BAB III

PEMBAHASAN

Sistem pegas massa dibuat dalam 3 model dengan asumsi yang berbeda-beda. Setiap kasus memiliki 3 persamaan, karena memperhatikan gaya yang bekerja pada setiap pegas serta perubahan koordinat titik kesetimbangan setiap massa. Untuk Model pertama, pegas memiliki 3 beban bermassa berbeda-beda, tetapi konstanta ketiga pegas bernilai sama. Model kedua, pegas memiliki 3 beban yang massanya sama, tetapi konstanta ketiga pegas nilainya berbeda-beda. Model ketiga, pegas memiliki 3 beban yang massanya berbeda-beda dan berkonstanta pegas yang berbeda pula.

Masing-masing model pegas akan dicari solusi masalah nilai awalnya (MNA) menggunakan syarat awal yang ditentukan pada saat setimbang atau $t = 0$. Solusi nilai awal model pegas berupa perubahan panjang pegas pada saat t.

Setelah memperoleh solusinya, akan dilihat bagaimana perilaku gerakan massa masing-masing model pegas. Perilaku gerakan massa berupa persamaan osilasi yang terdiri dari fungsi *sinus* atau *cosinus*. Ilustrasinya akan ditampilkan dalam bentuk grafik osilasi. Sebagai awalan, akan dibahas model pertama sistem pegas massa.

3.1 Solusi MNA dan Getaran Pegas Massa Nonhomogen dan Konstanta Homogen

Asumsikan massa m_1, m_2, dan m_3 bernilai berbeda, dan konstanta pegas k_1, k_2, dan k_3 bernilai sama. Setiap pegas memiliki keadaan berbeda ketika sedang bekerja. Pertama, akan ditelusuri Pegas 1 beserta penyusunan model dan bagaimana gaya yang terjadi.

Gaya yang dialami Pegas 1 ada 2, yaitu dalam keadaan setimbang berdasarkan hukum pertama *Newton* yang berarti resultan gaya ketiga pegas sama dengan 0 dan dalam keadaan umum atau memiliki percepatan yang berarti gaya massa pada Pegas 1 bergerak lurus beraturan (hukum kedua *Newton*). Massa Pegas 1 dihitung secara keseluruhan karena dibawah Pegas 1 bukan hanya terdapat Massa 1 saja, tetapi Pegas 2, Massa 2, Pegas 3, dan Massa 3 juga dihitung sebagai Massa Total 1 untuk Pegas 1. Selain itu, meskipun Pegas 2 dan Pegas 3 termasuk ke dalam massa total, kedua Pegas tetap dipertimbangkan gaya pegasnya. Massa total 2 Pegas 2 juga dihitung dari Massa 2, Pegas 3 sampai Massa 3. Sedangkan Pegas 3 hanya memiliki Massa 3 sebagai Massa Total 3. Maka dalam keadaan setimbang dapat dirumuskan dengan:

- $[-k_1s_1 + M_1g] + [k_2s_2 - M_2g] + [-k_3s_3 + M_3g] = 0$
- $[-k_1s_1+m_1g+p_2g+m_2g+p_3g+m_3g]+[k_2s_2-m_2g-p_3g-m_3g]+[-k_3s_3+m_3g] = 0$
- $-k_1s_1+m_1g+p_2g+m_2g-m_2g+p_3g-p_3g+m_3g-m_3g+k_2s_2-k_3s_3+m_3g = 0$
- $-k_1s_1 + m_1g + k_2s_2 + p_2g - k_3s_3 + m_3g = 0$

Didapatkan :

$$-k_1s_1 + m_1g + k_2s_2 + p_2g - k_3s_3 + m_3g = 0 \tag{17}$$

dengan:

M_1 = Massa Total 1 (kg)

M_2 = Massa Total 2 (kg)

M_3 = Massa Total 3 (kg)

k_1 = Konstanta Pegas 1 (Newton/m)

k_2 = Konstanta Pegas 2 (Newton/m)

k_3 = Konstanta Pegas 3 (Newton/m)

m_1 = Massa 1 (kg)

m_2 = Massa 2 (kg)

m_3 = Massa 3 (kg)

s_1 = Pertambahan panjang Pegas 1 oleh Massa 1 (m)

s_2 = Pertambahan panjang Pegas 2 oleh Massa 2 (m)

s_3 = Pertambahan panjang Pegas 3 oleh Massa 3 (m)

p_1 = Massa Pegas 1 (kg)

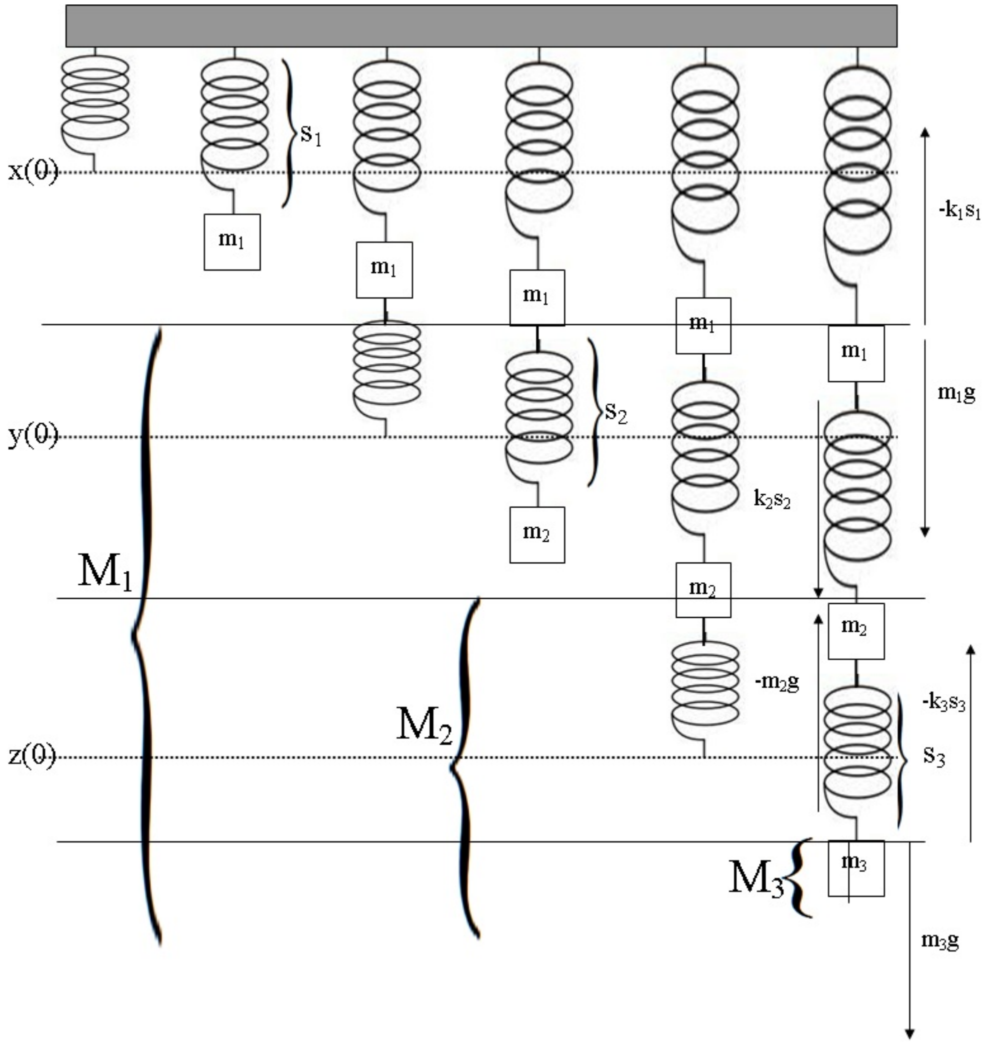
p_2 = Massa Pegas 2 (kg)

p_3 = Massa Pegas 3 (kg)

g = Percepatan gravitasi (m/s^2).

Tanda positif dan negatif pada gaya pegas menunjukkan arah gaya (dalam hal ini, arah ke atas adalah arah yang negatif). Resultan gaya pegas bernilai 0 dikarenakan adanya gaya pemulih (*Restoring Force*), yaitu dimana pegas kembali ke keadaan awalnya atau posisi semula. Pegas 1 mengalami gaya pegas dan mengalami pertambahan panjang karena adanya Massa 1. Selanjutnya Pegas 2 diberikan di bawah Massa 1. Massa 2 juga diberikan di bawah Pegas 2 sehingga Pegas 2 dan Pegas 1 mengalami pertambahan panjang. Selanjutnya Pegas 3 diberikan di bawah Massa 2 dan Massa 3 juga diberikan di bawah Pegas 3, sehingga Pegas 1 dan Pegas 2 kembali mengalami pertambahan panjang.

Pegas 1 akan mengalami gaya pegas ke atas, dan dipulihkan ke posisi setimbang oleh usaha dari Massa Total 1. Begitu juga dengan Pegas 2, akibat dari pergerakan Massa 1, Pegas 2 terdorong ke bawah dan dipulihkan oleh usaha dari Massa Total 2. Pegas 3 juga mengalami gaya pegas ke atas akibat pergerakan dari Massa 2 dan dipulihkan kembali ke posisi setimbang oleh usaha dari Massa Total 3. Sehingga pergerakan yang terjadi pada masing-masing pegas dan massa saling susul-menyusul arah. Hal ini yang mengakibatkan resultan gaya pegas sama dengan 0. Ilustrasi untuk Persamaan (17) adalah sebagai berikut.



