dalam hal penilaian, sesuai karakteristik belajar mahasiswa seperti yang disebutkan di atas, maka dosen dapat mengembangkan penilaian yang berbasis kepada penilaian otentik. Karena penilaian otentik tidak hanya terpaku pada penilaian hasil akhir, tetapi juga penilaian selama proses pembelajaran, tidak juga terpaku hanya pada aspek kognitif melainkan juga pada aspek sikap dan ketrampilan secara terintegrasi. Sehingga melalui penilaian otentik mahasiswa digiring untuk belajar sesuai karakteristik belajar di perguruan tinggi. Hal ini sesuai dengan hasil penelitian Balik (2012), yang mengemukakan bahwa implementasi asesmen autentik dalam pembelajaran matematika berpengaruh terhadap prestasi belajar matematika dan motivasi peserta didik.

Di antara beberapa teknik penilaian otentik terdapat penilaian kinerja dan penilaian portofolio. Pada penilaian kinerja, penilaian diperoleh pada kemampuan unjuk kinerja yaitu kemampuan melakukan aktivitas tertentu sesuai dengan tujuan pembelajaran dan penilaian atas kualitas hasil karya/produk yang dihasilkan melalui unjuk kinerja tersebut. Sementara penilaian portofolio adalah suatu teknik penilaian yang bertujuan untuk mengukur kemampuan individu/kelompok melalui pengumpulan, penyusunan, pendokumentasian dan perrefleksian suatu pekerjaan, tugas atau karya sehingga tujuan yang ditetapkan dapat tercapai. Kedua teknik penilaian otentik ini sering dipergunakan dalam pembelajaran, terutama jika pengajar tidak hanya ingin mengukur hasil belajar tetapi juga ingin mengetahui dan mengukur pencapaian proses belajar.

Untuk mengukur *Mathematical Proving Ability* dalam perkuliahan Analisis Real, mahasiswa diminta untuk mendemonstrasikan kemampuan membuktikannya melalui penentuan dan penyusunan langkah-langkah prosedural pembuktian matematis, dimana mahasiswa menunjukkan proses langkah demi langkah

pembuktian matematis dengan mengemukakan alasan/argumentasinya pada setiap langkah yang dipilihnya. Pengajar pun dapat mengamati setiap langkah yang ditempuh mahasiswa dan menggunakan rubrik dalam melakukan penilaian pada setiap kompetensi yang telah dicapai. maka teknik penilaian kinerja akan sangat tepat untuk digunakan dalam perkuliahan ini.

Mahasiswa dalam menunjukkan *Mathematical Proving Ability* juga diminta untuk dapat menyusun proses bukti dengan menggunakan kata-kata/bahasanya sendiri, menyusunnya dalam alur yang logis, sistematis dengan menuliskan fakta-fakta yang dimiliki dan merangkaikan keterkaitannya dengan kesimpulan yang akan dicapai. Melalui produk bukti-bukti matematika yang diperoleh akan menjadi suatu portofolio bagi mahasiswa yang dapat digunakan oleh mahasiswa untuk menginspirasi dalam mengkonstruksi bukti sifat-sifat matematika pada konsep-konsep berikutnya. Dengan menggunakan rubrik portofolio, pengajar juga dapat mengetahui perkembangan kemampuan membuktikan mahasiswa. Oleh karena itulah teknik penilaian portofolio juga dapat menjadi alternatif penilaian yang dapat diterapkan dalam perkuliahan ini.

Penelitian ini akan mengkaji pengaruh penerapan strategi pembelajaran dan teknik asesmen terhadap *Mathematical Proving Ability* mahasiswa pada perkuliahan Analisis Real dengan mengontrol pemahaman *Prerequisite Concepts*. Adapun strategi pembelajaran yang akan diteliti adalah penerapan strategi Abduktif-Deduktif yang dibandingkan dengan pembelajaran konvensional, untuk teknik penilaian/asesmen yang akan digunakan disesuaikan dengan kemampuan yang akan diukur yaitu teknik penilaian kinerja dan portofolio. Sementara pemahaman *Prerequisite Concepts* adalah pemahaman terhadap konsep yang menjadi prasyarat untuk dapat melakukan proses pembuktian matematika yaitu

pemahaman konsep logika matematika dan metode pembuktian matematika. Oleh karena itu perlu dilakukan penelitian tentang “Pengaruh Strategi Pembelajaran dan Penilaian Otentik terhadap *Mathematical Proving Ability* Mahasiswa dengan Mengontrol Pemahaman *Prerequisite concepts*.”

