BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini, akan dibahas mengenai tahapan pemodelan Matematika, komponen-komponen pegas, persamaan differensial beserta jenisnya, dan Metode Transformasi *Laplace*. Sebagai awalan, akan dijelaskan mengenai dasar sistem kendali dan jenis-jenis model dalam sistem kendali.

2.1 Sistem Kendali (*Controlled System*)

Sistem kendali merupakan sistem yang bertugas sebagai energi yang meng-*handle* cara kerja suatu alat, mesin, ataupun benda (Wellstead, 1979). Sistem kendali ada banyak jenisnya, di antaranya adalah elektronika, hidrolik, pneumatik, magnetik, termal, dan pegas. Biasanya analis sistem kendali menginterpretasikan model sistem sebagai abstraksi dari Matematika dalam bentuk persamaan differensial.

Secara umum, model untuk sistem kendali dinamakan Model Dinamika yang memiliki sepasang persamaan differensial atau persamaan transformasi. Ada 2 bentuk dasar dari model dinamika:

1. Model Analisis Dinamika

   Model diperoleh dengan cara menganalisis sistem fisis dari dasar, melibatkan pendekatan yang cukup untuk menyederhanakan model menjadi bentuk persamaan differensial.

2. Model Identifikasi Dinamika

   Model diperoleh dengan cara statistik dari perilaku sistem fisis yang telah diobservasi. Model hampir serupa dengan Model Analisis Dinamika. Perbedaannya hanya pada bagaimana cara memperoleh persamaan geraknya.

Langkah dasar dalam sistem kendali adalah : pemodelan, desain pengendali, dan validasi pengendali. Setelah memodelkan, buat desain pengendali sistemnya. Setelah itu, lakukan validasi sistem kendali apakah sudah memenuhi atau model yang dibentuk sesuai dengan sistem fisis melalui simulasi. Begitu seterusnya.

Karena sistem kendali akan diinterpretasikan dalam bentuk persamaan differensial, maka subbab selanjutnya akan dibahas mengenai pengertian Persamaan Differensial dan jenis persamaan differensial yang akan digunakan.

2.2 Persamaan Differensial

Persamaan differensial sudah tidak asing lagi dalam Matematika, karena dibidang manapun dapat ditemukan dengan mudah. Pada subbab ini akan dipaparkan definisi dari persamaan differensial. Untuk jenis persamaan differensial yang digunakan akan dikonsentrasikan pada orde dua saja.

2.2.1 Definisi Persamaan Differensial

Persamaan Differensial (*differential equation*) adalah persamaan yang mempunyai satu atau lebih turunan dari sebuah fungsi yang tidak diketahui. Khususnya, persamaan yang berbentuk

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, ., y^{(n)}) = 0$$

dengan $y^{(k)}$ melambangkan turunan y yang ke-k terhadap x, dan disebut sebagai persamaan biasa orde n (*ordinary differential equation of order* n)(Purcell, 2003). Contoh-contoh orde 1, 2, dan 3 adalah :

$$y' + 2\sin x = 0$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} + (\frac{dy}{dx})^2 - e^x = 0.$$

Jika, ketika $f(x)$ disubstitusikan untuk y pada persamaan, persamaan yang dihasilkan adalah sebuah identitas untuk seluruh x pada suatu selang, maka $f(x)$ disebut solusi (*solution*) dari persamaan tersebut. Jadi, $f(x) = 2\cos x + 10$ adalah solusi untuk $y' + 2\sin x = 0$ karena

$$f'(x) + 2\sin x = -2\sin x + 2\sin x = 0$$

untuk seluruh x. $2\cos x + C$ disebut sebagai solusi umum (*general solution*) dari persamaan tertentu, karena dapat ditunjukkan bahwa setiap solusi dapat ditulis dalam bentuk ini. Sebaliknya, $2\cos x + 10$ disebut solusi khusus (*particular solution*) dari persamaan tersebut.

Untuk lebih spesifik lagi dalam membentuk model sistem pegas massa, jenis persamaan differensial yang harus digunakan ada 2, yaitu persamaan differensial linier homogen dan nonhomogen.

1. Persamaan Differensial Linier Homogen memiliki bentuk umum sebagai berikut:

   $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$

2. Persamaan Differensial Linier NonHomogen memiliki bentuk umum sebagai berikut:

   $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = k(x)$

Persamaan Differensial Linier Homogen digunakan untuk pegas yang tidak diberikan gaya luar, sedangkan Persamaan Differensial Linier Non Homogen digunakan untuk pegas yang diberikan gaya luar.

Setelah memahami perbedaan persamaan differensial linier homogen dan tak homogen, selanjutnya adalah memahami persamaan dengan orde yang lebih sedikit, yaitu orde dua, karena menyangkut kecepatan dan percepatan yang dinotasikan masing-masing adalah turunan pertama dan kedua perubahan panjang terhadap waktu. Berikut adalah subbab yang membahas persamaan differensial orde kedua.