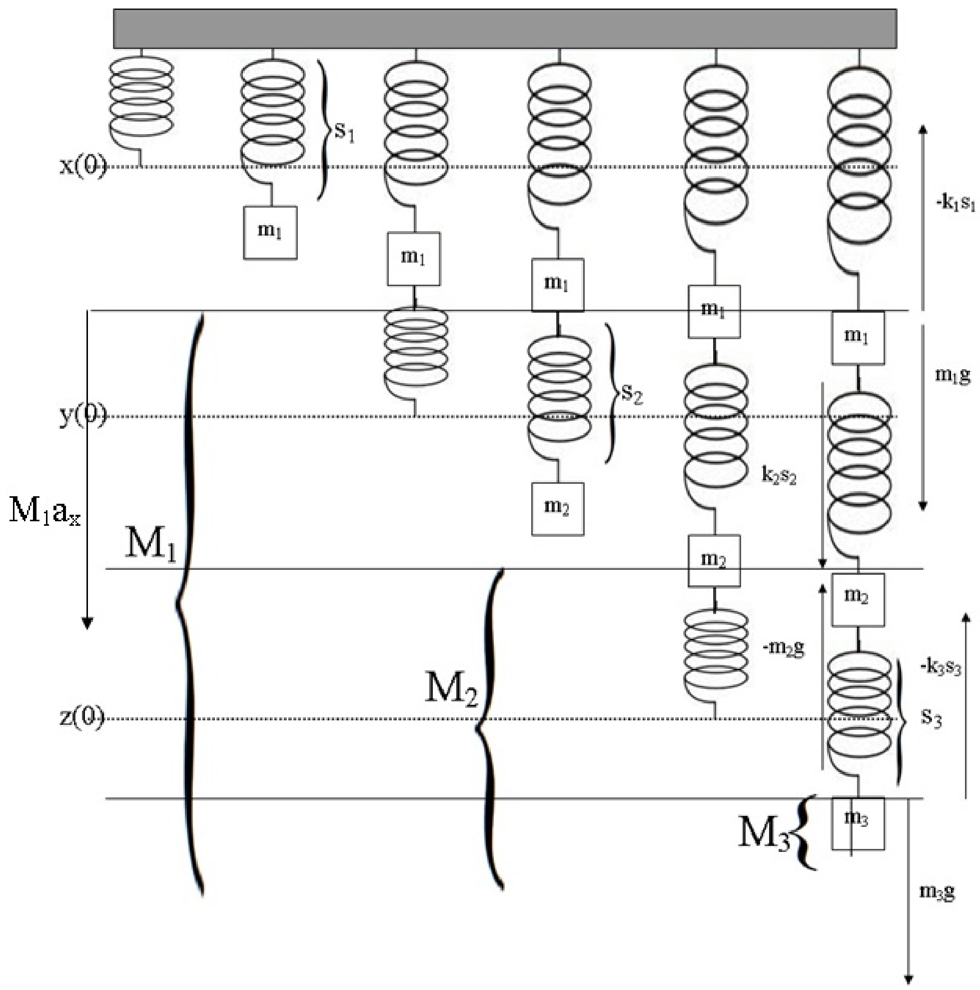
Gambar 3.1: Keadaan 1 dan Massa Total di bawah Pegas 1

Prinsip gaya pemulih pada sistem pegas sama dengan gaya yang terjadi ketika seseorang berada di dalam mobil. Ketika mobil dalam keadaan diam, orang tersebut juga masih dalam keadaan diam. Pada saat mobil berjalan, tubuhnya akan terdorong ke belakang, katakanlah arahnya negatif. Namun, ketika mobil direm mendadak, tubuhnya akan terdorong ke depan, berarti arahnya positif. Artinya, tubuh orang tersebut memiliki kemampuan mempertahankan posisi awalnya agar tidak mengalami perpindahan, atau tubuhnya bergerak dengan kecepatan tetap.

Kemudian, dalam keadaan umum, berdasarkan hukum kedua *Newton*, gaya Pegas 1 dapat dirumuskan dengan

$$\sum_{n=1}^{3} (F_n + W_n) = M_1 a_x. \tag{18}$$

Ilustrasi untuk Persamaan (18) adalah sebagai berikut.



Gambar 3.2: Keadaan 1 dan Arah Percepatan Pegas 1

Persamaan (18) adalah jumlah gaya ketiga pegas (F_n), disertai dengan usaha masing-masing massa total (W_n), yang berbanding lurus dengan hukum kedua *Newton* atau Massa Total 1 dikali percepatan Pegas 1 (a_x) atau turunan kedua dari $x(t)$. $x(t)$ merupakan panjang Pegas 1 pada saat t. Sehingga bila dikembangkan hasilnya adalah sebagai berikut.

- $\sum_{n=1}^{3}(F_n + W_n) = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)a_x$; $a_x = x''(t)$
- $\sum_{n=1}^{3}(F_n + W_n) = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$
- $F_1 + W_1 + F_2 + W_2 + F_3 + W_3 = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$
- $-k_1(s_1 + x(t)) + M_1 g + k_2(s_2 + y(t) - x(t)) - M_2 g - k_3(s_3 + z(t) - y(t) - x(t)) + M_3 g = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$
- $-k_1 s_1 + m_1 g + p_2 g + m_2 g + p_3 g + m_3 g + k_2 s_2 - m_2 g - p_3 g - m_3 g - k_3 s_3 + m_3 g - k_1 x(t) + k_2 y(t) - k_2 x(t) - k_3 z(t) + k_3 y(t) + k_3 x(t) = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$
- $(-k_1 s_1 + m_1 g + k_2 s_2 + p_2 g - k_3 s_3 + m_3 g) - k_1 x(t) + k_2 y(t) - k_2 x(t) - k_3 z(t) + k_3 y(t) + k_3 x(t) = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$

Berdasarkan Persamaan (17):

- $(-k_1 - k_2 + k_3)x(t) + (k_2 + k_3)y(t) - k_3 z(t) = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$
- $(m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t) - (-k_1 - k_2 + k_3)x(t) - (k_2 + k_3)y(t) + k_3 z(t) = 0$; $k_1 = k_2 = k_3 = k$
- $(m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t) + kx(t) - 2ky(t) + kz(t) = 0$
- $x''(t) + \dfrac{k}{m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3}x(t) - \dfrac{2k}{m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3}y(t) + \dfrac{k}{m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3}z(t) = 0$; $M_1 = m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3$
- $x''(t) + \dfrac{k}{M_1}x(t) - \dfrac{2k}{M_1}y(t) + \dfrac{k}{M_1}z(t) = 0$

Maka diperoleh persamaan untuk keadaan Pegas 1, yaitu:

$$x''(t) + \frac{k}{M_1}x(t) - \frac{2k}{M_1}y(t) + \frac{k}{M_1}z(t) = 0. \tag{19}$$

Selanjutnya, akan ditinjau gaya yang dialami Pegas 2. Gaya yang dialami Pegas 2 ada 3, yaitu dalam keadaan setimbang berdasarkan hukum pertama *Newton*, dalam keadaan umum (Hukum kedua *Newton*), dan gaya luar yang bekerja pada Massa 2. Maka dalam keadaan setimbang dapat dirumuskan dengan:

- $[-k_2 s_2 + M_2 g] + [k_3 s_3 - M_3 g] = 0$
- $[-k_2 s_2 + m_2 g + p_3 g + m_3 g] + [k_3 s_3 - m_3 g] = 0$
- $-k_2 s_2 + m_2 g + m_3 g - m_3 g + k_3 s_3 + p_3 g = 0$
- $-k_2 s_2 + m_2 g + k_3 s_3 + p_3 g = 0$

Didapatkan:

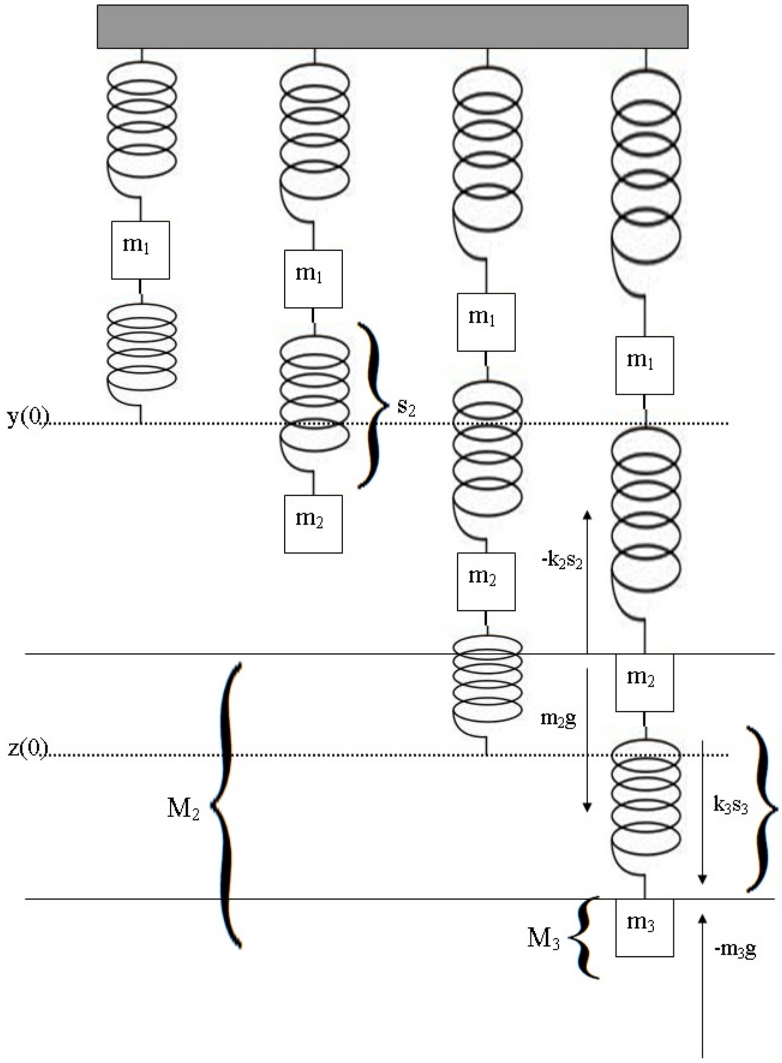
$$-k_2 s_2 + m_2 g + k_3 s_3 + p_3 g = 0. \tag{20}$$

