ANALISIS FUNGSI OBJEKTIF SUATU SISTEM

Skripsi

Disusun untuk melengkapi syarat-syarat

guna memperoleh gelar Sarjana Sains

DWI AGUSTINA

3125121974

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA

2017

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

ANALISIS FUNGSI OBJEKTIF SUATU SISTEM

Nama : Dwi Agustina

No. Registrasi : 3125121974

		Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab				
Dekan	:	Prof. Dr. Suyono, M.Si.	....	....
		NIP. 19671218 199303 1 005		
Wakil Penanggung Jawab				
Wakil Dekan I	:	Dr. Muktiningsih, M.Si.	....	....
		NIP. 19640511 198903 2 001		
Ketua	:	Ir. Fariani Hermin, M.T.	....	....
		NIP. 19600211 198703 2 001		
Sekretaris	:	Dr. Eti Dwi W, S.Pd., M.Si.	....	....
		NIP. 19810203 200604 2 001		
Penguji	:	Dra. Widyanti Rahayu, M.Si.	....	....
		NIP. 19661103 200112 2 001		
Pembimbing I	:	Prof. Dr. Suyono, M.Si.	....	....
		NIP. 19671218 199303 1 005		
Pembimbing II	:	Vera Maya Santi, M.Si.	....	....
		NIP. 19790531 200501 2 006		

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal: 10 Februari 2017

LEMBAR PENGESAHAN

Dengan ini saya mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta

Nama	:	Dwi Agustina
No. Registrasi	:	3125121974
Program Studi	:	Matematika
Judul	:	Analisis Fungsi Objektif Suatu Sistem

Menyatakan bahwa skripsi ini telah siap diajukan untuk sidang skripsi.

Menyetujui,

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Prof. Dr. Suyono, M.Si	**Vera Maya Santi, M.Si**
NIP. 19671218 199303 1 005	NIP. 19790531 200501 2 006

Mengetahui,

Koordinator Program Studi Matematika

Dr. Lukita Ambarwati, S.Pd., M.Si

NIP. 19721026 200112 2 001

ABSTRACT

DWI AGUSTINA, 3125121974. Analysis Of The Objective Function Of A System. Thesis. Faculty of Mathematics and Natural Science, Jakarta State University. 2017.

A system is a set of connected things or parts forming to support an activity. If a system get failures, then it will be against the course of these activities. In a system there is an objective function that can describe the operations of the system. This thesis discusses objective function including benefits and expected failure cost which both must be discounted appropriately, the discount value that needs to be taken into account to prepare the necessary expenses for cost at a time interval [0, t]. Assuming benefits is a constant, failure costs are necessary if the system failures have independence and identically distributed failure times. In this thesis we also discuss about asymptotic properties for renewal process in the value of mean time between failures. An application example of a system failures with exponential distribution is discussed at the end of this paper to obtain the objective function.

Keywords *: Renewal Process, Objective Functions, Laplace Transforms, Laplace-Stieltjes Transforms.*

ABSTRAK

DWI AGUSTINA, 3125121974. Analisis Fungsi Objektif Suatu Sistem. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. 2017.

Sistem adalah perpaduan dari berbagai elemen yang saling bergantung untuk menunjang suatu kegiatan. Jika suatu sistem rusak, maka akan berakibat terhadap jalannya kegiatan tersebut. Dalam suatu sistem terdapat fungsi objektif yang dapat menggambarkan jalannya sistem. Skripsi ini membahas fungsi objektif dengan nilai pendapatan sistem dan kegagalan yang terdiskon, nilai diskon ini diperlukan untuk mempersiapkan biaya yang diperlukan dalam interval waktu [0, t]. Pendapatan diasumsikan konstan, sedangkan perbaikan diperlukan apabila kegagalan terjadi pada suatu sistem, di mana waktu antar kegagalan saling independen dan berdistribusi identik. Akan dibahas pula mengenai sifat asimtotik terkait dengan proses renewal apabila terdapat nilai rata-rata waktu antar kegagalan. Sebuah contoh aplikasi sistem yang mengalami kegagalan dengan distribusi eksponensial dibahas pada bagian akhir skripsi ini untuk mendapatkan fungsi objektif.

Kata kunci : Proses Renewal, Fungsi Objektif, Transformasi Laplace, Transformasi Laplace-Stieltjes.

PERSEMBAHANKU...

"...Indeed, Allah will not change the condition of a people until they change what is in themselves..." (13:11)

"Focus on where you want to go, not on what you fear "

-Anthony Robbins

Skripsi ini kupersembahkan untuk Bapak dan Mama tercinta.

"Terima kasih atas do'a, dukungan, dan kasih sayang yang paling sempurna".

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan YME atas pengetahuan dan kemampuan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Analisis Fungsi Objektif Suatu Sistem" yang merupakan salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Jurusan Matematika Universitas Negeri Jakarta.

Skripsi ini berhasil diselesaikan tidak terlepas dari adanya bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin menyampaikan terima kasih terutama kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Suyono, M.Si. selaku Dosen Pembimbing I dan Ibu Vera Maya Santi, M.Si. selaku Dosen Pembimbing II, yang telah meluangkan waktunya dalam memberikan bimbingan, saran, arahan serta nasehat sehingga skripsi ini dapat menjadi lebih baik dan terarah.

2. Ibu Dr. Lukita Ambarwati, S.Pd., M.Si. Selaku Koordinator Program Studi Matematika FMIPA UNJ yang telah banyak membantu penulis.

3. Ibu Ir. Fariani Hermin, M.T. Selaku Pembimbing Akademik atas segala bimbingan dan kerja sama Ibu selama perkuliahan, dan seluruh Bapak/Ibu dosen atas pengajarannya yang telah diberikan, serta karyawan/karyawati FMIPA UNJ yang telah memberikan informasi yang penulis butuhkan dalam menyelesaikan skripsi.

4. Bapak dan Mama tercinta yang selalu mengangkat kedua tangannya untuk mendoakan anak-anaknya, memberi dukungan berupa materi dan motivasi, dan selalu setia membantu penulis dengan penuh cinta dan kasih sayang yang tulus.

5. Kakak dan adik penulis, Hesti dan Dian, serta Nana sang keponakan yang

terus memberi dukungan, semangat, dan selalu menghadirkan tawa dan menghilangkan lelah ketika penulis mengerjakan skripsi ini.

6. Aan Yusufianto, yang telah banyak memberi dukungan, do'a, dan semangat positif kepada penulis.

7. Sahabat ABDR. Bety, Arum, Rita, Ani, Ratna, dan Chika yang selalu memberi dukungan dan selalu ada saat penulis senang maupun sedih.

8. Teman cantik-ku: Almira, Zuha, Yohana, Fatmah, Aan, Alphien, Uyun, Dewanti, dan Bety yang telah banyak memberikan motivasi serta berjuang bersama-sama dibangku kuliah. Serta teman-teman Matematika Murni 2012 yang senantiasa mendukung penulis, semoga hubungan kita akan terus terjaga dan bertemu kembali saat kita telah sukses nanti.

9. Teman Seperjuangan untuk menggapai cita-cita: Lenny, Bobby, Lusia, Cahyani, Jennyfer, Arief dan Chrisna yang selalu memberikan banyak dukungan berupa motivasi untuk sama-sama meraih kesuksesan di masa depan.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Masukan dan kritikan akan sangat berarti. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca sekalian.

Jakarta, Februari 2017

Dwi Agustina

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam kehidupan sehari-hari manusia banyak menjumpai kejadian yang mengandung unsur ketidakpastian. Sebagai contoh pada situasi tentang kedatangan nasabah pada suatu *bank*, tidak dapat dipastikan apakah besok nasabah yang datang dalam jumlah yang sedikit atau dalam jumlah yang cukup banyak. Sebagai contoh lain, sebuah mesin produksi yang dimiliki oleh suatu pabrik, tidak dapat dipastikan apakah besok masih bisa digunakan atau mengalami kerusakan, dan masih banyak contoh-contoh yang lain. Situasi-situasi ini dapat dimodelkan dengan proses stokastik.