2.2.2 Persamaan Differensial Linier Orde Kedua

Persamaan yang digunakan pada tulisan ini adalah persamaan linier orde dua. Persamaan linier orde kedua (dalam bentuk non homogen) mempunyai bentuk

$$a_0 y'' + a_1(x) y' + a_2 y = k(x).$$

Akan dibuat dua asumsi penyederhanaan, yaitu (1) $a_1(x)$ dan $a_2(x)$ adalah konstanta, dan (2) $k(x)$ identik dengan nol. Jadi, hal pertama yang akan dilakukan adalah untuk menyelesaikan

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Sebuah persamaan dengan $k(x) = 0$ dikatakan bersifat homogen (*homogenous*) atau persamaan di atas merupakan Persamaan Differensial Linier orde dua Homogen.

Untuk menyelesaikan persamaan orde pertama diperlukan satu integral yang akan menghasilkan solusi umum dengan satu konstanta sebarang. Secara analogi, diharapkan bahwa penyelesaian persamaan orde kedua memerlukan dua integral sehingga solusi umumnya akan mempunyai dua konstanta. Persamaan linier homogen orde kedua memang selalu mempunyai dua solusi dasar $u_1(x)$ dan $u_2(x)$, yang berdiri sendiri atau tidak bergantung (*independent*) satu sama lain (yaitu, tidak satupun dari kedua fungsi tersebut merupakan kelipatan konstanta dari persamaan lainnya). Berdasarkan kelinearan operator $D^2 + a_1 D + a_2$,

$$C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)$$

juga merupakan solusi. C_1 dan C_2 merupakan suatu konstanta untuk solusi umum dan berdampingan dengan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ yang merupakan solusi dasar berdasarkan akar-akar karakteristik sebagai berikut.

1. Jika akar-akar karakteristik homogen, solusi umumnya : $y = C_1 e^{nx} + C_2 x e^{nx} + ... + C_n x^n e^{nx}$ dengan n sebagai akar karakteristik,

2. Jika akar-akar karakteristik nonhomogen, solusi umumnya : $y = C_1 e^{nx} + C_2 e^{mx}$ dengan n dan m sebagai akar-akar karakteristik nonhomogen (apabila terdapat 3 atau lebih akar karakteristik yang berbeda, berlaku cara yang sama sebanyak akar yang diperoleh),

3. Jika akar-akar karakteristik imajiner, solusi umumnya : $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ dengan $\alpha \pm \beta i$ sebagai akar karakteristik imajiner.

Apabila akar-akar karakteristik merupakan kombinasi dari poin 1, 2, dan 3, solusi umumnya juga merupakan kombinasi dari poin 1, 2, dan 3. Di samping itu, dapat ditunjukkan bahwa setiap solusi mempunyai bentuk demikian. Namun, solusi tersebut merupakan bentuk umum untuk solusi Persamaan Differensial Linier Homogen.

Untuk mendapatkan solusi umum dari persamaan differensial homogen (dalam kasus pegas biasanya berakar karakteristik bilangan imajiner), bisa dilihat pada contoh berikut.

Contoh 1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

$(D^2 + 1)y = 0$

$D^2 + 1 = 0$

$D^2 = -1$

$D = \pm\sqrt{-1}$

$D = \pm i$

Karena akar karakteristik imajiner, maka solusi umumnya adalah

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Sedangkan untuk mendapatkan solusi umum dari persamaan differensial Tak Homogen, akan dicari dahulu solusi homogennya dengan cara serupa dengan solusi umum Persamaan Differensial Linier Orde Dua Homogen. Karena bentuk persamaan differensial non homogen, harus dicari pula solusi pelengkap. Solusi pelengkap didapatkan dengan Metode Koefisien Tak Tentu seperti pada Tabel 2.1 di bawah ini.

Tabel 2.1: Solusi Pelengkap untuk Persamaan Differensial Linier Non Homogen (Sumber : AZ (2015) halaman 2)

$f(x)$	y_p
x^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_1 x + A_0$
$e^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$
$xe^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x}$
$\sin \alpha x$	$A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$
$\cos \alpha x$	$A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan Contoh 2 berikut.

Contoh 2. $y'' - 2y' - 3y = \cos 2x$

Solusi umum persamaan tak homogen secara umum adalah

$$y = y_c + y_p$$

dengan y_c adalah solusi umum persamaan homogen dan y_p solusi umum pelengkap. Dengan menggunakan operator linier D, untuk solusi umum persamaan homogen, maka didapat:

$(D^2 - 2D - 3)y = 0$

$D^2 - 2D - 3 = 0$

$(D + 1)(D - 3) = 0$

Sehingga y_c diperoleh:

$$y_c = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

Untuk solusi umum pelengkap, langkahnya adalah:

$y_p = B\cos 2x + C\sin 2x$ (Dengan metode koefisien tak tentu: $\sin \alpha x = A\cos \alpha x + B\sin \alpha x$ dan $\cos \alpha x = A\sin \alpha x + B\cos \alpha x$)

$Dy_p = -2B\sin 2x + 2C\cos 2x$

$D^2 y_p = -4B\cos 2x - 4C\sin 2x$

Kemudian substitusi y_p dan turunan-turunannya ke persamaan differensial tersebut sehingga menghasilkan

$$(-7B - 4C)\cos 2x + (4B - 7C)\sin 2x = \cos 2x$$

Dengan demikian, $-7B - 4C = 1$ dan $4B - 7C = 0$, yang mengimplikasikan bahwa $B = -\dfrac{7}{65}$ dan $C = -\dfrac{4}{65}$. Maka solusi umum persamaan tak homogen adalah

$$y = -\frac{7}{65}\cos 2x - \frac{4}{65}\sin 2x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

Setelah memahami konsep tentang Persamaan Differensial dan Persamaan Differensial Linier Orde Dua Homogen dan Nonhomogen, selanjutnya adalah berangkat pada Sistem Pegas Massa karena terdapat Persamaan Umum Sistem Pegas yang menggunakan jenis Persamaan Differensial Linier Orde Dua.