Pada persamaan (20) tidak dilihat lagi pergerakan Pegas 1 karena akan difokuskan pada bagaimana keadaan fisis pada Pegas 2 dan benda lain di bawahnya saja. Pegas 2 mengalami gaya pegas ke atas setelah diberikan Massa 2 di bawahnya, kemudian dipulihkan ke posisi setimbang oleh usaha dari Massa 2. Kemudian di bawah Massa 2 diberikan Pegas 3 dan Massa 3 di bawah Pegas 3 sehingga Massa Total 2 adalah jumlah dari Massa 2, Massa Pegas 3, dan Massa 3.

Gaya Pegas 3 juga ditinjau meskipun merupakan bagian dari Massa Total 2 atau bagian dari sebuah massa. Pegas 3 mengalami gaya pegas ke bawah akibat dorongan dari usaha Massa 2 yang dipengaruhi oleh Pegas 2 ketika mengalami gaya pegas ke atas, dan dipulihkan oleh usaha Massa 3 ke posisi setimbang kembali. Hal ini mengakibatkan resultan gaya sama dengan 0.

Ilustrasi untuk Persamaan (20) digambarkan sebagai susunan pegas yang dimulai dari keadaan netral atau belum diberikan massa (dalam hal ini Pegas 2), sampai diberikan Pegas 3 dan Massa 3 di bagian bawahnya. Kemudian, gaya-gaya yang dialami pada susunan pegas tersebut beserta arahnya. Selain itu, keadaan pegas disekitar posisi setimbang atau titik setimbang juga diberikan, atau untuk Pegas 2 dalam keadaan diam adalah pada titik setimbang $y = 0$, dan untuk Pegas 3 dalam keadaan diam adalah pada titik setimbang

$z = 0$. Penjelasan-penjelasan tersebut terangkum dalam Gambar 3.3 di bawah ini.



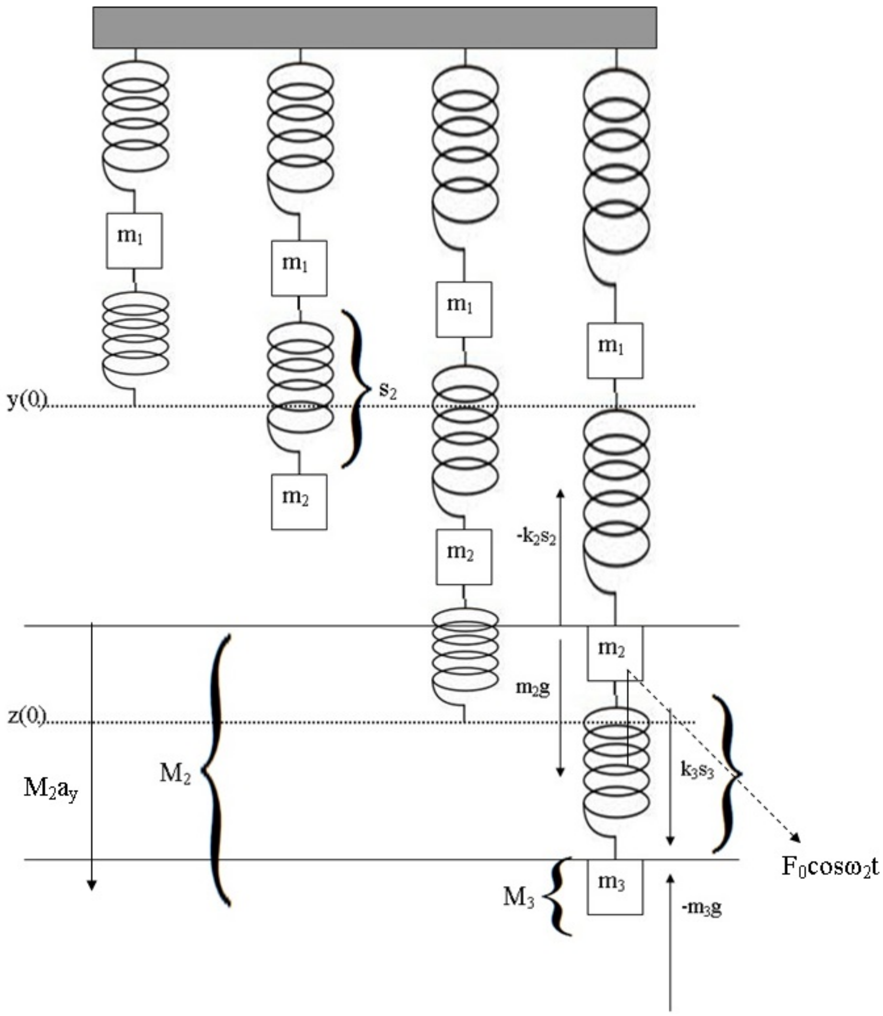
Gambar 3.3: Keadaan 2 dan Massa Total dibawah Pegas 2

Pada Keadaan 2 terdapat pengaruh gaya luar. Pengaruh gaya luar yang dimaksud adalah gaya dengan cara menarik Massa 2 ke bawah namun dengan kemiringan sebesar sudut tertentu, katakanlah gayanya sebesar F_0 Newton. Sehingga bila diilustrasikan seperti membentuk segitiga siku-siku, dengan arah tarikan sebagai sisi miring, dan garis horizontal sebagai sisi datar. Maka sudut yang dibentuk akibat gaya tersebut adalah sudut *cosinus*. Nilai sudut *cosinus* berupa perkalian antara kecepatan sudut (ω_2) dengan waktu (t). Maka gaya luar tersebut sebesar $F_0 \cos \omega_2 t$ Newton.

Dengan adanya gaya luar sebesar $F_0 \cos \omega_2 t$ Newton, dalam keadaan umum, berdasarkan hukum kedua *Newton*, gaya Pegas 2 dapat dirumuskan dengan

$$\sum_{n=2}^{3} (F_n + W_n) + F_0 \cos \omega_2 t = M_2 a_y. \tag{21}$$

Ilustrasi untuk Persamaan (21) adalah sebagai berikut.



Gambar 3.4: Keadaan 2 dan Arah Percepatan Pegas 2

Persamaan (21) menjelaskan bahwa jumlah gaya Pegas 2 dan Pegas 3, diikuti usaha masing-masing massa dan gaya luar yang diberikan terhadap Massa 2, berbanding lurus dengan hukum kedua *Newton* atau Massa Total 2 dikali percepatan Pegas 2 (a_y) atau turunan kedua dari $y(t)$. $y(t)$ merupakan panjang Pegas 2 pada saat t. Sehingga bila dikembangkan hasilnya adalah sebagai berikut.

- $\sum_{n=2}^{3}(F_n + W_n) + F_0 \cos\omega_2 t = (m_2 + m_3 + p_3)a_y$; $a_y = y''(t)$
- $\sum_{n=2}^{3}(F_n + W_n) + F_0 \cos\omega_2 t = (m_2 + m_3 + p_3)y''(t)$
- $F_2 + W_2 + F_3 + W_3 + F_0 \cos\omega_2 t = (m_2 + m_3 + p_3)y''(t)$
- $-k_2(s_2 + y(t) - x(t)) + m_2 g + p_3 g + m_3 g + k_3(s_3 + z(t) - y(t) - x(t)) - m_3 g +$ $F_0 \cos\omega_2 t = (m_2 + m_3 + p_3)y''(t)$
- $-k_2 s_2 + m_2 g + p_3 g + m_3 g + k_3 s_3 - m_3 g - k_2 y(t) + k_2 x(t) + k_3 z(t) - k_3 y(t) -$ $k_3 x(t) + F_0 \cos\omega_2 t = (m_2 + m_3 + p_3)y''(t)$

Berdasarkan Persamaan (20):

- $(k_2 - k_3)x(t) + (-k_2 - k_3)y(t) + k_3 z(t) + F_0 \cos\omega_2 t = (m_2 + m_3 + p_3)y''(t)$
- $(m_2 + m_3 + p_3)y''(t) - (k_2 - k_3)x(t) - (-k_2 - k_3)y(t) - k_3 z(t) =$ $F_0 \cos\omega_2 t$; $k_1 = k_2 = k_3 = k$
- $(m_2 + m_3 + p_3)y''(t) + 2ky(t) - kz(t) = F_0 \cos\omega_2 t$
- $y''(t) + \frac{2k}{m_2 + m_3 + p_3}y(t) - \frac{k}{m_2 + m_3 + p_3}z(t) = \frac{F_0}{m_2 + m_3 + p_3}\cos\omega_2 t$; $M_2 = m_2 + m_3 + p_3$
- $y''(t) + \frac{2k}{M_2}y(t) - \frac{k}{M_2}z(t) = \frac{F_0}{M_2}\cos\omega_2 t$