B. Identifikasi Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah dipaparkan diatas, maka dapat diidentifikasi beberapa permasalahan sebagai berikut: (1) pemilihan strategi pembelajaran yang tepat dapat menumbuhkembangkan *Mathematical Proving Ability* mahasiswa, (2) pembelajaran melalui penerapan strategi Abduktif-Deduktif dapat menumbuhkembangkan *Mathematical Proving Ability* mahasiswa, (3) terdapat perbedaan tingkat *Mathematical Proving Ability* antara mahasiswa yang diberikan penerapan strategi Abduktif-Deduktif dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara konvensional, (4) *Mathematical Proving Ability* mahasiswa yang diberikan penerapan strategi Abduktif-Deduktif mempunyai kemungkinan lebih tinggi daripada mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara konvensional, (5) penerapan strategi pembelajaran melalui pemahaman konsep logika matematika dan metode-metode pembuktian matematika dapat membentuk dan meningkatkan *Mathematical Proving Ability* mahasiswa, (6) pemilihan teknik penilaian yang tepat dapat mendukung pencapaian kompetensi mahasiswa di dalam perkuliahan, (7) Melalui penilaian otentik yang tepat dapat mengukur *Mathematical Proving Ability* mahasiswa di dalam perkuliahan, (8) terdapat perbedaan tingkat *Mathematical Proving Ability* mahasiswa diantara teknik-teknik penilaian otentik yang digunakan di dalam perkuliahan, (9) penerapan strategi pembelajaran bersamaan dengan penggunaan penilaian otentik yang tepat

dapat meningkatkan *Mathematical Proving Ability* mahasiswa, (10) terdapat pengaruh interaksi strategi pembelajaran dan penilaian otentik terhadap *Mathematical Proving Ability* mahasiswa, (11) terdapat perbedaan tingkat *Mathematical Proving Ability* mahasiswa diantara penerapan strategi pembelajaran dan teknik penilaian otentik yang berbeda.

C. Pembatasan Masalah

Pada penelitian ini strategi pembelajaran yang akan diteliti pengaruhnya terhadap *Mathematical Proving Ability* mahasiswa dibatasi pada strategi Abduktif-Deduktif dan pembelajaran konvensional, karena strategi abduktif deduktif adalah pembelajaran yang sesuai digunakan untuk mempelajari masalah-masalah pembuktian matematika, dimana langkah-langkah dalam strategi pembelajaran ini merepresentasikan proses penalaran yang diperlukan dalam melakukan pembuktian matematika, sementara pembelajaran konvensional merupakan pembelajaran yang biasa dilaksanakan di dalam perkuliahan Analisis Real 1. Penilaian otentik yang akan diteliti pengaruhnya terhadap *Mathematical Proving Ability* mahasiswa dibatasi pada teknik penilaian kinerja dan teknik penilaian portofolio, karena kedua tipe penilaian otentik ini dapat merepresentasikan tugas-tugas kinerja dan produk tugas yang dihasilkan mahasiswa untuk mengetahui pemahamannya terhadap masalah-masalah pembuktian matematika dalam perkuliahan. Adapun permasalahan pembuktian matematika dibatasi pada permasalahan pembuktian matematika yang terdapat di dalam mata kuliah Analisis Real I karena mata kuliah ini sarat dengan konsep, teorema, dalil dan masalah-masalah yang terkait dengan bukti-bukti dan pembuktian matematikanya. Adapun pemahaman *Prerequisite concepts* dibatasi pada pemahaman terhadap konsep logika matematika dan metode

pembuktian matematika, karena keduanya menjadi prasyarat penting untuk dapat melakukan proses pembuktian matematika selain pemahaman terhadap konsep-konsep yang terdapat dalam pembuktian matematika tersebut.