2.3 Sistem Pegas Massa

Pada subbab ini, akan dijelaskan dasar dari sistem pegas massa. Dalam hal ini, posisi sistem pegas massa diletakkan secara vertikal dan tanpa peredam.

2.3.1 Sistem Pegas Massa Vertikal

Sistem pegas massa adalah kondisi dimana terdapat massa menggantung di ujung pegas (untuk posisi vertikal), yang gaya untuk kembali ke posisi awalnya sama dengan k kali pertambahan panjang dari keadaan setimbang (French, 1971), atau menurut hukum *Hooke* formulanya adalah (Dwiyantoro, 2011):

$$F = k \cdot \Delta x, \tag{1}$$

dengan :

F = gaya tarik (Newton)

k = konstanta pegas (Newton/m)

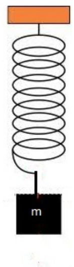
Δx = pertambahan panjang pegas (m).

Pertambahan panjang pegas sebanding dengan gaya tarik yang dikenakan pada pegas sebelum melampaui batas elastisitas pegas. Batas elastisitas pegas diketahui dari nilai modulus *Young*. Modulus *Young* adalah nilai tegangan maksimal yang dimiliki suatu benda. Nilainya bergantung pada bahan utama benda tersebut. Tabel Modulus *Young* untuk beberapa macam bahan pada benda adalah sebagai berikut.

Tabel 2.2: Nilai Modulus *Young* pada beberapa bahan utama benda

Bahan	Modulus	*Young*
	10^{12} dyn cm$^{-}2$	10^{6} lb in$^{-}2$
Alumunium	0.7	10
Kuningan	0.91	13
Tembaga	1.1	16
Gelas	0.55	7.8
Besi	0.91	13
Timah	0.16	2.3
Nikel	2.1	30
Baja	2	29
Tungsten	3.6	51

Nilai Modulus *Young* pada Tabel 2.2 memiliki satuan yang berbeda. Namun, dalam satuan SI (Standar Internasional), satuan yang digunakan adalah $lb\ in^{-2}$ (*Libra per Square Inch*) atau satu pon per kaki kuadrat. 1 lb sama dengan $4,45$ Newton. Sedangkan 1 dyn sama dengan 10^{-5} Newton. Untuk sistem pegas massa vertikal diilustrasikan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1: Sistem Pegas Massa Vertikal

Dalam mengidentifikasi sistem pegas massa, umumnya ada 2 komponen penting yang diperhatikan dalam mengembangkan osilasinya. Osilasi adalah seberapa besar pegas bergerak dan bergetar dalam satuan kecepatan sudut (ω) dan dinyatakan dalam fungsi *sinus* atau *cosinus*. Hasil tersebut disebut sebagai bentuk sinusoidal. Contoh bentuk sinusoidal adalah $A \sin \omega t$ atau $A \cos \omega t$ dengan A adalah amplitudo yang merupakan nilai maksimum atau puncak dari suatu gelombang *sinus*. Kedua komponen penting yang diperhatikan adalah :

1. Komponen inersia, digunakan untuk membawa energi kinetik.

2. Komponen elastis, digunakan untuk menyimpan energi potensial elastisitas.

Dengan mengasumsikan hukum *Hooke* di persamaan (1), akan peroleh energi potensial yang proporsional terhadap kuadrat dari pertambahan panjang dari keadaan setimbang. Energi Potensial adalah usaha yang dimiliki benda berdasarkan ketinggian tempat dimana benda tersebut berada dari keadaan setimbang atau diam hingga perubahan jarak tertentu. Kemudian, asumsikan juga seluruh inersia sistem terpusat pada massa yang ada di ujung pegas, maka akan diperoleh energi kinetik yang sama dengan $\frac{mv^2}{2}$, dimana v adalah kecepatan massa tersebut. Energi Kinetik merupakan usaha suatu benda untuk bergerak dimulai dari keadaan diam hingga mencapai kecepatan tertentu. Sedangkan inersia adalah kecenderungan semua benda fisik untuk menolak perubahan keadaan tertentu, misalnya ketika didorong agar perubahan letak terjadi, namun benda memiliki kemampuan untuk menolak perpindahan tempat dari titik awalnya.