Maka diperoleh persamaan untuk keadaan Pegas 2, yaitu

$$y''(t) + \frac{2k}{M_2}y(t) - \frac{k}{M_2}z(t) = \frac{F_0}{M_2}\cos\omega_2 t. \tag{22}$$

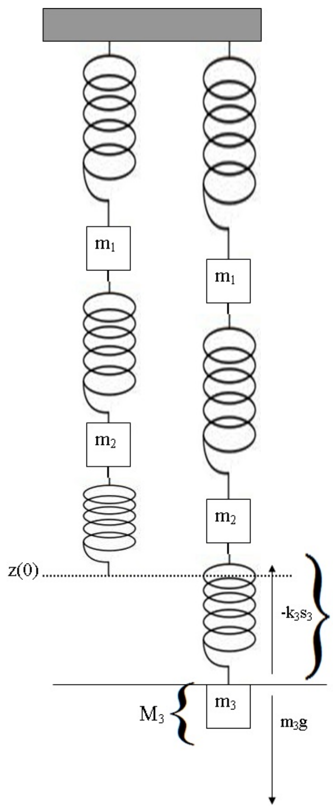
Selanjutnya, akan ditinjau gaya yang dialami Pegas 3. Gaya yang dialami pegas ketiga ada 3, yaitu dalam keadaan setimbang berdasarkan hukum pertama *Newton*, dalam keadaan umum (Hukum kedua *Newton*), dan gaya luar yang juga bekerja pada Massa 3. Maka dalam keadaan setimbang dapat dirumuskan dengan:

- $-k_3s_3 + M_3g = 0$
- $-k_3s_3 + m_3g = 0$

Didapatkan:

$$-k_3s_3 + m_3g = 0. \tag{23}$$

Pada persamaan (23) tidak dilihat lagi pergerakan Pegas 1 dan Pegas 2 karena akan difokuskan pada bagaimana keadaan fisis pada Pegas 3 dan benda lain di bawahnya saja. Pegas 3 mengalami gaya pegas ke atas setelah diberikan Massa 3 di bawahnya, kemudian dipulihkan ke posisi setimbang oleh usaha dari Massa 3. Hal ini mengakibatkan resultan gaya sama dengan 0. Ilustrasi untuk Persamaan (23) adalah sebagai berikut.



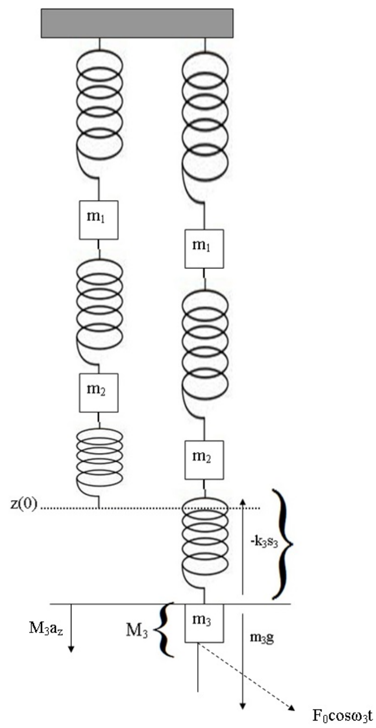
Gambar 3.5: Keadaan 3 dan Massa Total dibawah Pegas 3

Pada Keadaan 3 terdapat pengaruh gaya luar. Pengaruh gaya luar yang dimaksud adalah gaya dengan cara menarik Massa 2 ke bawah namun dengan kemiringan sebesar sudut tertentu, katakanlah gayanya sebesar F_0 Newton. Sehingga bila diilustrasikan seperti membentuk segitiga siku-siku, dengan arah tarikan sebagai sisi miring, dan garis horizontal sebagai sisi datar. Maka sudut yang dibentuk akibat gaya tersebut adalah sudut *cosinus*. Nilai sudut *cosinus* berupa perkalian antara kecepatan sudut (ω_3) dengan waktu (t). Maka gaya luar tersebut sebesar $F_0 \cos \omega_3 t$ Newton.

Dengan adanya gaya luar, dalam keadaan umum, berdasarkan hukum kedua *Newton*, gaya Pegas 3 dapat dirumuskan dengan

$$F_3 + W_3 + F_0 \cos \omega_3 t = M_3 a_z. \tag{24}$$

Ilustrasi untuk Persamaan (24) adalah sebagai berikut.



Gambar 3.6: Keadaan 3 dan Arah Percepatan Pegas 3

Persamaan (24) menjelaskan bahwa jumlah antara gaya pegas 3, usaha Massa Total 3, dan gaya luar berbanding lurus dengan hukum kedua *Newton* atau Massa Total 3 dikali percepatan Pegas 3 (a_z) atau turunan kedua dari $z(t)$. $z(t)$ adalah panjang Pegas 3 pada saat t. Sehingga bila dikembangkan hasilnya adalah sebagai berikut.

- $F_3 + W_3 + F_0 \cos \omega_3 t = m_3 a_z$; $a_z = z''(t)$
- $-k_3(s_3 + z(t) - y(t) - x(t)) + m_3 g + F_0 \cos \omega_3 t = m_3 z''(t)$
- $-k_3 s_3 + m_3 g + k_3 x(t) + k_3 y(t) - k_3 z(t) + F_0 \cos \omega_3 t = m_3 z''(t)$

Berdasarkan Persamaan (23):

- $k_3 x(t) + k_3 y(t) - k_3 z(t) + F_0 \cos \omega_3 t = m_3 z''(t)$
- $m_3 z''(t) - k_3 x(t) - k_3 y(t) + k_3 z(t) = F_0 \cos \omega_3 t$
- $z''(t) - \dfrac{k_3}{m_3} x(t) - \dfrac{k_3}{m_3} y(t) + \dfrac{k_3}{m_3} z(t) = \dfrac{F_0}{m_3} \cos \omega_3 t$; $k_1 = k_2 = k_3 = k$
- $z''(t) - \dfrac{k}{m_3} x(t) - \dfrac{k}{m_3} y(t) + \dfrac{k}{m_3} z(t) = \dfrac{F_0}{m_3} \cos \omega_3 t$; $M_3 = m_3$
- $z''(t) - \dfrac{k}{M_3} x(t) - \dfrac{k}{M_3} y(t) + \dfrac{k}{M_3} z(t) = \dfrac{F_0}{M_3} \cos \omega_3 t$

Maka diperoleh persamaan untuk keadaan Pegas 3, yaitu

$$z''(t) - \tfrac{k}{M_3} x(t) - \tfrac{k}{M_3} y(t) + \tfrac{k}{M_3} z(t) = \tfrac{F_0}{M_3} \cos \omega_3 t. \tag{25}$$

Sehingga Model Asumsi Pertama secara garis besar adalah:

$$x''(t) + \frac{k}{M_1} x(t) - \frac{2k}{M_1} y(t) + \frac{k}{M_1} z(t) = 0 \tag{19}$$

$$y''(t) + \frac{2k}{M_2} y(t) - \frac{k}{M_2} z(t) = \frac{F_0}{M_2} \cos \omega_2 t. \tag{22}$$

$$z''(t) - \frac{k}{M_3} x(t) - \frac{k}{M_3} y(t) + \frac{k}{M_3} z(t) = \frac{F_0}{M_3} \cos \omega_3 t. \tag{25}$$

Setelah memperoleh model untuk asumsi pertama, langkah selanjutnya adalah mencari Solusi MNA dari model tersebut. Metode yang digunakan adalah Transformasi *Laplace*. Sebelum melakukan transformasi, substitusikan terlebih dahulu data dari hasil Laporan Praktikum Pegas Spiral oleh Anita Nurdianingrum (2011).

$$m_1 = 2 \text{ kg}$$
$$m_2 = 4 \text{ kg}$$
$$m_3 = 1 \text{ kg}$$
$$p_2 = p_3 = 0.0143 \text{ kg}$$
$$k = 3 \text{ Newton/m}$$
$$F_0 = 5 \text{ Newton}$$

Kecepatan sudut ω_2 adalah sebagai berikut:

$$\frac{1}{k_{total2}} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \to k_{total2} = \frac{3}{2} = 1.5$$
$$m_{total2} = M_2 = m_2 + m_3 + p_3 = 4 + 1 + 0.0143 = 5.0143$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_{total2}}{m_{total2}}} = \sqrt{\frac{1.5}{5.0143}} = 0.54$$

Sedangkan kecepatan sudut ω_3 adalah:

$$\frac{1}{k_{total3}} = \frac{1}{k_3} = \frac{1}{k} = \frac{1}{3} \to k_{total3} = 3$$
$$m_{total3} = M_3 = m_3 = 1$$
$$\omega_3 = \sqrt{\frac{k_{total3}}{m_{total3}}} = \sqrt{\frac{3}{1}} = 1.73$$

Sehingga model Asumsi Pertama menjadi:

$$x''(t) + 0.4x(t) - 0.8y(t) + 0.4z(t) = 0 \tag{26}$$
$$y''(t) + 1.2y(t) - 0.6z(t) = \cos(0.54t) \tag{27}$$
$$z''(t) - 3x(t) - 3y(t) + 3z(t) = 5\cos(1.73t) \tag{28}$$

Selanjutnya, lakukan Transformasi *Laplace* pada masing-masing persamaan dan pada kedua ruas, dilambangkan dengan operator linier $\mathcal{L}$.