D. Rumusan Masalah

Dari identifikasi dan pembatasan masalah, maka disusun rumusan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut :

- 1) Apakah ada perbedaan *Mathematical Proving Ability* mahasiswa diantara penerapan strategi Abduktif-Deduktif dan pembelajaran konvensional setelah mengontrol pemahaman *Prerequisite Concepts* mahasiswa?
- 2) Apakah ada perbedaan *Mathematical Proving Ability* mahasiswa diantara penerapan teknik penilaian kinerja dan teknik penilaian portofolio setelah mengontrol pemahaman *Prerequisite Concepts* mahasiswa?
- 3) Apakah ada pengaruh interaksi penerapan strategi pembelajaran dan penilaian otentik terhadap *Mathematical Proving Ability* mahasiswa setelah mengontrol pemahaman *Prerequisite Concepts* mahasiswa?,
- 4) Apakah dalam penerapan teknik penilaian kinerja, ada perbedaan *Mathematical Proving Ability* mahasiswa diantara penerapan strategi Abduktif-Deduktif dan pembelajaran konvensional setelah mengontrol pemahaman *Prerequisite Concepts* mahasiswa?
- 5) Apakah dalam penerapan teknik penilaian portofolio, ada perbedaan *Mathematical Proving Ability* mahasiswa diantara penerapan strategi Abduktif-Deduktif dan pembelajaran konvensional setelah mengontrol pemahaman *Prerequisite Concepts* mahasiswa?

- 6) Apakah dalam penerapan strategi Abduktif-Deduktif, ada perbedaan *Mathematical Proving Ability* mahasiswa diantara penerapan teknik penilaian kinerja dan teknik penilaian portofolio setelah mengontrol pemahaman *Prerequisite Concepts* mahasiswa?
- 7) Apakah dalam pembelajaran konvensional, ada perbedaan *Mathematical Proving Ability* mahasiswa diantara penerapan teknik penilaian kinerja dan teknik penilaian portofolio setelah mengontrol pemahaman *Prerequisite Concepts* mahasiswa?

E. Tujuan Penelitian

Penelitian ini secara umum bertujuan untuk memperoleh informasi empiris tentang pengaruh strategi pembelajaran dan penilaian otentik terhadap *mathematical proving ability* mahasiswa dengan mengontrol pemahaman *prerequisite concepts*. Secara operasional penelitian ini bertujuan untuk mengetahui tentang perbedaan diantara pengaruh utama strategi pembelajaran yaitu strategi abduktif-deduktif dan pembelajaran konvensional atau perbedaan diantara pengaruh utama penilaian otentik yaitu penilaian kinerja dan penilaian portofolio terhadap *mathematical proving ability* mahasiswa setelah mengontrol pemahaman *prerequisite concepts* mahasiswa. Untuk mengetahui pula pengaruh interaksi penerapan strategi pembelajaran dan penilaian otentik terhadap *mathematical proving ability* mahasiswa setelah mengontrol pemahaman *prerequisite concepts* mahasiswa, serta untuk mengetahui perbedaan diantara pengaruh sederhana antar kelompok pada penerapan strategi pembelajaran abduktif-deduktif dan pembelajaran konvensional bersama dengan penerapan penilaian kinerja dan

penilaian portofolio terhadap *mathematical proving ability* mahasiswa setelah mengontrol pemahaman *prerequisite concepts* mahasiswa.

E. Kebaruan Penelitian

Penelitian yang dilakukan ini untuk mengetahui tentang kemampuan pembuktian matematika atau *Mathematical Proving Ability* yang merupakan kemampuan matematika khusus terkait dengan kemampuan penalaran matematis dan kemampuan pemecahan masalah matematis. *Mathematical Proving Ability* merupakan kemampuan matematis yang belum banyak diketahui mahasiswa, tidak sepopuler kemampuan-kemampuan matematis lainnya seperti kemampuan pemahaman konsep matematis, kemampuan penalaran matematis, kemampuan problem solving, kemampuan representasi matematis, dan kemampuan koneksi matematis. *Mathematical Proving Ability* masih dalam kategori baru dan belum banyak penelitian yang mengkaji tentang kemampuan ini terutama di Indonesia.