Selanjutnya, keadaan-keadaan tersebut dapat dituliskan menjadi 2 persamaan, yaitu:

1. Dengan hukum *Newton* $\{F = ma\}$, $kx = ma$, dengan a adalah percepatan benda.
2. Dengan memperhatikan energi mekanik total (E), $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$

Misalkan ada suatu pegas sederhana yang menggantung pada suatu permukaan datar, seperti pada Gambar 2.1. Kemudian pada bagian bawah pegas kita berikan beban berupa massa m. Asumsikan beban memiliki massa yang sangat besar. Jika kita tarik beban ke bawah, lalu dilepas, maka pergerakan pegas terjadi secara vertikal. Untuk menentukan modelnya, mengacu pada hukum kedua *Newton* yang berbunyi: Gaya yang terjadi pada suatu benda adalah hasil kali dari massa dikali percepatan, atau:

$$F = ma = mx'' \qquad (2)$$

dengan x'' turunan kedua dari perubahan panjang x terhadap waktu yang artinya sama dengan percepatan a, atau $\frac{d^2x}{dt^2}$, m adalah massa benda dan F adalah resultan gaya pada pegas. Misalkan gaya ke arah bawah adalah arah yang positif. Dalam keadaan setimbang, terdapat beban di bawah pegas, sehingga pegas bertambah panjangnya sebesar s_0 akibat gaya gravitasi dan besar massa yang dimiliki beban. Kemudian pegas ditarik dan menegang, akibatnya massa berpindah posisi dari keadaan setimbang ke suatu panjang tertentu, hal inilah yang dinamakan usaha W dari beban tersebut. Jadi, usaha yang dikeluarkan adalah hasil kali dari massa dikali percepatan gravitasi atau:

$$W = mg. \tag{3}$$

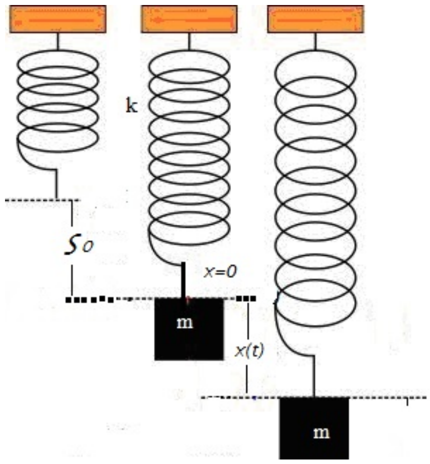
dengan m adalah massa beban dan g adalah percepatan gravitasi (10 m/s^2). Setelah diberikan usaha, maka akan ada keadaan dimana pegas akan kembali lagi keatas dengan melakukan peregangan atau dilepas setelah diberi tegangan. Inilah yang disebut gaya pada pegas di persamaan (1). Namun, karena arahnya ke atas, maka nilai gaya negatif. Pada keadaan seperti ini, pegas melakukan gaya pemulih (*Restoring Force*) yaitu mengembalikan keadaan semula kembali ke titik setimbang. Jika kita melihat kembali pada persamaan (1) dan (3), keseimbangan yang terjadi adalah:

$$kx = mg. \tag{4}$$

dengan ruas kiri adalah gaya pegas dan ruas kanan adalah usaha dari beban. Selanjutnya, dalam keadaan normal, berlaku pula hukum kedua *Newton* di persamaan (2). Keadaan normal adalah keadaan dimana sistem pegas bergerak lurus beraturan. Sehingga bila kita kaitkan hukum kedua *Newton* dengan persamaan (4) menjadi:

$$F = ma = -kx + mg = -kx + mx''. \tag{5}$$

Persamaan di atas merupakan persamaan untuk gerak harmonik sederhana, yaitu massa yang bergerak akan berosilasi atau bergetar membentuk gelombang sinusoidal secara vertikal disekitar posisi setimbang pegas. Dari penjelasan di atas, ilustrasinya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.2: Posisi Gerakan Massa Sekitar Titik Setimbang

Sistem pegas vertikal juga memiliki faktor peredam. Dalam hal ini, pegas tidak memiliki faktor peredam. Selanjutnya akan dibahas mengenai model untuk sistem pegas massa tak teredam.

2.3.2 Sistem Pegas Massa Vertikal Tak Teredam

Secara umum, sistem pegas memiliki bentuk persamaan differensial orde dua sebagai berikut :

$$f(x) = ay'' + by' + cy \tag{6}$$

Namun, apabila tanpa gaya luar, $f(x)$ akan bernilai 0, sehingga persamaannya menjadi :

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{6a}$$

Sehingga secara umum, persamaan sistem pegas massa adalah sebagai berikut (Rudnick, 2012):

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = 0 \tag{6b}$$

dengan:

m = Massa (kg)

γ = koefisien peredam (N s/m)

k = konstanta pegas (N/m).