Laplace Persamaan (26):

- $\mathcal{L}\{x''(t) + 0.4x(t) - 0.8y(t) + 0.4z(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$
- $s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 0.4X(s) - 0.8Y(s) + 0.4Z(s) = 0$

Masukkan Kondisi awal $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y'(0) = 0$, dan $z'(0) = 0$.

- $(s^2+0.4)X(s)-0.8Y(s)+0.4Z(s)=0$ (29)

Laplace Persamaan (27):

- $\mathcal{L}\{y''(t)+1.2y(t)-0.6z(t)=\mathcal{L}\{\cos 0.54t\}$
- $s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+1.2Y(s)-0.6Z(s)=\dfrac{s}{s^2+0.3}$

Masukkan Kondisi awal $y(0)=0$, $z(0)=0$, $y'(0)=0$, dan $z'(0)=0$.

- $(s^2+1.2)Y(s)-0.6Z(s)=\dfrac{s}{s^2+0.3}$
- $(s^2+1.2)Y(s)=\dfrac{s}{s^2+0.3}+0.6Z(s)$
- $Y(s)=\dfrac{s}{(s^2+0.3)(s^2+1.2)}+\dfrac{0.6}{s^2+1.2}Z(s)$ (30)

Laplace Persamaan(28):

- $\mathcal{L}\{z''(t)-3x(t)-3y(t)+3z(t)\}=\mathcal{L}\{5\cos(1.73t)\}$
- $s^2Z(s)-sz(0)-z'(0)-3X(s)-3Y(s)+3Z(s)=\dfrac{5s}{s^2+3}$

Masukkan Kondisi awal $x(0)=0$, $y(0)=0$, $z(0)=0$, $x'(0)=0$, $y'(0)=0$, dan $z'(0)=0$.

- $-3X(s)-3Y(s)+(s^2+3)Z(s)=\dfrac{5s}{s^2+3}$ (31)

Substitusi Persamaan (30) ke Persamaan (29).

- $(s^2+0.4)X(s)-0.8Y(s)+0.4Z(s)=0$
- $(s^2+0.4)X(s)-\dfrac{0.8s}{(s^2+0.3)(s^2+1.2)}-\dfrac{0.048}{s^2+1.2}Z(s)+0.4Z(s)=0$
- $(s^2+0.4)X(s)+(\dfrac{-0.048}{s^2+1.2}+0.4)Z(s)=\dfrac{0.8s}{(s^2+0.3)(s^2+1.2)}$ (32)

Substitusi Persamaan (30) ke Persamaan (31).

- $-3X(s)-3Y(s)+(s^2+3)Z(s)=\dfrac{5s}{s^2+3}$
- $-3X(s)-\dfrac{3s}{(s^2+0.3)(s^2+1.2)}-\dfrac{1.8}{s^2+1.2}Z(s)+(s^2+3)Z(s)=\dfrac{5s}{s^2+3}$
- $-3X(s)+(\dfrac{-1.8}{s^2+1.2}+(s^2+3))Z(s)=\dfrac{5s}{s^2+3}+\dfrac{3s}{(s^2+0.3)(s^2+1.2)}$ (33)

Eliminasi Persamaan (32) dan Persamaan (33).

(32) $(s^2+0.4)X(s)+(\dfrac{-0.048}{s^2+1.2}+0.4)Z(s)=\dfrac{0.8s}{(s^2+0.3)(s^2+1.2)}$ $|\times -3$

(33) $-3X(s)+(\dfrac{-1.8}{s^2+1.2}+(s^2+3))Z(s)=\dfrac{5s}{s^2+3}+\frac{3s}{(s^2+0.3)(s^2+1.2)}$ $|\times(s^2+0.4)$

$-3(s^2+0.4)X(s)+(\dfrac{0.144}{s^2+1.2}-1.2)Z(s)=\dfrac{-2.4s}{(s^2+0.3)(s^2+1.2)}$ (*)

$-3(s^2+0.4)X(s)+((s^2+0.4)(s^2+3)-\frac{1.8(s^2+0.4)}{(s^2+1.2)})Z(s)=\frac{5s(s^2+0.4)}{s^2+3}+\frac{3s(s^2+0.4)}{(s^2+0.3)(s^2+1.2)}$ $-$

$(\frac{0.144}{s^2+1.2}-1.2-(s^2+0.4)(s^2+3)+\frac{1.8(s^2+0.4)}{s^2+1.2})Z(s)=$

$\frac{-3.6s}{(s^2+0.3)(s^2+1.2)}-\frac{3s^3}{(s^2+0.3)(s^2+1.2)}-\frac{5s^3}{s^2+3}-\frac{2s}{s^2+3}$

$$\rightarrow Z(s)=\frac{\frac{-3.6s}{(s^2+0.3)(s^2+1.2)}-\frac{3s^3}{(s^2+0.3)(s^2+1.2)}-\frac{5s^3}{s^2+3}-\frac{2s}{s^2+3}}{\frac{0.144}{s^2+1.2}-1.2-(s^2+0.4)(s^2+3)+\frac{1.8(s^2+0.4)}{s^2+1.2}}$$

$$\rightarrow Z(s)=\frac{(-3.6s-3s^3)(s^2+3)-(5s^3+2s)(s^2+1.2)(s^2+0.3)}{(s^2+0.3)(s^2+3)(-s^6-4.6s^4-4.68s^2-2.016)}$$

$$\rightarrow Z(s)=\frac{(3.6s+3s^3)}{(s^2+0.3)(s^6+4.6s^4+4.68s^2+2.016)}+\frac{(5s^3+2s)(s^2+1.2)}{(s^2+3)(s^6+4.6s^4+4.68s^2+2.016)}$$

Lakukan Invers Transformasi *Laplace* pada $Z(s)$ sehingga diperoleh solusi masalah nilai awal untuk $z(t)$:

$$z(t)=8.28\cos(1.73t)+34.97\cos(0.54t)-9.68\cos(1.86t)$$
$$-33.57\cos(0.82t)\cosh(0.29t)-27.15\sin(0.82t)\sinh(0.29t) \qquad (34)$$

Substitusi $Z(s)$ ke Persamaan (*).

- $(-3s^2-1.2)X(s)+(\frac{0.144}{s^2+1.2}-1.2)Z(s)=\frac{-2.4s}{(s^2+0.3)(s^2+1.2)}$
- $(-3s^2-1.2)X(s)=\frac{-2.4s}{(s^2+0.3)(s^2+1.2)}-(\frac{0.144}{s^2+1.2}-1.2)Z(s)$
- $(-3s^2-1.2)X(s)=\frac{-2.4s}{(s^2+0.3)(s^2+1.2)}-$
  $(\frac{0.144}{s^2+1.2}-1.2)(\frac{3.6s+3s^3}{(s^2+0.3)(s^6+4.6s^4+4.68s^2+2.016)}+$
  $\frac{(5s^3+2s)(s^2+1.2)}{(s^2+3)(s^6+4.6s^4+4.68s^2+2.016)})$
- $X(s)=-\frac{80s(1875s^8+1625s^6+16275s^4+81495s^2+65826)}{(5s^2+6)(10s^2+3)(500s^6+2325s^4+2340s^2+1008)(s^2+3)(5s^2+2)}$

Lakukan Invers Transformasi *Laplace* pada $Z(s)$ sehingga diperoleh solusi masalah nilai awal untuk $x(t)$:

$$x(t)=1.358\cos(1.73t)+(-5.9-4.29I)e^{(-0.29-0.82I)t}+(-5.9+$$
$$4.29I)e^{(-0.29+0.82I)t}-0.66e^{-1.86It}-0.66^{1.86It}+(-5.9+4.29I)e^{(0.29-0.82I)t}+$$
$$(-5.9-4.29I)e^{(0.29+0.82I)t}+133.59\cos(0.63t)-112.366\cos(0.54t)+$$
$$2.69\cos(1.09t) \qquad (35)$$

Setelah diperoleh solusi masalah nilai awal $z(t)$ dan $x(t)$, akan diperoleh solusi masalah nilai awal $y(t)$ dengan mensubstitusi $x(t)$ dan $z(t)$ ke Persamaan (26), sehingga didapatkan:

$$\begin{gathered}y(t) = -0.27\cos(1.73t) + (4.01+2.58I)e^{(-0.29+0.82I)t} + (4.01+2.58I)e^{(0.29-0.82I)t} + \\ 2.54e^{-1.86It} + 2.54e^{1.86It} + (4.01-2.58I)e^{(-0.29-0.82I)t} + (4.01-2.58)e^{(0.29+0.82I)t} + \\ 1.25\cdot 10^{-8}\cos(0.63t) + 3.44\cos(0.54t) - 2.69\cos(1.09t) - 4.84\cos(1.86t) \\ -16.78\cos(0.82t)\cosh(0.29t) - 13.57\sin(0.82t)\sinh(0.29t) \qquad (36)\end{gathered}$$

Secara garis besar, solusi masalah nilai awal untuk Model Asumsi Pertama adalah:

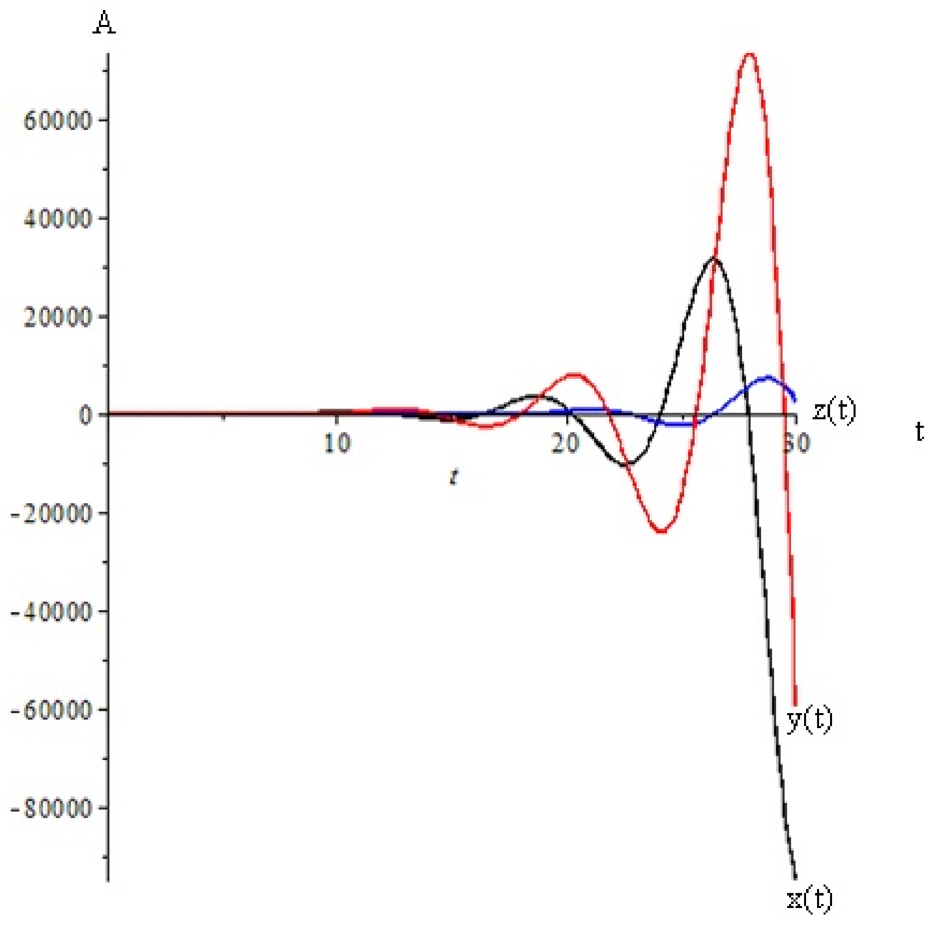
$$\begin{gathered}x(t) = 1.358\cos(1.73t) + (-5.9-4.29I)e^{(-0.29-0.82I)t} + (-5.9+ \\ 4.29I)e^{(-0.29+0.82I)t} - 0.66e^{-1.86It} - 0.66^{1.86It} + (-5.9+4.29I)e^{(0.29-0.82I)t} + \\ (-5.9-4.29I)e^{(0.29+0.82I)t} + 133.59\cos(0.63t) - 112.366\cos(0.54t) + \\ 2.69\cos(1.09t) \qquad (35)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}y(t) = -0.27\cos(1.73t) + (4.01+2.58I)e^{(-0.29+0.82I)t} + (4.01+2.58I)e^{(0.29-0.82I)t} + \\ 2.54e^{-1.86It} + 2.54e^{1.86It} + (4.01-2.58I)e^{(-0.29-0.82I)t} + (4.01-2.58)e^{(0.29+0.82I)t} + \\ 1.25\cdot 10^{-8}\cos(0.63t) + 3.44\cos(0.54t) - 2.69\cos(1.09t) - 4.84\cos(1.86t) \\ -16.78\cos(0.82t)\cosh(0.29t) - 13.57\sin(0.82t)\sinh(0.29t) \qquad (36)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}z(t) = 8.28\cos(1.73t) + 34.97\cos(0.54t) - 9.68\cos(1.86t) \\ -33.57\cos(0.82t)\cosh(0.29t) - 27.15\sin(0.82t)\sinh(0.29t) \qquad (34)\end{gathered}$$

Setelah memperoleh solusi masalah nilai awal untuk Model Asumsi Pertama, akan dilihat bagaimana perilaku getaran sistem pegas melalui grafik osilasi pada Gambar 3.7. Grafik ini diilustrasikan dengan warna hitam untuk osilasi Pegas 1, kemudian grafik berwarna biru diilustrasikan untuk Pegas 2, dan yang terakhir adalah, grafik berwarna merah diilustrasikan untuk Pegas 3.

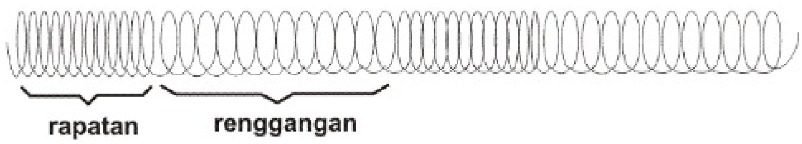
Pegas 1, Pegas 2, dan Pegas 3 bergerak beriringan pada detik-detik awal namun hampir tidak terlihat seperti bergetar atau melakukan simpangan yang berarti karena grafik awalnya yang hampir mendekati sumbu x atau bahkan sejajar dengan sumbu x (amplitudo bernilai 0). Grafik tersebut adalah sebagai berikut.



Gambar 3.7: Grafik Osilasi Model Pegas Asumsi Pertama

Grafik 3.7 menunjukkan bahwa perilaku getaran nyaris seragam dan getaran yang terjadi berjalan dengan lambat, namun getaran pada Pegas 2 dan 3 termasuk osilasi paksa karena adanya pengaruh gaya luar dan gerak harmonik sederhana karena tak ada peredam sehingga getaran akan terus terjadi, namun dengan amplitudo yang makin besar. Semakin lama getaran terjadi, semakin besar amplitudonya. Mendekati detik ke 30, getaran setiap pegas semakin menyimpang jauh dari posisi setimbang karena perbedaan massa dan periodenya juga semakin besar. Semakin besar periode, semakin besar simpangan. Periode adalah lamanya pegas melakukan satu getaran penuh. Simpangan yang dihasilkan tiap pegas yang semakin berbeda jauh karena massa yang berbeda dan nilai konstanta yang seragam memiliki kekuatan yang sama dalam menahan beban yang menggantung.

Besar periode juga tergantung dari massa yang digantungkan pada setiap pegas. Massa 2 adalah beban paling besar dan memiliki periode yang besar pula. Namun, frekuensinya paling kecil dibandingkan dengan Pegas 1 dan Pegas 3. Selain itu, pergerakan pegas juga saling tumpang-tindih atau berpengaruh satu sama lain, misalnya ketika Pegas 1 sedang berosilasi ke bawah dengan melakukan regangan, maka Pegas 2 berosilasi ke atas dengan membentuk rapatan. Begitu juga sebaliknya, dan seterusnya bergiliran, layaknya gelombang longitudinal seperti pada Gambar 3.8 berikut ini.



Gambar 3.8: Bentuk Gelombang Longitudinal

Perbedaan arah osilasi disebabkan karena setiap pegas memiliki waktu yang berbeda dalam melakukan getaran getaran pada suatu jangka waktu, tergantung pada beban masing-masing dan kekuatan pegas. Berikut ini adalah nilai dari Periode dan Frekuensi masing-masing Pegas.

Tabel 3.1: Tabel Periode dan Frekuensi Sistem Pegas Asumsi Pertama

	Periode (T) (dalam detik)	Frekuensi (f) (dalam Hertz)
Pegas 1	9.66 detik	0.10 Hz
Pegas 2	11.63 detik	0.08 Hz
Pegas 3	3.63 detik	0.275 Hz

Selanjutnya akan dilihat bagaimana model pegas dengan konstanta pegas jika dibedakan nilainya, massa yang disamaratakan dan bagaimana pola getaran yang terjadi.

3.2 Solusi MNA dan Getaran Pegas Massa Homogen dan Konstanta Nonhomogen

Asumsikan massa m_1, m_2, dan m_3 bernilai sama, dan konstanta pegas k_1, k_2, dan k_3 bernilai berbeda. Setiap pegas memiliki keadaan berbeda ketika sedang bekerja. Pertama, akan ditelusuri Pegas 1 beserta penyusunan model dan bagaimana gaya yang terjadi.

Gaya yang dialami Pegas 1 ada 2, yaitu dalam keadaan setimbang berdasarkan hukum pertama *Newton* yang berarti resultan gaya ketiga pegas sama dengan 0 dan dalam keadaan umum atau memiliki percepatan yang berarti gaya massa pada Pegas 1 bergerak lurus beraturan (hukum kedua *Newton*). Massa Pegas 1 dihitung secara keseluruhan karena dibawah Pegas 1 bukan hanya terdapat Massa 1 saja, tetapi Pegas 2, Massa 2, Pegas 3, dan Massa 3 juga dihitung sebagai Massa Total 1 untuk Pegas 1. Selain itu, meskipun Pegas 2 dan Pegas 3 termasuk ke dalam massa total, kedua Pegas tetap dipertimbangkan gaya pegasnya. Massa total 2 Pegas 2 juga dihitung dari Massa 2, Pegas 3 sampai Massa 3. Sedangkan Pegas 3 hanya memiliki Massa 3 sebagai Massa Total 3. Maka dalam keadaan setimbang dapat dirumuskan dengan

Persamaan (17).