Hull, dalam Howard (1989) menyatakan bahwa setiap nilai yang berubah terhadap waktu dengan cara yang tidak tertentu (dalam ketidakpastian) dikatakan mengikuti proses stokastik. Secara sederhana, proses stokastik adalah sebuah proses yang nilai-nilainya berubah sTerdapat banyak obyek dalam kehidupan sehari-hari yang dapat dipandang sebagai sebuah sistem, misalnya mesin produksi, mesin pada kendaraan bermotor, perangkat keras komputer, dan lain-lain. Sistem tersebut tidak selamanya terus bekerja, adakalanya sistem tersebut rusak dan harus diperbaiki. Contohnya sistem di dalam dunia industri, sebuah mesin tidak selamanya dapat berproduksi melainkan memiliki peluang kerusakan pada satu waktu tertentu. Ketika mesin tersebut rusak maka dibutuhkan waktu untuk memperbaiki mesin sampai mesin dapat berfungsi normal seperti sebelumnya. Kerusakan yang terjadi belum tentu hanya sekali,tetapi mesin tersebut juga memiliki peluang untuk dapat rusak dan harus diperbaiki kembali. Dalam proses produksi perbaikan mesin ini menimbulkan biaya yang cukup besar dalam peranannya sehingga perbaikan mesin perlu dijadikan pertimbangan untuk menentukan keoptimalan produksi. ecara acak seiring dengan berjalannya waktu. Proses stokastik banyak digunakan untuk memodelkan evolusi suatu sistem yang mengandung ketidakpastian atau sistem yang dijalankan pada suatu lingkungan yang tidak terduga.

Produksi dikatakan optimal jika mencapai tujuan yang diinginkan. Dengan kata lain, dalam suatu produksi akan timbul biaya yang berpengaruh terhadap keoptimalannya. Dalam proses produksi terdapat *benefit* atau pendapatan, biaya operasional yang dikeluarkan, serta biaya tak terduga atau biaya yang harus dikeluarkan jika sistem rusak dan butuh untuk diperbaiki. Keuntungan, biaya operasional serta biaya kerusakan merupakan pertimbangan penting dalam suatu produksi yang optimal.

Beberapa penulis sebelumnya telah mempelajari mengenai kegagalan sistem. Hasofer (1974) mengusulkan model renewal pada sistem yang bekerja dengan mengganti atau memperbaiki sistem, contohnya keoptimalan pada sistem publik yang sangat penting seperti jembatan. Selain itu, Rackwitz (2000) mempelajari mengenai aspek tambahan dari model renewal dan aplikasinya untuk analisis biaya dan keuntungan. Kemudian, Goda dan Hong (2006) mempelajari asumsi biaya komponen kerusakan sistem pada gempa bumi dengan proses Poisson dan non-Poisson dengan menggunakan analisis algoritma yang dikembangkan dengan teknik simulasi. Pada skripsi ini, penulis akan menganalisis suatu fungsi objektif suatu sistem yang memiliki peluang kegagalan pada waktu tertentu.

1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah yang akan dikaji adalah bagaimana sifat-sifat fungsi objektif suatu sistem?

1.3 Pembatasan Masalah

Pada penulisan skripsi ini, masalah yang akan dibahas dibatasi, yaitu:

1. Sistem dipandang sebagai suatu komponen
2. Sistem dibatasi pada sistem yang menghasilkan suatu produk dan berpeluang mengalami kegagalan sehingga diperlukan perbaikan
3. Analisis berfokus pada fungsi objektif dimana waktu antar kegagalan sistem saling independen dan berdistribusi identik

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan yang ingin dicapai dalam penulisan skripsi ini adalah untuk mendapatkan sifat-sifat fungsi objektif suatu sistem

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari skripsi ini adalah menambah wawasan pembaca mengenai sifat-sifat fungsi objektif suatu sistem dan diharapkan dapat direalisasikan dalam kehidupan nyata.

1.6 Metode Penelitian

Skripsi ini merupakan kajian teori dalam bidang proses stokastik yang didasarkan pada buku-buku dan jurnal-jurnal tentang teori permasalahan reliabilitas dan proses renewal. Referensi utama yang digunakan Rudiger Rackwitz (2001).

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini, akan membahas mengenai sistem produksi, konvolusi variabel acak, proses renewal, transformasi Laplace, transformasi Laplace-Stieljes, serta suku bunga kontinu.

2.1 Sistem Produksi

Dalam proses produksi terdapat sistem yang bekerja dan menjadi pertimbangan dalam mendapatkan keoptimalan produksinya. Sistem adalah perpaduan dari berbagai elemen (komponen) yang saling bergantung atau menunjang satu sama lain untuk menangani suatu kegiatan yang berulang kali atau yang saling terjadi untuk mencapai suatu tujuan.

Pada skripsi ini sistem yang dibahas lebih terfokus pada mesin produksi dimana ketika mesin mengalami kerusakan, akan timbul biaya perbaikan. Sistem dianggap dalam dua keadaan, yaitu berfungsi atau gagal berfungsi (dalam perbaikan).

2.1.1 Biaya Sistem

Biaya merupakan alat ukur penting dalam suatu proses produksi. Pengukuran biaya biasanya dilakukan secara periodikal dan secara terus menerus. Biaya dalam produksi telah digunakan oleh berbagai perusahaan sebagai alat pengukur performa secara periodik (Cooper & Kaplan, 1991).

Menurut Adikusumah (1982) untuk menyusun suatu sistem biaya, diperlukan pengetahuan yang mendalam mengenai:

1. Struktur organisasi dari perusahaan yang bersangkutan.
2. Proses Produksinya.
3. Tipe informasi biaya yang dibutuhkan oleh pihak manajemen.

Pendapatan Sistem ($B(p)$)

Pendapatan merupakan sesuatu yang diharapkan dari sebuah produksi. Dalam ilmu Akuntansi, pendapatan merupakan sesuatu yang dihasilkan dari suatu produksi guna memperoleh keuntungan. Pada skripsi ini, $B(p)$ diasumsikan konstan, maka $B(p) = B$.

Misalkan parameter sejumlah p merupakan banyaknya produk yang dihasilkan, maka pendapatan dapat ditentukan. Contohnya apabila suatu perusahaan x memproduksi 4 macam produk dengan biaya per-produk sebesar Rp. 25.000, maka B(4) = Rp. 100.000

Biaya Konstruksi ($C(p)$)

Biaya pengeluaran merupakan keseluruhan jumlah yang dikeluarkan untuk menghasilkan barang jadi. Pengeluaran langsung terdiri dari biaya produksi bahan dan biaya tenaga kerja, sedangkan biaya tidak langsung dimasukan ke dalam biaya tambahan pengeluaran pabrik, seperti bahan tambahan, biaya pajak, asuransi, hingga fasilitas-fasilitas tambahan yang diperlukan dalam proses produksi.

Biaya produksi sering juga disebut biaya pabrikasi atau biaya pabrik. Contohnya adalah biaya bahan baku, biaya bahan penolong, biaya gaji karyawan yang bekerja dalam bagian-bagian, baik secara langsung maupun tidak langsung yang berhubungan dengan proses produksi menurut objek pengeluarannya.

$C(p)$ diasumsikan fungsi naik dari parameter p terhadap satuan waktu t. Ketika semakin banyak produk, semakin besar pula biaya produksi yang harus dikeluarkan. Sebaliknya, semakin sedikit produk yang dihasilkan, maka semakin sedikit pula biaya produksi yang harus dikeluarkan.

Biaya Perbaikan ($D(p)$)

Biaya perbaikan merupakan biaya yang dikategorikan dengan biaya tidak terduga. Dalam sistem yang bekerja, ketika terjadi kegagalan, biaya perbaikan akan selalu dikeluarkan dari satu kegagalan dengan kegagalan berikutnya. Besarnya biaya kegagalan bergantung seberapa besarnya kerusakan, biaya perbaikan merupakan elemen penting dalam mendapatkan keoptimalan perusahaan. Pada skripsi ini, diasumsikan biaya perbaikan adalah fungsi turun dengan probabilitas kerusakan juga merupakan fungsi turun dalam p.

Jika terdapat kerusakan dengan intensitas tinggi pada satu waktu, biaya perbaikan $D(p)$ naik, maka produk yang dihasilkan akan sedikit, artinya biaya pengeluaran $C(p)$ akan turun. Sebaliknya, apabila kerusakan terjadi dengan intensitas rendah, biaya perbaikan $D(p)$ turun, maka produk yang dihasilkan mencapai jumlah yang besar, dan nilai $C(p)$ akan naik.