Persamaan di atas merupakan bentuk dari PD orde 2 Homogen. Peredam yang dimaksud adalah penghambat yang berasal dari gesekan dengan udara atau gaya gesek antara massa dengan udara. Namun, apabila sistem pegas massa tak ada peredaman atau gaya gesek dengan udara diabaikan, maka $\gamma = 0$, dan persamaan (6b) menjadi

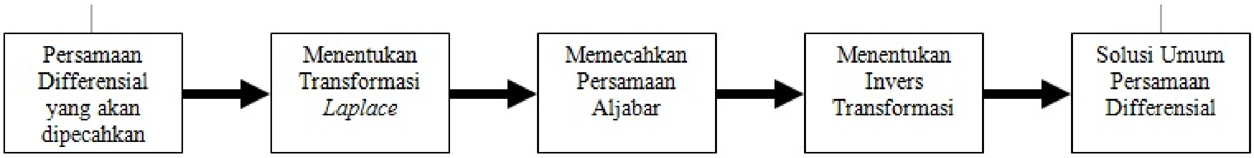
$$mu''(t) + ku(t) = 0. \tag{6c}$$

Persamaan differensial ini dapat diselesaikan dengan Transformasi *Laplace* yang akan dibahas secara detail di subbab Transformasi *Laplace*.

Setelah memahami konsep dari sistem pegas massa dan persamaan umumnya, selanjutnya akan dijelaskan Metode Transformasi *Laplace* yang digunakan untuk memecahkan Solusi MNA persamaan differensial.

2.4 Transformasi *Laplace*

Untuk mengawali pembahasan seputar Transformasi *Laplace*, akan dipaparkan terlebih dahulu pengertian dari Transformasi *Laplace*. Setelah itu, bergeser ke metode-metode perhitungan yang diperlukan dalam mencari nilai awal persamaan differensial. Alur pengerjaan Transformasi *Laplace* secara keseluruhan dapat digambarkan melalui bagan di bawah ini.



Gambar 2.3: Alur Pengerjaan Transformasi *Laplace*
(Sumber : Finan (2013) halaman 3)

2.4.1 Pengertian Transformasi *Laplace*

Definisi dari Transformasi *Laplace* adalah:

Definisi 1. Misalkan $f(t)$ adalah fungsi bijektif $f : [0, \infty) \to (-\infty, \infty)$ dengan domain himpunan nonnegatif terhadap himpunan bilangan kompleks (Sudarno, 2015) pada $[0, \infty)$, terdefinisi pada $t \geq 0$. Transformasi *Laplace* dari f adalah fungsi F didefinisikan dengan integral:

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{7}$$

jika integralnya ada untuk suatu bilangan kompleks s dengan $Re(s) > 0$ adalah bagian riil bilangan kompleks s. Integral yang didefinisikan dalam Transformasi *Laplace* adalah integral tak wajar atau integral dengan limit tak terhingga. Integral tak wajar bisa konvergen atau divergen, tergantung pada integrannya atau hasil dari integralnya. Ketika integral tak wajar dari fungsi $f(t)$ konvergen, maka fungsi tersebut memiliki Transformasi *Laplace*, sehingga kekonvergenan adalah suatu jaminan untuk suatu fungsi dapat di Transformasi (Finan, 2013). Transformasi *Laplace* dari f dinotasikan oleh F dan $\mathcal{L}f$.

Perhatikan bahwa integral pada persamaan (7) sedikit kurang tepat. Persisnya adalah:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt := \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-st} f(t)dt$$

dimana limitnya ada (Nagle, 2003).

Transformasi *Laplace* mengubah integral dan persamaan differensial menjadi persamaan aljabar yang mudah diselesaikan. Metode ini juga berguna untuk fungsi sinusoidal seperti amplitudo, dan frekuensi sudut.

Transformasi *Laplace* memiliki sifat kelinieran. Berikut ini adalah teorema untuk kelinieran Transformasi *Laplace*.

Teorema 1. Misalkan f, f_1, dan f_2 fungsi yang Transformasi *Laplace*-nya ada untuk $s > \alpha$ dan misalkan c adalah konstanta. Maka, untuk $s > \alpha$,

$$\mathcal{L}\{f_1 + f_2\} = \mathcal{L}\{f_1\} + \mathcal{L}\{f_2\} \tag{8}$$

$$\mathcal{L}\{cf\} = c\mathcal{L}\{f\} \tag{9}$$

Bukti: Dengan menggunakan kelinieran dari integrasi, kita memiliki $s > \alpha$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1 + f_2\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}[f_1(t) + f_2(t)]dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) + \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) \\ &= \mathcal{L}\{f_1\}(s) + \mathcal{L}\{f_2\}(s) \end{aligned}$$

Sehingga, persamaan (8) terpenuhi. Dengan cara yang sama, pada persamaan (9), kita peroleh

$$\mathcal{L}\{cf\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}[cf(t)]dt = c\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = c\mathcal{L}\{f\}(s).$$

Sehingga demikian Teorema 1 terbukti. ■

Dalam melakukan Transformasi *Laplace*, tidak semua bentuk persamaan differensial linier, baik yang homogen maupun yang nonhomogen memiliki hasil Transformasi *Laplace* yang sama. Untuk itu, dalam melihat perbedaannya, hasil Transformasi-Transformasi *Laplace* dari fungsi-fungsi yang biasanya digunakan atau muncul dalam setiap atau beberapa kasus Solusi Masalah Nilai Awal atau lain-lainnya, sudah tersusun pada Tabel 2.3, yang biasanya sering digunakan untuk memecahkan Solusi Masalah Nilai Awal pada Persamaan

Differensial Linier (baik yang homogen atau nonhomogen) dengan koefisien konstan.