Tanda positif dan negatif pada gaya pegas menunjukkan arah gaya (dalam hal ini, arah ke atas adalah arah yang negatif). Resultan gaya pegas bernilai 0 dikarenakan adanya gaya pemulih (*Restoring Force*), yaitu dimana pegas kembali ke keadaan awalnya atau posisi semula. Pegas 1 mengalami gaya pegas dan mengalami pertambahan panjang karena adanya Massa 1. Selanjutnya Pegas 2 diberikan di bawah Massa 1. Massa 2 juga diberikan di bawah Pegas 2 sehingga Pegas 2 dan Pegas 1 mengalami pertambahan panjang. Selanjutnya Pegas 3 diberikan di bawah Massa 2 dan Massa 3 juga diberikan di bawah Pegas 3, sehingga Pegas 1 dan Pegas 2 kembali mengalami pertambahan panjang.

Pegas 1 akan mengalami gaya pegas ke atas, dan dipulihkan ke posisi setimbang oleh usaha dari Massa Total 1. Begitu juga dengan Pegas 2, akibat dari pergerakan Massa 1, Pegas 2 terdorong ke bawah dan dipulihkan oleh usaha dari Massa Total 2. Pegas 3 juga mengalami gaya pegas ke atas akibat pergerakan dari Massa 2 dan dipulihkan kembali ke posisi setimbang oleh usaha dari Massa Total 3. Sehingga pergerakan yang terjadi pada masing-masing pegas dan massa saling susul-menyusul arah. Hal ini yang mengakibatkan resultan gaya pegas sama dengan 0. Ilustrasi untuk Persamaan (17) terdapat pada Gambar 3.1.

Prinsip gaya pemulih pada sistem pegas sama dengan gaya yang terjadi ketika seseorang berada di dalam mobil. Ketika mobil dalam keadaan diam, orang tersebut juga masih dalam keadaan diam. Pada saat mobil berjalan, tubuhnya akan terdorong ke belakang, katakanlah arahnya negatif. Namun, ketika mobil direm mendadak, tubuhnya akan terdorong ke depan, berarti arahnya positif. Artinya, tubuh orang tersebut memiliki kemampuan mempertahankan posisi awalnya agar tidak mengalami perpindahan, atau tubuhnya bergerak dengan kecepatan tetap.

Kemudian, dalam keadaan umum, berdasarkan hukum kedua *Newton*, gaya Pegas 1 dapat dirumuskan dengan Persamaan (18). Ilustrasi untuk Persamaan (18) terdapat pada Gambar 3.2. Persamaan (18) adalah jumlah gaya ketiga pegas (F_n), disertai dengan usaha masing-masing massa total (W_n), yang berbanding lurus dengan hukum kedua *Newton* atau Massa Total 1 dikali percepatan Pegas 1 (a_x) atau turunan kedua dari $x(t)$. $x(t)$ merupakan panjang Pegas 1 pada saat t. Sehingga bila dikembangkan hasilnya adalah sebagai berikut.

- $\sum\limits_{n=1}^{3}(F_n + W_n) = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)a_x \; ; \; a_x = x''(t)$
- $\sum\limits_{n=1}^{3}(F_n + W_n) = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$
- $F_1 + W_1 + F_2 + W_2 + F_3 + W_3 = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$
- $-k_1(s_1 + x(t)) + M_1g + k_2(s_2 + y(t) - x(t)) - M_2g - k_3(s_3 + z(t) - y(t) - x(t)) + M_3g = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$
- $-k_1s_1 + m_1g + p_2g + m_2g + p_3g + m_3g + k_2s_2 - m_2g - p_3g - m_3g - k_3s_3 + m_3g - k_1x(t) + k_2y(t) - k_2x(t) - k_3z(t) + k_3y(t) + k_3x(t) = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$
- $(-k_1s_1 + m_1g + k_2s_2 + p_2g - k_3s_3 + m_3g) - k_1x(t) + k_2y(t) - k_2x(t) - k_3z(t) + k_3y(t) + k_3x(t) = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$

Berdasarkan Persamaan (17):

- $(-k_1 - k_2 + k_3)x(t) + (k_2 + k_3)y(t) - k_3z(t) = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$
- $(m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t) - (-k_1 - k_2 + k_3)x(t) - (k_2 + k_3)y(t) + k_3z(t) = 0 \; ; \; m_1 = m_2 = m_3 = m$
- $(3m + p_2 + p_3)x''(t) - (-k_1 - k_2 + k_3)x(t) - (k_2 + k_3)y(t) + k_3z(t) = 0$
- $x''(t) - \dfrac{-k_1 - k_2 + k_3}{3m + p_2 + p_3}x(t) - \dfrac{k_2 + k_3}{3m + p_2 + p_3}y(t) + \dfrac{k_3}{3m + p_2 + p_3}z(t) = 0$

Maka diperoleh persamaan untuk keadaan Pegas 1, yaitu:

$$x''(t) - \frac{-k_1 - k_2 + k_3}{3m + p_2 + p_3}x(t) - \frac{k_2 + k_3}{3m + p_2 + p_3}y(t) + \frac{k_3}{3m + p_2 + p_3}z(t) = 0. \quad (35)$$

Selanjutnya, akan ditinjau gaya yang dialami Pegas 2. Gaya yang dialami Pegas 2 ada 3, yaitu dalam keadaan setimbang berdasarkan hukum pertama *Newton*, dalam keadaan umum (Hukum kedua *Newton*), dan gaya luar yang bekerja pada Massa 2. Maka dalam keadaan setimbang dapat dirumuskan dengan Persamaan (20). Pada persamaan (20) tidak dilihat lagi pergerakan Pegas 1 karena akan difokuskan pada bagaimana keadaan fisis pada Pegas 2 dan benda lain di bawahnya saja. Pegas 2 mengalami gaya pegas ke atas setelah diberikan Massa 2 di bawahnya, kemudian dipulihkan ke posisi setimbang oleh usaha dari Massa 2. Kemudian di bawah Massa 2 diberikan Pegas 3 dan Massa 3 di bawah Pegas 3 sehingga Massa Total 2 adalah jumlah dari Massa 2, Massa Pegas 3, dan Massa 3. Gaya Pegas 3 juga ditinjau meskipun merupakan bagian dari Massa Total 2. Pegas 3 mengalami gaya pegas ke bawah akibat dorongan dari usaha Massa 2, dan dipulihkan oleh usaha Massa 3 ke posisi setimbang. Hal ini mengakibatkan resultan gaya sama dengan 0. Ilustrasi untuk Persamaan (20) terdapat pada Gambar 3.3

Pada keadaan Pegas 2 terdapat pengaruh gaya luar. Pengaruh gaya luar yang dimaksud adalah gaya dengan cara menarik Massa 2 ke bawah namun dengan kemiringan sebesar sudut tertentu, katakanlah gayanya sebesar F_0 Newton. Sehingga bila diilustrasikan seperti membentuk segitiga siku-siku, dengan arah tarikan sebagai sisi miring, dan garis horizontal sebagai sisi datar. Maka sudut yang dibentuk akibat gaya tersebut adalah sudut *cosinus*. Nilai sudut *cosinus* berupa perkalian antara kecepatan sudut (ω_2) dengan waktu (t). Maka gaya luar tersebut sebesar $F_0 \cos \omega_2 t$ Newton.

Dengan adanya gaya luar sebesar $F_0 \cos \omega_2 t$ Newton, dalam keadaan umum, berdasarkan hukum kedua *Newton*, gaya Pegas 2 dapat dirumuskan dengan Persamaan (21). Ilustrasi untuk Persamaan (21) terdapat pada Gambar 3.4.

Persamaan (21) menjelaskan bahwa jumlah gaya Pegas 2 dan Pegas 3, diikuti usaha masing-masing massa dan gaya luar yang diberikan terhadap Massa 2, berbanding lurus dengan hukum kedua *Newton* atau Massa Total 2 dikali percepatan Pegas 2 (a_y) atau turunan kedua dari $y(t)$. $y(t)$ merupakan panjang Pegas 2 pada saat t. Sehingga bila dikembangkan hasilnya adalah sebagai berikut.