Dari penjelasan tersebut, antara biaya pengeluaran $C(p)$ dan perbaikan $D(p)$ berbanding terbalik. Penjelasan mengenai biaya dijelaskan pada Gambar 2.1

2.1.2 Fungsi Objektif

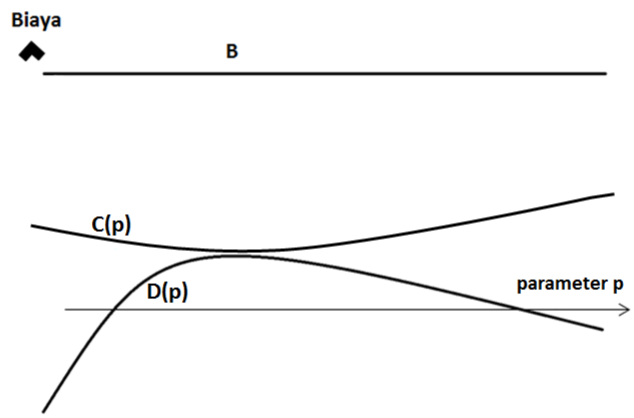
Dari biaya sistem yang dijelaskan, didapatkan fungsi objektif untuk menggambarkan produksi yang sedang berjalan. Fungsi objektif adalah fungsi yang nilainya akan dioptimalkan. Nilai dari fungsi objektif dapat berupa nilai maksmimum atau nilai minimum, tergantung pada kasusnya. Dalam sistem produksi, fungsi objektif berupa nilai optimal dimana akan dicari nilai maksimum yang diasumsikan sebagai berikut:

$$Z(p) = B(p) - C(p) - D(p)$$

$Z(p)$ diharapkan positif, karena dalam proses produksi hal yang diharapkan adalah memperoleh suatu keuntungan, maka nilai dari pendapatan harus lebih besar dari jumlah biaya pengeluatan dengan biaya kerusakan

$$B(p) > C(p) + D(p)$$

Berikut adalah gambar dari keseluruhan biaya sistem



Gambar 2.1: Biaya dengan parameter p

2.2 Konvolusi Variabel Acak

Jika dalam suatu sistem terdapat beberapa kejadian dimana antara kejadian satu dengan yang lainnya saling independen, kemudian untuk mendapatkan deskripsi tentang fungsi kepadatan atau fungsi masa peluang dari kejadian sistem tersebut, diperlukan konsep penjumlahan dua variabel acak independen. Konsep ini merupakan konvolusi variabel acak yang dapat digeneralisasi untuk kasus penjumlahan n variabel acak independen.

Misalkan X dan Y adalah variabel acak diskret yang independen dengan fungsi masa peluang $f_x(x) = P(X = x)$ dan $f_y(y) = P(Y = y)$ dengan x dan y bilangan bulat. Misalkan $Z = X + Y$ dan fungsi masa peluangnya dinotasikan dengan $f_z(z) = P(Z = z)$, dimana z adalah bilangan bulat. Anggap bahwa $X = k$, dimana k adalah bilangan bulat, maka $Z = z$ jika dan hanya jika $Y = z - k$. Sehingga kejadian $Z = z$ adalah gabungan dari pasangan kejadian-kejadian yang saling asing. Sebagai akibatnya

$$P(Z = z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k)P(Y = z - k)$$

Definisi 2.2.1. Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak diskret yang independen, dengan fungsi masa peluang $f_x(x)$ dan $f_y(y)$. Maka konvolusi dari $f_x(x)$ dan $f_y(y)$ adalah fungsi $f_z = f_x * f_y$, yang diberikan oleh

$$f_z(z) = \sum_{k} f_x(k) f_y(z - k)$$

dimana z dan k adalah bilangan bulat. Fungsi $f_z(z)$ adalah fungsi masa peluang dari variabel acak $Z = X + Y$

Definisi 2.2.2. Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak kontinu yang saling independen dan fungsi densitasnya berturut-turut adalah $f(x)$ dan $g(y)$. Asumsikan bahwa $f(x)$ dan $g(y)$ adalah bilangan real, maka konvolusi $f * g$

dari f dan g adalah fungsi yang didefinisikan dengan

$$\begin{aligned}(f * g)(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z-x)f(x)dx\end{aligned}$$

Teorema 2.2.1. Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak yang independen dengan fungsi densitasnya $f_x(x)$ dan $f_y(y)$. Maka penjumlahan dari $Z = X+Y$ adalah variabel acak dengan fungsi densitas $f_z(z)$ dimana f_z adalah konvolusi dari f_x dan f_y.

Bukti. Anggap variabel acak Z dibentuk dari penjumlahan dua variabel acak yang independen X dan Y sehingga $Z = X + Y$ adalah variabel acak dengan fungsi densitas dimana X memiliki fungsi densitas $f_x(x)$ dan Y memiliki fungsi densitas $f_y(y)$

Dapat dituliskan fungsi densitas gabungan untuk Z dan X dengan menuliskan kembali peluang bersyarat

$$f(z, x) = f(z|x)f_X(x)$$

Karena kejadian $Z = z$ dengan syarat $X = x$ ekuivalen dengan kejadian $Y = z - x$, maka

$$f(z|x) = f_Y(z-x)$$

Sebagai akibatnya, dengan menggunakan peluang marginal, $f_Z(z)$ dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}f_Z(z) &= \int f(z|x)f_X(x)dx \\ &= \int f_Y(z-x)f_X(x)dx \\ &= f_X * f_Y\end{aligned}$$

Jadi, $f_Z = f_X * f_Y$ $\square$

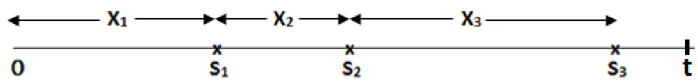
2.3 Proses Renewal

Dalam sistem produksi, dijumpai peralatan atau komponen yang mengalami kegagalan. Sehingga, perlu perbaikan untuk melanjutkan proses produksi. Proses semacam ini merupakan proses renewal. Secara definisi dapat dikatakan bahwa jika barisan variabel acak non-negatif berdistribusi sembarang identik dan independen maka proses menghitung pergantian disebut proses renewal. Pada proses renewal setiap kali terjadi kegagalan, terus diperbaiki sampai komponen berfungsi lagi dan proses dilanjutkan lagi.

Proses renewal secara matematik dapat didefinisikan sebagai berikut. Misalkan $X_1, X_2, ...$ merupakan barisan variabel acak non-negatif yang menyatakan waktu-waktu antar kejadian yang berurutan dan saling independen dan berdistribusi identik. Misalkan

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i;\ n \geq 1 \text{ dan } S_0 = 0,$$

dimana S_n menyatakan waktu kejadian ke-n.



Gambar 2.2: Proses Renewal

Berdasarkan gambar 2.1 dapat dijelaskan bahwa banyaknya kejadian sampai waktu ke t diberikan oleh

$$N(t) = maks\{n \geq 0 : S_n \leq t\} \tag{2.1}$$

Definisi 2.3.1. Proses Stokastik $N = \{N(t), t \geq 0\}$ yang didefinisikan pada persamaan (2.1) dinamakan proses renewal.