Tabel 2.3: Tabel Singkat Transformasi *Laplace*
(Sumber : Nagle (2003) halaman 359)

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$
1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
$t^n,\ n = 1, 2, ..$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2},\ s > 0$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2},\ s > 0$
$e^{at}t^n,\ n = 1, 2, ...$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s > a$
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$

Dalam melakukan Transformasi *Laplace* terhadap suatu fungsi, ada kalanya ditemukan fungsi dalam bentuk Persamaan Differensial atau memiliki notasi turunan. Subbab berikut akan menjawabnya.

2.4.2 Turunan Transformasi *Laplace*

Turunan Transformasi *Laplace* berdasarkan Teorema 2 adalah sebagai berikut:

Teorema 2. Misalkan $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ dan asumsikan $f(t)$ kontinu di $[0, \infty)$ dan eksponensial orde α. Maka, untuk $s > \alpha$,

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}(s) \tag{10}$$

Karena $f(t)$ kontinu, mengindikasikan bahwa $f(t)$ memiliki turunan, dengan syarat limitnya ada dan konvergen (Bartle (2010)). Bukti: Perhatikan identitas dari

$$\frac{dF}{ds}(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Karena asumsi dari $f(t)$, kita dapat menerapkan aturan *Leibniz* untuk mengganti orde dari integrasi dan differensiasi:

$$\frac{dF}{ds}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = -\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s)$$

Sehingga,

$$\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = (-1)\frac{dF}{ds}(s)$$

Dengan $\frac{dF}{ds}(s)$ merupakan notasi lain dari *Laplace* turunan berorde 1. Hasil secara umum dari persamaan (10) memenuhi induksi terhadap n. ■

Turunan Transformasi *Laplace* memiliki sifat-sifat dasar yang bergantung pada bentuk persamaan yang dimiliki, dan juga bergantung pada orde keberapa turunan yang dimiliki persamaan tersebut. Berikut ini merupakan tabel yang berisi sifat-sifat dasar Transformasi *Laplace* untuk turunan-turunannya (Tabel 2.4).

Tabel 2.4: Tabel Sifat-Sifat Dasar Turunan Transformasi *Laplace* (Sumber : Nagle (2003) halaman 365)

Turunan *Laplace*
$\mathcal{L}\{f+g\} = \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\}$
$\mathcal{L}\{cf\} = c\mathcal{L}\{f\}$, untuk suatu konstanta c
$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathcal{L}(s-a)$
$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0)$
$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0)$
$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$
$\mathcal{L}\{t^nf(t)\}(s) = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}\{f\}(s))$

Setelah kita memperoleh hasil Transformasi *Laplace* untuk Persamaan Differensial Linier Homogen atau Nonhomogen atau Persamaan yang mengandung unsur turunan sehingga mengharuskan kita melakukan perubahan khusus yaitu Turunan Transformasi *Laplace*, akan ditentukan nilai awalan atau pada waktu setimbang dan inversnya untuk memperoleh Solusi Masalah Nilai Awal untuk Persamaan Differensial Linier Orde Dua, baik Persamaan Differensial Linier Orde Dua Homogen, maupun Persamaan Differensial Linier Orde Dua Nonhomogen.

2.4.3 Invers Transformasi *Laplace* dan Cara Memecahkan Solusi Nilai Awal

Diberikan fungsi $F(s)$, jika ada sebuah fungsi $f(t)$ yang kontinu dan monoton di $[0, \infty)$ dan memenuhi

$$\mathcal{L}\{f\} = F$$

maka dapat dikatakan $f(t)$ adalah invers transformasi *Laplace* dari $F(s)$ dan memiliki notasi $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$. Invers Transformasi *Laplace* ada dengan syarat $f(t)$ adalah fungsi injektif. Karena $f(t)$ kontinu dan monoton, maka inversnya juga kontinu dan monoton (Bartle (2010)).

Dalam Invers Transformasi *Laplace* juga berlaku kelinieran, yaitu:

Teorema 3. Asumsikan bahwa $\mathcal{L}^{-1}\{F\}, \mathcal{L}^{-1}\{F_1\}$, dan $\mathcal{L}^{-1}\{F_2\}$ ada dan kontinu di $[0, \infty)$ dan misalkan c konstanta, maka

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1 + F_2\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2\} \tag{11}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{cF\} = c\mathcal{L}^{-1}\{F\} \tag{12}$$

Bukti: sama dengan pembuktian pada persamaan (8) dan (9) ■

Selanjutnya adalah cara memecahkan solusi nilai awal dari persamaan yang telah ditransformasi.

Metode Transformasi *Laplace* memiliki tahapan-tahapan sebagai berikut:

1. Transformasikan secara *Laplace* pada persamaan di kedua sisi.

2. Gunakan sifat-sifat Transformasi *Laplace* dan kondisi awal untuk memperoleh persamaan untuk Transformasi *Laplace* dari solusi dan kemudian pecahkan solusi persamaan tersebut.

3. Tentukan invers Transformasi *Laplace* dari solusi tersebut dengan melihat pada Tabel Singkat Transformasi *Laplace* (Tabel 2.3).