Beberapa penelitian terkait yang mengkaji tentang kemampuan ini pada level perguruan tinggi telah dilakukan sebelumnya oleh Moore (1994) dan Asikin (2002), yang telah melakukan identifikasi terhadap kelemahan dan kesulitan mahasiswa pada pembuktian matematika dalam perkuliahan Aljabar Abstrak. Demikian pula penelitian dari Weber (2002), Selden & Selden (2003), Epp (2003), dan Douek (2004) yang menemukan bahwa sebagian besar mahasiswa masih kesulitan dalam menulis pembuktian matematika, salah satu penyebabnya berkenaan dengan pandangan mahasiswa itu sendiri terhadap bukti/pembuktian. Sementara Stavrou (2014) dari penelitiannya menemukan tentang kesalahan yang sering dilakukan mahasiswa dalam menyelesaikan pembuktian matematika pada Teori Bilangan atau Aljabar Abstrak, bahwa secara kolektif mahasiswa membuat

empat kesalahan berulang yaitu: mengasumsikan kesimpulan untuk membuktikan kesimpulan, membuktikan pernyataan umum dengan menggunakan contoh yang spesifik, tidak membuktikan kedua pernyataan searah pada pernyataan biimplikasi dan penyalahgunaan definisi.

Penelitian lainnya juga telah dilakukan oleh Tucker (1999) yang menyarankan agar mahasiswa dalam perkuliahan Calculus sudah diperkenalkan dengan bagaimana memahami pembuktian, tetapi tidak untuk mengkonstruksi bukti, Tucker menyarankan untuk mengkonstruksi pembuktian agar dosen dapat memilih pada topik-topik tertentu. Sedangkan Raman (2003) telah menghasilkan kerangka kerja teoritis untuk mengkarakterisasikan gagasan yang dimunculkan mahasiswa dalam melakukan pembuktian, dimana terdapat tiga gagasan penting yaitu: *Heuristic Idea*, gagasan yang didasarkan pemahaman informal seperti data empiris atau visual gambar, *Procedural Idea* yaitu gagasan berdasarkan pada kelogisan dan manipulasi formal dan *Key Idea* yaitu gagasan berdasarkan aturan-aturan yang dapat dipertanggungjawabkan dalam menghasilkan pembuktian formal.

Sementara penelitian dalam upaya meningkatkan kemampuan pembuktian matematika dikaitkan dengan penggunaan berbagai pendekatan pembelajaran pada level perguruan tinggi telah dilakukan oleh Uhlig (2003) yang mengembangkan suatu pendekatan untuk memahami dan mengkonstruksi suatu pembuktian pada mata kuliah aljabar linear elementer dengan pendekatan WWHWT (*What, Why, How, What and Theorems*), Arnawa (2006) yang menghasilkan bahwa pembelajaran berdasarkan teori Apos dapat meningkatkan kemampuan pembuktian mahasiswa dalam Aljabar Abstrak, dimana mahasiswa yang memperoleh pembelajaran Aljabar Abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai kemampuan

pembuktian secara signifikan lebih baik jika dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa. Kemudian Kusnandi (2008) yang menghasilkan bahwa pembelajaran matematika dengan strategi abduktif-deduktif dapat menumbuh-kembangkan kemampuan membuktikan mahasiswa dalam perkuliahan Teori Bilangan, dimana kemampuan membuktikan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif menunjukkan capaian yang lebih baik daripada mereka yang memperoleh pembelajaran konvensional. Selanjutnya oleh Yerizon (2011) yang menghasilkan bahwa kemampuan membuktikan yang terdiri dari kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti pada mahasiswa yang diterapkan pembelajaran dengan Pendekatan M-Apos lebih tinggi daripada mereka yang memperoleh pembelajaran konvensional dalam perkuliahan Analisis Real. Kemudian Maya (2011) meneliti tentang kemampuan pemahaman dan pembuktian matematik melalui pembelajaran dengan menggunakan *Modified Moore Learning Approach* yang menghasilkan bahwa tidak ada perbedaan kemampuan pemahaman dan pembuktian matematik antara mahasiswa yang diterapkan *Modified Moore Learning Approach* dengan pembelajaran konvensional pada perkuliahan Struktur Aljabar.