Distribusi dari $N(t)$ dapat ditentukan dengan memperhatikan bahwa banyaknya *renewal* pada waktu $t \geq n$ jika dan hanya jika renewal ke-n terjadi sebelum atau pada waktu t, yakni

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t \tag{2.2}$$

Dari Persamaan (2.2), dari hubungan antara $N(t)$ dan S_n dapat diperoleh

$$\begin{aligned} P(N(t) = n) &= P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1) \\ &= P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Misalkan variabel-variabel acak $X_i, i \geq 1$, memiliki fungsi distribusi kumulatif F, yakni $F(x) = P(X_i \leq x)$, dan $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ mempunyai fungsi distribusi kumulatif F_n, yakni

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(S_n \leq x) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\right), \end{aligned}$$

Fungsi distribusi F_n merupakan konvolusi n kali dari distribusi F dengan dirinya sendiri. Dari persamaan (2.3) diperoleh

$$P\{N(t) = n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t)$$

Untuk t menuju tak hingga proses renewal $N(t)$ memiliki sifat sebagai berikut

Proposisi 2.3.1. Dengan probalilitas 1,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

dimana $\mu = E(X_i)$

Bukti. Karena $S_{N(t)}$ merupakan kejadian terakhir dari proses renewal dalam selang waktu t dan $S_{N(t)+1}$ merupakan renewal pertama setelah waktu t, dapat dituliskan

$$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$$

atau

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \tag{2.4}$$

karena

$$\tfrac{S_{N(t)}}{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} \tfrac{X_i}{N(t)}$$

merupakan rata-rata dari $N(t)$, merupakan variabel acak yang berdistribusi independen dan identik. Menurut hukum bilangan bulat terbesar (SLLN) $\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu$ untuk $N(t) \to \infty$. Tetapi karena $N(t) \to \infty$ untuk $t \to \infty$ maka

$$\lim_{t\to\infty} \tfrac{S_{N(t)}}{N(t)} = \mu$$

selanjutnya

$$\tfrac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \left[\tfrac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\right]\left[\tfrac{N(t)+1}{N(t)}\right],$$

karena

$$\frac{S_{N(t)+1}}{(N(t)+1)} = \mu$$

merupakan rata-rata dari N(t)+1, merupakan variabel acak yang berdistribusi independen dan identik.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)+1}{N(t)} = 1$$

maka,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \mu$$

$\square$

2.4 Transformasi Laplace

Suatu kejadian dalam kehidupan kebanyakan merupakan fungsi waktu $f(t)$. Perhitungan-perhitungan mengenai kejadian ini akan sangat dipermudah jika dinyatakan dalam peubah lain yang bukan waktu. Perubahan pernyataan suatu fungsi waktu t ke dalam peubah lain disebut transformasi, berikut akan dijelaskan transformasi Laplace. Dengan menggunakan transformasi Laplace, suatu fungsi yang semula merupakan fungsi t akan berubah menjadi fungsi s.

Definisi 2.4.1. Misalkan $f(t)$ adalah fungsi dari $t > 0$. Maka transformasi Laplace dari $f(t)$ dinotasikan dengan $\widehat{f}(s)$ atau $\mathcal{L}(f(t))$, didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}(f(t)) \equiv \widehat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

jika integral ini ada nilainya, dimana s adalah variabel bernilai real atau kompleks.

Contoh 2.3.1 Transformasi Laplace dari $f(t) = e^{at}$ adalah

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(s) = \mathcal{L}(e^{at}) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt \\
&= \int_0^\infty e^{(-s+a)t} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt \\
&= \frac{-1}{s-a}\left[e^{-(s-a)t}\right]_0^\infty \\
&= \frac{-1}{s-a}(0-1) \\
&= \frac{1}{s-a}, s > a
\end{aligned}$$

Tidak semua fungsi memiliki transformasi Laplace. Terdapat syarat cukup agar suatu fungsi $f(t)$ memiliki transformasi Laplace. Sebelum diberikan syarat cukup tersebut, diperlukan beberapa pengertian yang terkait sebagai berikut

Definisi 2.4.2. Suatu fungsi dikatakan kontinu secara sebagian-sebagian dalam suatu selang $\alpha \leq t \leq \beta$, bila selang ini dapat dibagi-bagi lagi ke dalam sejumlah berhingga selang-selang dimana dalam setiap selang ini fungsinya kontinu dan memiliki limit-limit kanan dan kiri yang berhingga.

Definisi 2.4.3. Suatu fungsi $f(t)$ dikatakan berorde eksponensial γ jika t menuju tak berhingga terdapat konstanta-konstanta riil $M > 0$ dan γ sehingga untuk semua $t > N$ berlaku

$$|e^{-\gamma t} f(t) < M| \text{ atau } |f(t)| < Me^{\gamma t}$$

Syarat cukup agar transformasi Laplace suatu fungsi ada, dinyatakan dalam teorema berikut

Teorema 2.4.1. Jika $f(t)$ adalah kontinu secara sebagian-sebagian dalam setiap selang berhingga $0 \leq t \leq N$ dan eksponensial berorde γ untuk $t > N$, maka transformasi Laplace $\widehat{f}(s)$ ada untuk semua $s > \gamma$.

Bukti. Untuk bilangan positif N

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^N e^{-st} f(t)dt + \int_N^\infty e^{-st} f(t)dt$$

karena $f(t)$ kontinu secara sebagian-sebagian dalam setiap selang berhingga $0 \leq t \leq N$, integral pertama di sebelah kanan ada. Integral kedua di sebelah kanan juga ada, karena $f(t)$ eksponensial berorde γ umtuk $t > N$, maka

$$\begin{aligned} \left| \int_N^\infty e^{-st} f(t)dt \right| &\leq \int_N^\infty |e^{-st} f(t)|dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-st} |f(t)|dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-st} M e^{\gamma t} dt = \frac{M}{s-\gamma} \end{aligned}$$

Jadi, transformasi Laplace $\widehat{f}(s)$ ada untuk semua $s > \gamma$ $\square$

Berikut adalah beberapa sifat transformasi Laplace. Simbol $\mathcal{L}$ disebut operator dari transformasi Laplace, yang mentransformasikan $f(t)$ ke dalam $\widehat{f}(s)$.

1. Sifat Linear

   Jika c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta sedangkan $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ adalah fungsi-fungsi dengan transformasi Laplacenya masing-masing $\widehat{f_1}(t)$ dan $\widehat{f_2}(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\} = c_1\widehat{f_1}(s) + c_2\widehat{f_2}(s)$$

2. Transformasi Laplace dari integral

   Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = \widehat{f}(s)$, maka

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{\widehat{f}(s)}{s}$$

3. Perkalian dengan t^n

   Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = \widehat{f}(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\widehat{f}(s)$$

Definisi 2.4.4. Fungsi tangga satuan *(the unit step function)* $u(t)$ didefinisikan dengan

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Skema lebih umum

$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & t > a, \\ 0 & t < a. \end{cases}$$

Teorema 2.4.2. Misalkan $\widehat{f}(s)$ ada untuk $0 \leq \gamma < s$. Jika a adalah konstanta positif, maka

$$\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a)) = e^{-as}\widehat{f}(s),$$

Bukti. Dari definisi transformasi Laplace, diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a)) &= \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)u(t-a)dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt
\end{aligned}$$

dimana pada persamaan yang terakhir digunakan definisi fungsi tangga satuan bahwa $u(t-a)$ adalah 1 untuk $t > a$ dan sama dengan nol untuk $t < a$. Kemudian misalkan $v = t - a$, maka didapat $dv = dt$ dan persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a)) &= \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)u(t-a)dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-as}e^{-sv}f(v)dv \\
&= e^{-as}\int_0^\infty e^{-sv}f(v)dv \\
&= e^{-as}\widehat{f}(s)
\end{aligned}$$

□

Definisi 2.4.5. Misalkan $f(t)$ dan $g(t)$ kontinu pada $[0, \infty)$. Konvolusi dari $f(t)$ dan $g(t)$ dinotasikan dengan $f * g$, yang didefinisikan dengan

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-v)g(v)dv$$

Teorema 2.4.3. Misalkan $f(t)$ dan $g(t)$ kontinu pada $[0, \infty)$ dan menyatakan fungsi eksponensial dengan orde α, maka

$$\widehat{(f * g)}(s) = \widehat{f}(s)\widehat{g}(s)$$

Bukti. Dengan menggunakan definisi dari konvolusi, diperoleh

$$\widehat{(f * g)}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(t-v)g(v)dv\right)dt$$

Kemudian dengan menggunakan fungsi tangga satuan *(the unit step function)* yang digeser $u(t-v)$, dimana $u(t-v) = 1$, jika $t > v$ didapat

$$\begin{aligned}\widehat{(f * g)}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^\infty u(t-v)f(t-v)g(v)dv\right)dt \\ &= \int_0^\infty g(v)\left(\int_0^\infty e^{-st}u(t-v)f(t-v)dt\right)dv\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty g(v)\left(\int_v^\infty e^{-st}f(t-v)dt\right)dv \\ &= \int_0^\infty g(v)\left(\int_0^\infty e^{-as}e^{-sv}f(a)da\right)dv \\ &= \int_0^\infty g(v)e^{-sv}\left(\int_0^\infty e^{-as}f(a)da\right)dv \\ &= \int_0^\infty g(v)e^{-sv}\widehat{f}(s)dv \\ &= \widehat{f}(s)\int_0^\infty g(v)e^{-sv}dv \\ &= \widehat{f}(s)\int_0^\infty e^{-sv}g(v)dv \\ &= \widehat{f}(s)\widehat{g}(s)\end{aligned}$$