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 3. Carilah solusi nilai awal dari:

$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t} \ ; \ y(0) = 2 \ ; \ y'(0) = 12.$$

Jawab:

Persamaan differensial $y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}$ akan dilakukan Transformasi *Laplace* seperti di bawah ini:

$$\mathcal{L}\{y'' - 2y' + 5y\} = \mathcal{L}\{-8e^{-t}\}.$$

Dengan menggunakan sifat kelinieran, hasil transformasi *Laplace* menjadi:

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) - 2\mathcal{L}\{y'\}(s) + 5\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{-8}{s+1}.$$

Misalkan $Y(s) := \mathcal{L}\{y\}(s)$. Hasil Transformasi *Laplace* pada persamaan differensial tersebut memiliki orde dua, sehingga berdasarkan Tabel 2.4, persamaannya menjadi:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'\}(s) &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 2, \\ \mathcal{L}\{y''\}(s) &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 2s - 12 \end{aligned}$$

Subtitusikan persamaan tersebut dan nilai awalnya ke persamaan $\mathcal{L}\{y''\}(s) - 2\mathcal{L}\{y'\}(s) + 5\mathcal{L}\{y\}(s) = \dfrac{-8}{s+1}$,maka didapatkan:

$$\begin{aligned} [s^2Y(s) - 2s - 12] - 2[sY(s) - 2] + 5Y(s) &= \frac{-8}{s+1} \\ (s^2 - 2s + 5)Y(s) &= 2s + 8 - \frac{-8}{s+1} \end{aligned}$$

$$[s^2Y(s) - 2s - 12] - 2[sY(s) - 2] + 5Y(s) = \frac{2s^2 + 10s}{s+1}$$
$$Y(s) = \frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)}$$

Kemudian, invers persamaan $Y(s)$ tersebut dengan sifat-sifat invers Transformasi *Laplace*, diperoleh persamaan :

$$y(t) = 3e^t \cos 2t + 4e^t \sin 2t - e^{-t}$$

yang merupakan solusi nilai awal untuk persamaan $y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}$.

Selain Contoh 3, akan dijabarkan pula dengan contoh dari persamaan (6c) dengan nilai koefisien peredam (γ) sama dengan 0.

Contoh 4. Lakukan Transformasi *Laplace* pada kedua sisi persamaan dengan menggunakan operator *Laplace* $\mathcal{L}$ dan dengan melihat Turunan *Laplace* pada Tabel 2.4 untuk turunan berorde 2 ($\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0)$), sehingga menjadi

$$0 = \mathcal{L}(0) = \mathcal{L}(mu'' + ku) = m(s^2\mathcal{L}u - su(0) - u'(0)) + k\mathcal{L}u.$$

Selanjutnya, pecahkan solusi untuk transformasi *Laplace*-nya terhadap u, dan substitusi nilai awal $u(0) = u_0$ dan $u'(0) = v_0$, diperoleh

$$\mathcal{L}u = \frac{m(su_0 + v_0)}{ms^2 + k} = \frac{su_0 + v_0}{s^2 + \frac{k}{m}}.$$

Kemudian, lakukan modifikasi persamaan sesederhana mungkin agar transformasi *Laplace* nya dapat dilihat pada Tabel 2.3:

$$\mathcal{L}u = \frac{su_0 + v_0}{s^2 + \frac{k}{m}} = u_0\frac{s}{s^2 + \frac{k}{m}} + v_0\frac{1}{s^2 + \frac{k}{m}} = u_0\frac{s}{s^2 + \frac{k}{m}} + \frac{v_0}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{s^2 + \frac{k}{m}}$$

dan dapat disimpulkan bahwa hasil invers transformasi *Laplace* adalah :

$$u(t) = u_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{v_0}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Persamaan yang telah ditransformasi berdasarkan Tabel 2.3, akan diperoleh bentuk turunan *Laplace*. Berikut ini akan dibahas bagaimana bentuk turunan Transformasi *Laplace*.

Pada beberapa kasus, akan ditemukan bentuk perkalian 2 fungsi dalam menghitung invers Transformasi *Laplace* yang mana disebut dengan istilah konvolusi. Selanjutnya akan dibahas mengenai pengertian konvolusi.

2.4.4 Konvolusi

Konvolusi merupakan bentuk fungsi integral dan digunakan untuk mencari invers dari perkalian 2 fungsi hasil Transformasi *Laplace*, seperti $H(s) = F(s)G(s)$. Definisinya sebagai berikut.

Definisi 2. Misalkan $f(t)$ dan $g(t)$ kontinu di $[0, \infty)$. Maka konvolusinya dinyatakan dalam $f * g$, didefinisikan oleh:

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t - v)g(v)dv$$

Definisi lain mengenai konvolusi adalah sebagai berikut(Finan, 2013):

Definisi 3. Konvolusi dari 2 fungsi skalar yang kontinu di setiap penggalannya, $f(t)$ dan $g(t)$ terdefinisi untuk $t \geq 0$ adalah integral dari