Kebaruan lain dalam penelitian ini adalah pada strategi pembelajaran yang digunakan untuk diteliti, yaitu pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif. Strategi pembelajaran ini belum banyak dikaji, beberapa penelitian terkait strategi ini telah dilakukan diantaranya oleh Pedemonte (2003) yang telah berhasil menganalisis struktur argumentasi dan struktur pembuktian, bahwa ada dua kemungkinan hubungan yang terjadi pada langkah-langkah pembuktian yang dilakukan siswa kelas 12 dalam pokok bahasan Geometri, yaitu struktur argumentasi abduktif dan struktur argumentasi deduktif, dimana kedua argumentasi

ini dijadikan alat untuk memunculkan gagasan utama dari pembuktian suatu pernyataan. Kemudian strategi pembelajaran abduktif-deduktif diadaptasi oleh Kusnandi (2008) dengan modifikasi pemberian ungkapan-ungkapan yang bersifat transactive reasoning atau teknik scaffolding, digunakan dalam penelitiannya untuk menumbuhkembangkan kemampuan pembuktian matematika pada level mahasiswa di dalam perkuliahan Teori Bilangan.

Penelitian lain terkait penggunaan strategi abduktif-deduktif pada level SMA dilakukan oleh Shodikin (2017) telah menghasilkan penelitian bahwa kemampuan penalaran matematis siswa yang mendapatkan pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif lebih baik daripada kemampuan penalaran matematis siswa yang mendapatkan pembelajaran ekspositori dalam pembelajaran matematika di SMA. Kemudian Ariani, Hartono, dan Hiltrimartin (2017) yang telah memperoleh hasil penelitian berupa deskripsi tentang kemampuan pemecahan masalah siswa SMA dalam pembelajaran matematika dengan menggunakan strategi abduktif-deduktif. Selanjutnya Ernawati, Ikhsan dan Saminan (2019) yang melakukan penelitian pengembangan dalam mengembangkan perangkat pembelajaran pembuktian dengan strategi abduktif-deduktif sebagai upaya untuk meningkatkan kemampuan pembuktian pada materi Geometri SMA.

Kebaruan berikutnya dalam penelitian ini adalah pada penerapan penilaian otentik, dimana penilaian otentik merupakan teknik penilaian yang baru dikembangkan karena penilaian tradisional yang selama ini diterapkan dalam pendidikan dianggap kurang dapat merefleksikan konteks dunia nyata serta kurang dapat menggambarkan kemampuan peserta didik secara holistik. Beberapa penelitian terkait penerapan penilaian otentik di dalam pembelajaran matematika telah dilakukan diantaranya oleh Balik (2012), yang memperoleh hasil bahwa

terdapat perbedaan secara signifikan prestasi belajar matematika antara peserta didik yang mengikuti pembelajaran dengan implementasi asesmen otentik dan peserta didik yang mengikuti pembelajaran dengan implementasi asesmen konvensional, dimana prestasi belajar matematika peserta didik dengan implementasi asesmen otentik lebih baik dari pada prestasi belajar matematika peserta didik dengan implementasi asesmen konvensional. Berikutnya Sukmawati (2016) dalam penelitiannya yang membandingkan dua teknik dari penilaian otentik yaitu teknik penilaian portofolio dengan teknik penilaian test tertulis (*paper and pencil test*) di dalam pembelajaran matematika, yang memperoleh hasil bahwa hasil belajar matematika pada kelompok peserta didik yang diberikan model penilaian portofolio secara signifikan lebih tinggi daripada kelompok peserta didik yang diberi model penilaian test tertulis. Demikian pula pada penelitian Sadono (2017) yang membandingkan dua teknik dari penilaian otentik yaitu teknik penilaian kinerja dengan teknik penilaian test tertulis (*paper and pencil test*) di dalam pembelajaran matematika dan telah memperoleh hasil bahwa hasil belajar matematika pada kelompok peserta didik yang diberikan model penilaian kinerja secara signifikan lebih tinggi daripada kelompok peserta didik yang diberi model penilaian test tertulis, setelah mengontrol kemampuan numeriknya. Kemudian Dahlan dan Sastrawijaya (2017) dalam penelitiannya yang membandingkan dua teknik dari penilaian otentik yaitu teknik penilaian kinerja dengan teknik penilaian proyek di dalam pembelajaran matematika telah memperoleh hasil bahwa kemampuan representasi matematis siswa yang diberikan penilaian kinerja lebih tinggi daripada siswa yang diberikan penilaian proyek.