□

Misalkan $X_1, X_2, ...$ adalah barisan variabel yang independen dan berdistribusi indentik dengan fungsi distribusi kumulatif F dan F_n adalah fungsi distribusi kumulatif dari $X_1 + X_2 + ... + X_n$ yakni

$$F_n(x) = P(X_1 + X_2 + ... + X_n \leq x)$$

Sebelum mentransformasikan F_n, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= P(X_1 + X_2 \leq x) \\
&= \int\int_{X_1+X_2\leq x} f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2 \\
&= \int_0^\infty \int_0^{x-x_2} f(x_1)dx_1 f(x_2)dx_2 \\
&= \int_0^\infty F(x-x_2)f(x_2)dx_2
\end{aligned} \tag{2.5}$$

dan transformasi Laplace dari $F_2(x)$ adalah

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_2(s) &= \int_0^\infty F_2(x)e^{-sx}dx \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(x_2)F(x-x_2)dx_2e^{-sx}dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(x_2)F(y)e^{-s(y+x_2)}dx_2dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(x_2)e^{-sx_2}F(y)e^{-sy}dx_2dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(x_2)e^{-sx_2}dx_2F(y)e^{-sy}dy \\
&= \int_0^\infty f(x_2)e^{-sx_2}dx_2 \int_0^\infty F(y)e^{-sy}dy \\
&= \widehat{f}(s)\widehat{F}(s).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Perhatikan juga bahwa

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(s) &= \int_0^\infty F(x)e^{-sx}dx \\
&= -\frac{1}{s}\int_0^\infty F(x)d(e^{-sx}) \\
&= -\frac{1}{s}\left[\lim_{b\to\infty}[F(x)e^{-sx}]_0^b - \int_0^\infty e^{-sx}d(F(x))\right] \\
&= -\frac{1}{s}[0 - F^*(s)] \\
&= \frac{1}{s}[F^*(s)]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

dimana $F^*(s)$adalah transformasi Laplace Stieltjes dari F, yakni

$$F^*(s) = \textstyle\int_0^\infty e^{-sx} dF(x)$$

Jika F kontinu maka

$$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \widehat{f}(s) \tag{2.8}$$

Dengan subtitusi dari (2.7) dan (2.8) ke (2.6), didapatkan transformasi Laplace dari $F_2(x)$

$$\begin{aligned} \widehat{F}_2(s) &= F^*(s)\frac{1}{s}F^*(s) \\ &= \frac{1}{s}[F^*(s)]^2 \end{aligned}$$

Skema umum transformasi Laplace dari F_n diberikan pada teorema berikut

Teorema 2.4.4. Transformasi Laplace dari F_n diberikan oleh

$$\widehat{F}_n(s) = \frac{1}{s}[F^*(s)]^n$$

Bukti. Dengan menggunakan induksi matematika. Ambil $n = 1$

$$\begin{aligned} F_1^*(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} dF_1(x) \\ &= \lim_{b\to\infty} [e^{-sx}F_1(x)]_0^b - \int_0^\infty F_1(x) d(e^{-sx}) \\ &= 0 - \int_0^\infty F_1(x)(-se^{-sx}) dx \\ &= s\int_0^\infty F_1(x) e^{-sx} dx \\ &= s\widehat{F}_1(s) \end{aligned}$$

□

karena $F_1(x) = F(x)$ maka $\widehat{F}_1(s) = \frac{1}{s}[F^*(s)]$. Selanjutnya asumsikan benar untuk $n - 1$

$$\widehat{F}_{n-1}(s) = \frac{1}{s}[F^*(s)]^{n-1} \tag{2.9}$$

dimana F_{n-1} adalah fungsi distribusi kumulatif dari $S_{n-1} = X_1+X_2+...+X_{n-1}$. Akan dibuktikan

$$\widehat{F}_n(s) = \frac{1}{s}[F^*(s)]^n$$

dimana F_n adalah fungsi distribusi kumulatif dari $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_{n-1} + X_n$. Terlihat bahwa $S_n = S_{n-1} + X_n$ dengan S_{n-1} dan X_n independen. Kemudian dengan menggunakan persamaan (2.8) dan (2.9) didapat

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_n(s) &= \widehat{F}_{n-1}(s)\widehat{f}(s) \\
&= \frac{1}{s}[F^*(s)]^{n-1}F^*(s) \\
&= \frac{1}{s}[F^*(s)]^n
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\widehat{F}_n(s) = \frac{1}{s}[F^*(s)]^n$ untuk semua n bilangan asli.

2.5 Suku Bunga Kontinu

Tingkat suku bunga mempunyai pengertian yaitu harga dari penggunaan uang yang dinyatakan dalam bentuk persen untuk jangka waktu tertentu. Misalkan terdapat sejumlah uang yang ditabungkan akan dibungakan dengan suku bunga sebesar i per tahun, maka dapat disebut tingkat suku bunga nominal. Namun, apabila terdapat sejumlah uang yang ditabungkan dengan suku bunga sebesar i selama m periode dalam setahun, maka disebut dengan tingkat suku bunga efektif.

Jika pembayaran dilakukan dengan laju suku bunga $i^{(m)}$ dibayarkan m periode per tahun, maka bank membayarkan bunga per tahun sebesar

$$\frac{i^m}{m} = [(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]$$

ketika m naik, maka suku bungan $i^{(m)}$ turun, dengan menggunakan kalkulus akan ditunjukkan approksimasi $i^{(m)}$ mendekati $\gamma = ln(1+i)$ sebagai periode bunga m yang tak terhingga.

$$i^{(m)} = m\left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right)$$

dengan menggunakan aturan l'Hospital, diperoleh

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} i^{(m)} &= \lim_{m\to\infty} m\left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right) \\
&= \left(\lim_{m\to\infty} \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}}\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} ln(1+i)(-m^{-2})}{-m^{-2}} \\
&= \lim_{m\to\infty} (1+i)^{\frac{1}{m}} ln(1+i) \\
&= \lim_{m\to\infty} ln(1+i) \\
&= ln(1+i) \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Misalkan $\gamma = ln(1+i)$, maka

$$1 + i = e^{\gamma}$$

atau

$$i = e^{\gamma} - 1$$

ketika bunga majemuk dengan suku bunga γ pada suatu waktu tertentu dituliskan sebagai

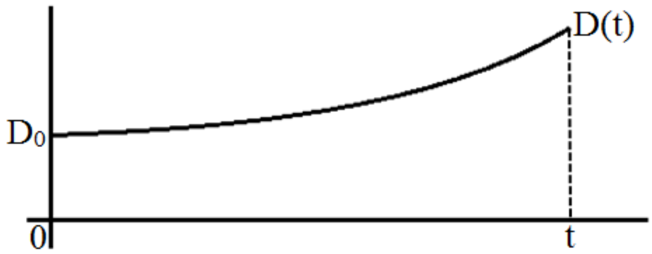
$$\delta(t) = (1+i)^t$$

maka dapat dituliskan

$$\delta(t) = e^{\gamma t}$$

2.5.1 Nilai Akumulasi $(D(t))$

Jika dalam waktu $t = 0$ terdapat sejumlah uang sebesar D_0, akan dibungakan dengan suku bunga sebesar γ dalam selang waktu t,



Gambar 2.3: Suku bunga kontinu

maka akan didapatkan sejumlah uang sebesar $D(t)$ pada waktu t diberikan oleh

$$D(t) = D_0 e^{\gamma t} \tag{2.11}$$

Selanjutnya, akan ditentukan nilai sekarang dari fungsi objektif $Z(p)$ dengan menggunakan nilai sekarang, yaitu

$$D_0 = D(t)e^{-\gamma t} \tag{2.12}$$

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini, akan dibahas mengenai asumsi fungsi objektif, model renewal untuk kegagalan sistem, dan contoh aplikasi kegagalan sistem dengan kegagalan sistem berdistribusi eksponensial.