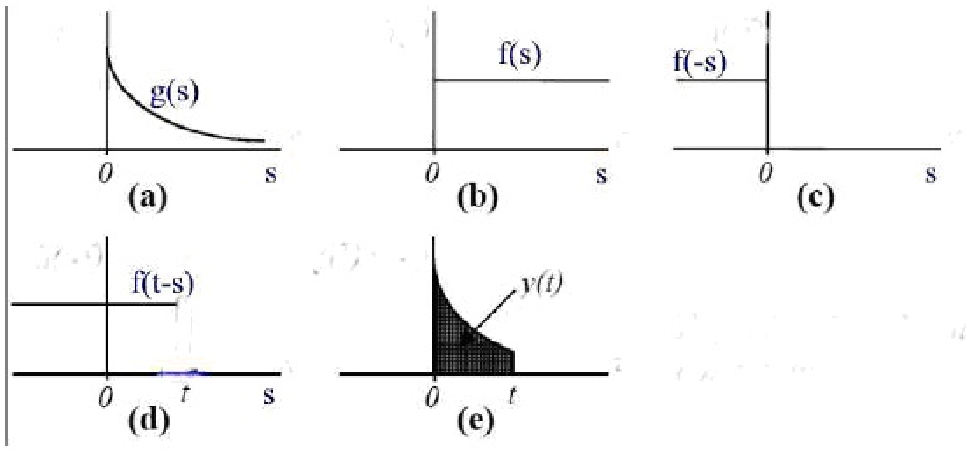
$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t - v)g(v)dv$$

Konvolusi dapat diinterpretasikan menggunakan grafik dengan tahapan sebagai berikut.

1. Diberikan suatu grafik $f(s)$ dan $g(s)$. (Gambar 2.4 (a))
2. Pemutarbalikan waktu $f(-s)$. (Gambar 2.4 (b))
3. Geser $f(-s)$ ke kanan sejauh t untuk memperoleh $f(t-s)$. (Gambar 2.4 (c))

4. Tentukan perkalian dari $f(t-s)g(s)$. (Gambar 2.4(d))

5. Tentukan luas daerah di bawah kurva $f(t-s)g(s)$ antara 0 dan t. (Gambar 2.4(e))



Gambar 2.4: Interpretasi Konvolusi melalui Grafik
(Sumber: Finan (2013) halaman 46)

Sifat-sifat konvolusi adalah sebagai berikut.

Teorema 4. Misalkan $f(t)$, $g(t)$, dan $h(t)$ kontinu di $[0, \infty)$, Maka:

$$f * g = g * f \tag{13}$$

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h) \tag{14}$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \tag{15}$$

$$f * 0 = 0 \tag{16}$$

Bukti:

- Untuk persamaan (13), dengan melihat Definisi 2, lalu ubah dalam bentuk $w = t - v$, diperoleh

$$(f * g)(t) := \int_t^0 f(w)g(t-w)(-dw) = \int_0^t g(t-w)f(w)(dw) = (g * f)(t). \quad \blacksquare$$

- Untuk persamaan (14), dapat diperoleh

$$\begin{aligned}(f * (g + h))(t) &= \int_0^t f(t - v)(g(v) + h(v))dv \\ &= \int_0^t f(t - v)g(v)dv + \int_0^t f(t - v)h(v)dv \\ &= (f * g)(t) + (f * h)(t). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

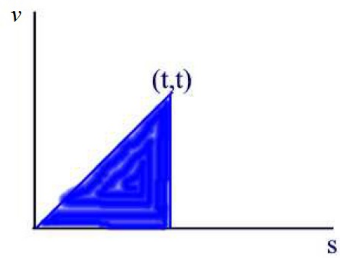
- Untuk persamaan (15), dapat diperoleh

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(t) &= \int_0^t (f * g)(t - v)h(v)dv \\ &= \int_0^t [\int_0^{t-v} f(t - v - w)g(w)h(v)dw]dv\end{aligned}$$

Untuk integral yang ada di dalam kurung siku, variabel w diubah menjadi $w = s - v$, sehingga diperoleh

$$((f * g) * h)(t) = \int_0^t [\int_v^t f(t - s)g(s - v)h(v)ds]dv.$$

Integral lipat dua tersebut ada dalam interval $(s, v) : 0 \leq v \leq s \leq t$ seperti daerah yang diarsir pada grafik berikut.



Gambar 2.5: Grafik Konvolusi dengan Interval $(s, v) : 0 \leq v \leq s \leq t$
(Sumber: Finan (2013) halaman 47)

Selanjutnya, akan dirubah urutan pengintegralannya, sehingga

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(t) &= \int_0^t [\int_0^s f(t - s)g(s - v)h(v)dv]ds \\ &= \int_0^t f(t - s)(g * h)(s)ds \\ &= (f * (g * h))(t). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

- Untuk persamaan (16),

$$(f * 0)(t) = \int_0^t f(t-v) \cdot (0)dv = \int_0^t 0dv = 0. \qquad \blacksquare$$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh 5. Carilah $f * g$ dengan $f(t) = e^{-t}$ dan $g(t) = \sin t$

Jawab:

Dengan menggunakan Definisi 2 dan sifat pada persamaan (13), diperoleh

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t e^{-t} \sin s ds \\ &= \frac{1}{2}[e^{-(t-s)}(\sin s - \cos s)]_0^t \\ &= \frac{e^{-t}}{2} + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t). \end{aligned} \qquad \blacksquare$$