3.1 Fungsi Objektif

Misalkan dalam suatu proses produksi terdapat komponen penting yang menjadi pertimbangan dalam penentuan keoptimalannya. Anggap dalam suatu produksi terdapat pendapatan yang diterima, kemudian diperlukannya biaya konstruksi yang harus dikeluarkan untuk jalannya produksi tersebut, serta pengeluaran biaya perbaikan atau biaya reparasi jika sistem yang bekerja rusak, maka dapat ditentukan suatu fungsi objektif.

Misalkan fungsi objektif dari sistem dirumuskan sebagai berikut:

$$Z(p) = B(p) - C(p) - D(p)$$

di mana diasumsikan $B(p)$ adalah pendapatan yang dihasilkan dari suatu komponen, $C(p)$ adalah biaya konstruksi, $D(p)$ adalah biaya kerusakan dan p adalah parameter, mungkin berupa vektor, yang tergantung pada waktu. Semua kuantitas akan diukur dalam satuan mata uang. Untuk menentukan nilai dari $Z(p)$ harga harapan dari $B(p), C(p)$ dan $D(p)$ perlu dihitung.

$B(p)$ tidak terpengaruh atau sedikit menurun dengan masing-masing komponen dari p. Oleh karena itu, akan diasumsikan $B(p) = B$, suatu konstanta.

Biaya akan diasumsikan dengan $C(p)$ fungsi naik dalam p. Nilai $C(p)$ secara umum paling mudah untuk ditaksir. Kuantitas diasumsikan sebagai $D(p)$ merupakan fungsi turun dalam p apabila probabilitas kerusakan merupakan fungsi turun dalam p. Sebagai tambahan atas asumsi-asumsi sebelumnya, $Z(p)$ dianggap tetap positif.

Selanjutnya, keputusan tentang $Z(p)$ harus diterapkan pada saat $t = 0$. Fungsi kapitalisasi kontinu akan digunakan, yakni

$$\delta(t) = e^{-\gamma t} \tag{3.1}$$

dimana γ merupakan suku bunga dan t adalah waktu dalam satuan tertentu.

Selanjutnya, persamaan (3.1) digunakan untuk menentukan nilai sekarang dari biaya pendapatan B dan model renewal yang menggambarkan tentang kegagalan sistem dimana biaya perbaikan $D(p)$ dapat ditentukan sehingga didapatkan persamaan $Z(p)$.

Penentuan nilai sekarang dengan mendiskonkan pendapatan dan kegagalan. Dengan mengintegralkan persamaan (3.1), yakni

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= \int_0^\infty \delta(t) f(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\gamma t} f(t) dt \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2 Model Renewal untuk Kegagalan Sistem

Asumsikan kejadian antar kegagalan sistem (perbaikan berikutnya) dapat dimodelkan dengan proses renewal yang memiliki waktu antar kegagalannya mempunyai fungsi densitas $g(t)$. Misalkan

$$g_n(t) = \int_0^t g_{n-1}(t-\tau) g(\tau) d\tau, \qquad n = 2, 3, ... \tag{3.3}$$

merupakan fungsi densitas untuk waktu sampai terjadinya kejadian ke n, yang merupakan konvolusi integral. Akan diasumsikan bahwa densitas waktu untuk kegagalan pertama berbeda dengan kegagalan berikutnya. Densitas waktu sampai terjadinya kejadian pertama dinotasikan dengan $g_1(t)$. Proses renewal yang bersesuaian disebut proses renewal termodifikasi.

Notasikan transformasi Laplace dari $g_1(t)$ dan $g(t)$ dengan

$$g_1^*(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta t} g_1(t)dt$$

$$g^*(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta t} g(t)dt \tag{3.4}$$

Dalam kasus kegagalan sistem mengikuti proses Poisson dengan intensitas $r(t) = \lambda$, maka fungsi survival dari sistem adalah

$$\begin{aligned}
\overline{G}(t) &= e^{-\int_0^t r(s)ds} \\
&= e^{-\int_0^t \lambda ds} \\
&= e^{-\lambda s|_0^t} \\
&= e^{-(\lambda t - 0)} \\
&= e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

dan fungsi peluang densitas dari sistem adalah

$$\begin{aligned}
g_1(t) = g(t) &= r(t)\overline{G}(t) \\
&= \lambda e^{-\lambda t} \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Maka, untuk proses Poisson stasioner dengan intensitas λ, diperoleh

$$\begin{aligned}
g_1^*(\theta) = g^*(\theta) &= \int_0^\infty e^{-\theta t} \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{-\theta t} e^{-\lambda t} dt \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{(-\theta - \lambda)t} dt \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{-(\theta + \lambda)t} dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda\left[-\frac{1}{\theta+\lambda}e^{-(\theta+\lambda)t}\right]_0^\infty \\
&= \lambda\left[0-\left(-\frac{1}{\theta+\lambda}\right)\right] \\
&= \frac{\lambda}{\theta+\lambda} \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Transformasi Laplace dari konvolusi $g_n(t)$ untuk proses renewal termodifikasi adalah

$$
\begin{aligned}
g_n^*(\theta) &= \int_0^\infty e^{-\theta t}\left(\int_0^t g_{n-1}(t-\tau)g_1(\tau)d\tau\right)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\theta t}\left(\int_0^\infty u(t-\tau)g_{n-1}(t-\tau)g_1(\tau)d\tau\right)dt \\
&= \int_0^\infty g_1(\tau)\left(\int_0^\infty e^{-\theta t}u(t-\tau)g_{n-1}(t-\tau)dt\right)d\tau \\
&= \int_0^\infty g_1(\tau)e^{-\theta\tau}g_{n-1}^*(\theta)d\tau \\
&= g_{n-1}^*(\theta)\int_0^\infty e^{-\theta\tau}g_1(\tau)d\tau \\
&= g_{n-1}^*(\theta)g_1^*(\theta) \\
&= g_1^*(\theta)g_{n-1}^*(\theta) \\
&= g_1^*(\theta)[g^*(\theta)]^{n-1} \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Misalkan

$$h(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(t)$$

adalah fungsi densitas renewal (*renewal density*). Transformasi Laplace dari $h(t)$ untuk proses renewal termodifikasi,

$$
\begin{aligned}
h_1^*(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n^*(\theta) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} g_1^*(\theta)[g^*(\theta)]^{n-1} \\
&= g_1^*(\theta)\sum_{n=1}^{\infty}[g^*(\theta)]^{n-1} \\
&= g_1^*(\theta)\{0+g^*(\theta)+(g^*(\theta))^2+(g^*(\theta))^3+...\} \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Dari persamaan (3.7), terlihat bahwa $\sum_{n=1}^{\infty}[g^*(\theta)]^{n-1}$ merupakan deret geometri tak hingga dengan suku pertama $a = [g^*(\theta)]^0 = 1$ dan rasio $r = g^*(\theta)$, maka

$$\begin{aligned} h_1^*(\theta) &= g_1^*(\theta)\frac{1}{1-g^*(\theta)} \\ &= \frac{g_1^*(\theta)}{1-g^*(\theta)} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Transformasi Laplace dari $h(t)$ ntuk proses renewal biasa adalah

$$\begin{aligned} h^*(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n^*(\theta) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g^*(\theta)[g^*(\theta)]^{n-1} \\ &= \frac{g^*(\theta)}{1-g^*(\theta)} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Asumsikan bahwa jika struktur gagal, rekonstruksi sistematis dipilih. Model renewal mensyaratkan waktu antar kegagalan yang saling independen. Setelah kegagalan pertama, waktu-waktu kegagalan berikutnya terdistribusi secara identik. Kondisi dijamin dengan asumsi bahwa muatan (*load*) pada waktu-waktu antar kegagalan yang berbeda adalah independen dan strukturnya direalisasikan dengan aturan kejadian acak dan bersifat independen pada masing-masing perbaikan. Total pendapatan terdiskon dari B yang bernilai konstan b per satuan waktu dengan menggunakan persamaan (3.2) adalah

$$\begin{aligned} B &= b\int_0^{\infty} e^{-\gamma t}dt \\ &= b\Big[-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma t}\Big]_0^{\infty} \\ &= b\Big[0-\Big(-\frac{1}{\gamma}e^0\Big)\Big] \\ &= b\Big(\frac{1}{\gamma}\Big) \\ &= \frac{b}{\gamma} \end{aligned} \tag{3.11}$$

B = Biaya pendapatan yang terdiskon

b = Biaya pendapatan yang bernilai konstan

Nilai sekarang dari ekspektasi biaya kegagalan untuk rekonstruksi sistematis setelah kegagalan terjadi. Dengan menggunakan $\theta = \gamma$ dari persamaan (3.2) untuk proses renewal termodifikasi, adalah

$$\begin{aligned}
D(p) &= (C(p)+H)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\delta(t)g_n(t,p)dt \\
&= (C(p)+H)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\gamma t}g_n(t,p)dt \\
&= (C(p)+H)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\gamma t}\left(\int_0^{t}g_{n-1}((t,p)-(\tau,p))g_1(\tau,p)d\tau\right)dt \\
&= (C(p)+H)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\gamma t}\left(\int_0^{\infty}u((t,p)-(\tau,p))g_{n-1}((t,p)-(\tau,p))\right. \\
&\quad \left. g_1(\tau,p)d\tau\right)dt \\
&= (C(p)+H)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}g_1(\tau,p)\left(\int_0^{\infty}e^{-\gamma t}u((t,p)-(\tau,p))\right. \\
&\quad \left. g_{n-1}((t,p)-(\tau,p))dt\right)d\tau \\
&= (C(p)+H)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}g_1(\tau,p)e^{-\gamma\tau}g^*_{n-1}(\gamma,p)d\tau \\
&= (C(p)+H)\sum_{n=1}^{\infty}g^*_{n-1}(\gamma,p)\int_0^{\infty}e^{-\gamma\tau}g_1(\tau,p)d\tau \\
&= (C(p)+H)\sum_{n=1}^{\infty}g^*_{n-1}(\gamma,p)g^*_1(\gamma,p) \\
&= (C(p)+H)\sum_{n=1}^{\infty}g^*_1(\gamma,p)g^*_{n-1}(\gamma,p) \\
&= (C(p)+H)\sum_{n=1}^{\infty}g^*_1(\gamma,p)[g^*(\gamma,p)]^{n-1} \\
&= (C(p)+H)g^*_1(\gamma,p)\sum_{n=1}^{\infty}[g^*(\gamma,p)]^{n-1} \\
&= (C(p)+H)\frac{g^*_1(\gamma,p)}{1-g^*(\gamma,p)} \\
&= (C(p)+H)h^*_1(\gamma,p) \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Nilai ekspektasi biaya kegagalan diperoleh dari perkalian jumlah kegagalan yang terdiskon dengan $(C(p)+H)$ di mana $C(p)$ merupakan biaya produksi dan H adalah suatu konstanta. Oleh karena itu,

$$Z(p) = \frac{b}{\gamma} - C(p) - (C(p)+H)h_1^*(\gamma, p) \tag{3.13}$$

Untuk proses renewal biasa, $h_1^*(\gamma, p)$ diganti dengan $h^*(\gamma, p)$, maka

$$Z(p) = \frac{b}{\gamma} - C(p) - (C(p)+H)h^*(\gamma, p) \tag{3.14}$$

Jika kegagalan mengikuti proses Poisson stasioner dengan laju kegagalan $\lambda(p)$, maka diperoleh

$$Z(p) = \frac{b}{\gamma} - C(p) - (C(p)+H)\frac{\lambda(p)}{\lambda} \tag{3.15}$$

Jika diasumsikan proses renewal untuk gangguan tertentu, sebagai contoh gempa bumi, dengan densitas waktu-waktu antar kedatangan masing-masing $f_1(t)$ dan $f(t)$, dan kegagalan dapat terjadi secara independen dengan probabilitas $P_f(p)$, maka

$$Z(p) = \frac{b}{\gamma} - C(p) - (C(p)+H)\frac{P_f(p)f_1^*(\gamma)}{1-(1-P_f(p))f^*(\gamma)} \tag{3.16}$$

Untuk gangguan Poisson dengan intensitas λ, rumus diatas dapat disederhanakan menjadi

$$Z(p) = \frac{b}{\gamma} - C(p) - (C(p)+H)\frac{P_f(p)\lambda}{\gamma + P_f(p)\lambda} \tag{3.17}$$

Rumus transformasi Laplace dari densitas renewal dapat diperoleh hanya pada sedikit kasus. Pada umumnya sulit untuk mendapatkan proses transformasi Laplace secara analitik dan perlu ditentukan secara numerik. Berikut adalah beberapa sifat asimtotik terkait dengan proses renewal

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{1}{\mu} \tag{3.18}$$

apabila $f(t) \to 0$, untuk $t \to \infty$

Dimana $\mu = E[T]$, mean waktu antar kegagalan. Rumus (3.17) berlaku baik untuk proses renewal biasa maupun renewal termodifikasi. Transformasi Laplace asimtot yang sesuai adalah

$$\lim_{\gamma \to 0} \gamma h(\gamma) = \frac{1}{\mu} \tag{3.19}$$

Oleh karena itu, untuk kasus rekonstruksi sistematis, diperoleh fungsi objektif

$$Z(p) = \frac{b}{\gamma} - C(p) - (C(p) + H)\frac{1}{\gamma\mu(p)} \tag{3.20}$$

3.3 Contoh Aplikasi

Suatu sistem yang sedang berjalan, memiliki pendapatan ($B(p)$) yang diasumsikan konstan B. Total B yang terdiskon dengan nilai konstanta b persatuan waktu dengan suku bunga γ adalah

$$\begin{aligned} B &= b\int_0^\infty e^{-\gamma t} dt \\ &= b\left[-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma t}\right]_0^\infty \\ &= b\left[0 - \left(-\frac{1}{\gamma}e^0\right)\right] \\ &= b\left(\frac{1}{\gamma}\right) \\ &= \frac{b}{\gamma} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Selanjutnya, misalkan suatu sistem yang sedang berjalan memiliki peluang kerusakan dengan variabel acak x berdistribusi eksponensial dengan parameter λ. Variabel acak x dikatakan berdistribusi eksponensial dengan parameter λ jika memiliki fungsi densitas

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Fungsi distribusi kumulatif yaitu

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Transformasi Laplace dari fungsi eksponensial dengan $s = \gamma$ adalah

$$\begin{aligned} F^*(\gamma) &= \int_0^\infty e^{-\gamma x} dF(x) \\ &= \int_0^\infty e^{-\gamma x} d(1 - e^{\lambda x}) \\ &= \int_0^\infty e^{-\gamma x} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-(\gamma+\lambda)x} dx \\ &= -\frac{\lambda}{\gamma+\lambda} \left[e^{-(\gamma+\lambda)x} \right]_0^\infty \\ &= -\frac{\lambda}{\gamma+\lambda}(0 - 1) \\ &= \frac{\lambda}{\gamma+\lambda} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Nilai sekarang dari ekspektasi biaya kegagalan $D(p)$ dengan suku bunga γ untuk proses renewal, yaitu

$$\begin{aligned} D(p) &= (C(p) + H) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \delta(t) F_n(t) dt \\ &= (C(p) + H) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\gamma t} F_n(t) dt \\ &= (C(p) + H) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\gamma t} \left(\int_0^t F_{n-1}(t-\tau) F(\tau) d\tau \right) dt \\ &= (C(p) + H) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\gamma t} \left(\int_0^\infty u(t-\tau) F_{n-1}(t-\tau) F(\tau) d\tau \right) dt \\ &= (C(p) + H) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty F(\tau) \left(\int_0^\infty e^{-\gamma t} u(t-\tau) F_{n-1}(t-\tau) dt \right) d\tau \\ &= (C(p) + H) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty F(\tau) e^{-\gamma \tau} F_{n-1}^*(\gamma) d\tau \\ &= (C(p) + H) \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}^*(\gamma) \int_0^\infty e^{-\gamma \tau} F(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (C(p)+H)\sum_{n=1}^{\infty} F^*_{n-1}(\gamma)F^*(\gamma) \\
&= (C(p)+H)\sum_{n=1}^{\infty} F^*(\gamma)F^*_{n-1}(\gamma) \\
&= (C(p)+H)\sum_{n=1}^{\infty} F^*(\gamma)[F^*(\gamma)]^{n-1} \\
&= (C(p)+H)\frac{F^*(\gamma)}{1-F^*(\gamma)} \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Dengan mensubtitusi persamaan (3.21) ke dalam persamaan (3.22) maka didapatkan model renewal untuk ekspektasi biaya kegagalan dengan laju sebesar λ dibagi dengan γ yang merupakan suku bunga, kemudian dikalikan dengan $(C(p) + H)$ di mana $C(p)$ merupakan biaya pengeluaran dan H diasumsikan suatu konstanta, maka

$$\begin{aligned}
D(p) &= (C(p)+H)\frac{F^*(\gamma)}{1-F^*(\gamma)} \\
&= (C(p)+H)\frac{\frac{\lambda}{\gamma+\lambda}}{1-\frac{\lambda}{\gamma+\lambda}} \\
&= (C(p)+H)\frac{\frac{\lambda}{\gamma+\lambda}}{\frac{\gamma+\lambda-\lambda}{\lambda}} \\
&= (C(p)+H)\frac{\lambda}{\gamma} \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

Maka, didapatkan fungsi objektif

$$Z(p) = \frac{b}{\gamma} - C(p) - (C(p)+H)\frac{\lambda(p)}{\gamma} \qquad (3.25)$$

Dari fungsi objektif di atas, terlihat bahwa nilai $Z(p)$ diperoleh dari biaya pendapatan dibagi dengan suku bunga, dikurangi biaya pengeluaran, dan dikurangi dengan perkalian antara laju kerusakan dengan biaya pengeluaran yang ditambah dengan suatu konstanta, kemudian dibagi dengan suku bunga. Nilai $Z(p)$ diharapkan positif agar suatu perusahaan dalam proses produksinya dapat memperoleh suatu keuntungan.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Fungsi objektif dengan waktu kegalalan sistem yang independen dan berdistribusi identik adalah

$$Z(p) = \frac{b}{\gamma} - C(p) - (C(p) + H)h^{*}(\gamma, p)$$

   Nilai $Z(p)$ diperoleh dari biaya pendapatan dibagi dengan suku bunga, kemudian dikurangi dengan biaya pengeluaran, dikurangi dengan biaya perbaikan. Di mana biaya perbaikan adalah perkalian antara jumlah dari biaya pengeluaran dan suatu kontanta dengan model renewal suatu sistem yang bergantung dengan suku bunga dan variabel acak p.

2. Fungsi objektif yang terkait dengan sifat asimtotik proses renewal adalah

$$Z(p) = \frac{b}{\gamma} - C(p) - (C(p) + H)\frac{1}{\gamma\mu(p)}$$

   Dari persamaan di atas, $Z(p)$ senilai dengan nilai positif dari biaya pendapatan yang dibagi dengan suku bunga, kemudian dikurangi dengan biaya pengeluaran, dikurangi dengan penjumlahan dari biaya pengeluaran dan suatu konstanta yang dibagi dengan suku bunga dikali rata-rata waktu kegagalan sistem dengan variabel acak (p).

3. Fungsi objektif pada contoh aplikasi adalah

$$Z(p) = \frac{b}{\gamma} - C(p) - (C(p) + H)\frac{\lambda(p)}{\gamma}$$

Dari fungsi objektif di atas, terlihat bahwa nilai $Z(p)$ diperoleh dari biaya pendapatan dibagi dengan suku bunga, dikurangi biaya pengeluaran, dan dikurangi dengan perkalian antara laju kerusakan dengan biaya pengeluaran yang ditambah dengan suatu konstanta, kemudian dibagi dengan suku bunga.

Dari ketiga fungsi objektif yang diperoleh, nilai dari fungsi objektif $Z(p)$ dengan asumsi bahwa biaya pendapatan bernilai konstan dengan faktor diskon sebesar γ, ketiganya memiliki nilai positif pendapatan dibagi dengan suku bunga, kemudian dikurangi dengan biaya pengeluran, kemudian dikurangi dengan perkalian antara jumlah biaya pendapatan dan suatu konstanta dengan model renewal kegagalan sistem. Model renewal sistem merupakan hal yang menjadi pembeda diantara kesimpulan di atas, model renewal bergantung kepada distribusi peluang kegagalan sistem dan nilai asimtot proses renewal.

4.2 Saran

1. Pada pembahasan skripsi ini, waktu antar kegagalan sistem saling independen dan waktu-waktu antar kegagalan terdistribusi secara identik. Disarankan kepada peneliti selanjutnya untuk mencari model renewal apabila waktu antar kegagalan tidak independen dan tidak identik.

2. Pada pembahasan skripsi ini, diasumsikan bahwa kerusakan sistem berdistribusi eksponensial. Disarankan kepada peneliti selanjutnya untuk menggunakan distribusi lain selain distribusi eksponensial, misalkan distribusi gamma.

DAFTAR PUSTAKA

Desilina, Rina. 2009. *Distribusi Probabilitas Proses Berada pada Keadaan tertentu dalam Suatu Proses Stokastik*. Jakarta: Universitas Negeri Jakarta.

Kellison, Stephen G. 1991. *The Theory of Interest*. Edisi ke-2. Boston: Richard D. Irwn, Inc.

Rackwitz, Rudiger, Optimizing Systematically Renewed Structures, *Reliability Engineering and System Safety Vol. 73: 269-279*. 2001.

Ross, Sheldon M. 2010. *Introduction to Probability Model*. Edisi ke-10. California: Academic Press.

Spiegel, Murray R. 1965. *Schaum's Outline: Laplace Transform*. New York: McGraw-Hill.

Sudarno, Taksiran Jumlah Gagal pada Renewal untuk Waktu Kontinu dan Diskrit,*Jurnal Sains dan Matematika (JSM) Vol 16 No. 1*. 2008. http://eprints.undip.ac.id/39142/ (diakses: 14 November 2016, pukul 12:56)

Sudaryatno, Sudirham. 2013. https://sudaryn.files.wordpress.com/2013/11/iii-2-transformasi-laplace.pdf (diakses: 30 November 2016, pukul 02:35)

Vaaler, L.J.F dan Daniel, J.W. 2009. *Mathematical Interest Theory*. Edisi ke-2. Texas: The Mathematical Association of America.

http://repository.usu.ac.id/bitstream/123456789/27916/4/Chapter20II.pdf (diakses: 27 November 2016)

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama	:	Dwi Agustina
No. Registrasi	:	3125121974
Jurusan	:	Matematika
Program Studi	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul "**Analisis Fungsi Objektif Suatu Sistem**" adalah :

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, 14 Februari 2017

Yang membuat pernyataan

Dwi Agustina

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Dwi Agustina. Lahir di Jakarta, 03 Agustus 1994. Anak kedua dari pasangan Bapak Suwondo dan Ibu Sami. Saat ini bertempat tinggal di Jalan Panjang RT 004/ RW 03 No. 07, Jakarta Barat 11560.

No. Ponsel	:	083872524468
Email	:	dwigustin03@gmail.com

Riwayat Pendidikan : Penulis mengawali pendidikan di TK An Nurmaniyah selama satu tahun, dan kemudian melanjutkan pendidikan di SDN Sukabumi Selatan 06 Pagi pada tahun 2000-2006. Setelah itu, penulis melanjutkan ke SMP Negeri 66 Jakarta hingga tahun 2009. Kemudian kembali melanjutkan ke SMA Negeri 47 Jakarta dan lulus tahun 2012. Di Tahun yang sama penulis melanjutkan ke Universitas Negeri Jakarta (UNJ), Jurusan Matematika, Program Studi Matematika melalui jalur SNMPTN Tulis. Di awal tahun 2017 penulis telah memperoleh gelar Sarjana Sains untuk Program Studi Matematika, FMIPA, UNJ.

Riwayat Organisasi : Selama di bangku perkuliahan, penulis aktif di berbagai organisasi kemahasiswaaan. Dalam satu tahun pertama, penulis mendapat kepercayaan sebagai Staf Bendahara BEMJ Matematika. Pada tahun kedua, penulis mengikuti organisasi ekstra kampus yakni Himpunan Mahasiswa Islam.

Riwayat Pekerjaan : Penulis mulai menjadi pengajar matematika sejak akhir tahun 2014. Pada bulan Agustus 2015, mengikuti Praktek Kerja Lapangan di PT ASABRI (Persero). Kemudian tahun 2016, penulis menjadi korektor matematika di Erlangga Digital Selama 2 bulan.