- $\sum_{n=2}^{3}(F_n + W_n) + F_0 \cos\omega_2 t = (m_2 + m_3 + p_3)a_y$; $a_y = y''(t)$
- $\sum_{n=2}^{3}(F_n + W_n) + F_0 \cos\omega_2 t = (m_2 + m_3 + p_3)y''(t)$
- $F_2 + W_2 + F_3 + W_3 + F_0 \cos\omega_2 t = (m_2 + m_3 + p_3)y''(t)$
- $-k_2(s_2 + y(t) - x(t)) + m_2 g + p_3 g + m_3 g + k_3(s_3 + z(t) - y(t) - x(t)) - m_3 g +$

  $F_0 \cos\omega_2 t = (m_2 + m_3 + p_3)y''(t)$
- $-k_2 s_2 + m_2 g + p_3 g + m_3 g + k_3 s_3 - m_3 g - k_2 y(t) + k_2 x(t) + k_3 z(t) - k_3 y(t) -$

  $k_3 x(t) + F_0 \cos\omega_2 t = (m_2 + m_3 + p_3)y''(t)$

Berdasarkan Persamaan (20):

- $-k_2 y(t) + k_2 x(t) + k_3 z(t) - k_3 y(t) - k_3 x(t) + F_0 \cos\omega_2 t = (m_2 + m_3 + p_3)y''(t)$
- $(m_2 + m_3 + p_3)y''(t) - (k_2 - k_3)x(t) - (-k_2 - k_3)y(t) - k_3 z(t) =$

  $F_0 \cos\omega_2 t$; $m_1 = m_2 = m_3 = m$
- $(2m + p_3)y''(t) - (k_2 - k_3)x(t) - (-k_2 - k_3)y(t) - k_3 z(t) = F_0 \cos\omega_2 t$
- $y''(t) - \frac{(k_2 - k_3)}{2m + p_3}x(t) - \frac{(-k_2 - k_3)}{2m + p_3}y(t) - \frac{k_3}{2m + p_3}z(t) = \frac{F_0}{2m + p_3}\cos\omega_2 t$

Maka diperoleh persamaan untuk keadaan Pegas 2, yaitu:

$$y''(t) - \frac{(k_2 - k_3)}{2m + p_3}x(t) - \frac{(-k_2 - k_3)}{2m + p_3}y(t) - \frac{k_3}{2m + p_3}z(t) = \frac{F_0}{2m + p_3}\cos\omega_2 t. \quad (36)$$

Selanjutnya, akan ditinjau gaya yang dialami Pegas 3. Gaya yang dialami pegas ketiga ada 3, yaitu dalam keadaan setimbang berdasarkan hukum pertama *Newton*, dalam keadaan umum (Hukum kedua *Newton*), dan gaya luar yang juga bekerja pada Massa 3. Maka dalam keadaan setimbang dapat dirumuskan dengan Persamaan (23). Pada persamaan (23) tidak dilihat lagi pergerakan Pegas 1 dan Pegas 2 karena akan difokuskan pada bagaimana keadaan fisis pada Pegas 3 dan benda lain di bawahnya saja. Pegas 3 mengalami gaya pegas ke atas setelah diberikan Massa 3 di bawahnya, kemudian dipulihkan ke posisi setimbang oleh usaha dari Massa 3. Hal ini mengakibatkan resultan gaya sama dengan 0. Ilustrasi untuk Persamaan (23) terdapat pada Gambar 3.5.

Pada keadaan Pegas 3 terdapat pengaruh gaya luar. Pengaruh gaya luar yang dimaksud adalah gaya dengan cara menarik Massa 2 ke bawah namun dengan kemiringan sebesar sudut tertentu, katakanlah gayanya sebesar F_0 Newton. Sehingga bila diilustrasikan seperti membentuk segitiga siku-siku, dengan arah tarikan sebagai sisi miring, dan garis horizontal sebagai sisi datar. Maka sudut yang dibentuk akibat gaya tersebut adalah sudut *cosinus*. Nilai sudut *cosinus* berupa perkalian antara kecepatan sudut (ω_3) dengan waktu (t). Maka gaya luar tersebut sebesar $F_0 \cos \omega_3 t$ Newton.

Dengan adanya gaya luar, dalam keadaan umum, berdasarkan hukum kedua *Newton*, gaya Pegas 3 dapat dirumuskan dengan Persamaan (24). Ilustrasi untuk Persamaan (24) terdapat pada Gambar 3.6. Persamaan (24) menjelaskan bahwa jumlah antara gaya pegas 3, usaha Massa Total 3, dan gaya luar berbanding lurus dengan hukum kedua *Newton* atau Massa Total 3 dikali percepatan Pegas 3 (a_z) atau turunan kedua dari $z(t)$. $z(t)$ adalah panjang Pegas 3 pada saat t. Sehingga bila dikembangkan hasilnya adalah sebagai berikut.

- $F_3 + W_3 + F_0 \cos \omega_3 t = m_3 a_z \ ; \ a_z = z''(t)$
- $-k_3(s_3 + z(t) - y(t) - x(t)) + m_3 g + F_0 \cos \omega_3 t = m_3 z''(t)$
- $-k_3 s_3 + m_3 g + k_3 x(t) + k_3 y(t) - k_3 z(t) + F_0 \cos \omega_3 t = m_3 z''(t)$

Berdasarkan Persamaan (23):

- $k_3 x(t) + k_3 y(t) - k_3 z(t) + F_0 \cos \omega_3 t = m_3 z''(t)$
- $m_3 z''(t) - k_3 x(t) - k_3 y(t) + k_3 z(t) = F_0 \cos \omega_3 t$

- $z''(t) - \frac{k_3}{m_3}x(t) - \frac{k_3}{m_3}y(t) + \frac{k_3}{m_3}z(t) = \frac{F_0}{m_3}\cos\omega_3 t$; $m_1 = m_2 = m_3 = m$
- $z''(t) - \frac{k_3}{m}x(t) - \frac{k_3}{m}y(t) + \frac{k_3}{m}z(t) = \frac{F_0}{m}\cos\omega_3 t$

Maka diperoleh persamaan untuk keadaan Pegas 3, yaitu

$$z''(t) - \frac{k_3}{m}x(t) - \frac{k_3}{m}y(t) + \frac{k_3}{m}z(t) = \frac{F_0}{m}\cos\omega_3 t. \tag{37}$$

Sehingga Model Asumsi Kedua secara garis besar adalah:

$$x''(t) - \frac{-k_1 - k_2 + k_3}{3m + p_2 + p_3}x(t) - \frac{k_2 + k_3}{3m + p_2 + p_3}y(t) + \frac{k_3}{3m + p_2 + p_3}z(t) = 0. \tag{35}$$
$$y''(t) - \frac{(k_2 - k_3)}{2m + p_3}x(t) - \frac{(-k_2 - k_3)}{2m + p_3}y(t) - \frac{k_3}{2m + p_3}z(t) = \frac{F_0}{2m + p_3}\cos\omega_2 t. \tag{36}$$
$$z''(t) - \frac{k_3}{m}x(t) - \frac{k_3}{m}y(t) + \frac{k_3}{m}z(t) = \frac{F_0}{m}\cos\omega_3 t. \tag{37}$$

Setelah memperoleh model untuk asumsi kedua, langkah selanjutnya adalah mencari Solusi MNA dari model tersebut. Metode yang digunakan adalah Transformasi *Laplace*. Sebelum melakukan transformasi, substitusikan terlebih dahulu data dari hasil Laporan Praktikum Pegas Spiral oleh Anita Nurdianingrum (2011).

$$m = 4 \text{ kg}$$
$$p_3 = 0.0143 \text{ kg}$$
$$k_1 = 3 \text{ Newton/m}$$
$$k_2 = 5 \text{ Newton/m}$$
$$k_3 = 6 \text{ Newton/m}$$
$$F_0 = 5 \text{ Newton}$$

Kecepatan sudut ω_2 adalah sebagai berikut:

$$\frac{1}{k_{total2}} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30} \rightarrow k_{total2} = \frac{30}{11} = 2.7$$
$$m_{total2} = m_2 + m_3 + p_3 = 2m + p_3 = 2(4) + 0.0143 = 8.0143$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_{total2}}{m_{total2}}} = \sqrt{\frac{2.7}{8.0143}} = 0.58$$

Sedangkan kecepatan sudut ω_3 adalah:

$$\frac{1}{k_{total3}} = \frac{1}{k_3} = \frac{1}{6} \rightarrow k_{total3} = 6$$
$$m_{total3} = m_3 = m = 4$$
$$\omega_3 = \sqrt{\frac{k_{total3}}{m_{total3}}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = 1.2$$

Sehingga model Asumsi Kedua menjadi:

$$x''(t) + 0.16x(t) - 0.9y(t) + 0.5z(t) = 0 \quad (38)$$
$$y''(t) + 0.12x(t) + 1.4y(t) - 0.75z(t) = 0.6\cos(0.58t) \quad (39)$$
$$z''(t) - 1.5x(t) - 1.5y(t) + 1.5z(t) = 1.25\cos(1.2t) \quad (40)$$

Selanjutnya, lakukan Transformasi *Laplace* pada masing-masing persamaan dan pada kedua ruas, dilambangkan dengan operator linier $\mathcal{L}$.

Laplace Persamaan (38):

- $\mathcal{L}\{x''(t) + 0.16x(t) - 0.9y(t) + 0.5z(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$
- $s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 0.16X(s) - 0.9Y(s) + 0.5Z(s) = 0$

Masukkan Kondisi awal $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y'(0) = 0$, dan $z'(0) = 0$.

- $(s^2 + 0.16)X(s) - 0.9Y(s) + 0.5Z(s) = 0$ (41)

Laplace Persamaan (39):

- $\mathcal{L}\{y''(t) + 0.12x(t) + 1.4y(t) - 0.75z(t) = \mathcal{L}\{0.6\cos 0.58t\}$
- $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 0.12x(t) + 1.4Y(s) - 0.75Z(s) = \dfrac{0.6s}{s^2 + 0.34}$

Masukkan Kondisi awal $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, $y'(0) = 0$, dan $z'(0) = 0$.

- $0.12X(s) + (s^2 + 1.4)Y(s) - 0.75Z(s) = \dfrac{0.6s}{s^2 + 0.34}$ (42)

Persamaan(40):

- $\mathcal{L}\{z''(t) - 1.5x(t) - 1.5y(t) + 1.5z(t)\} = \mathcal{L}\{1.25\cos(1.2t)\}$
- $s^2Z(s) - sz(0) - z'(0) - 1.5X(s) - 1.5Y(s) + 1.5Z(s) = \dfrac{1.25s}{s^2 + 1.44}$

Masukkan Kondisi awal $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y'(0) = 0$, dan $z'(0) = 0$.

- $-1.5X(s) - 1.5Y(s) + (s^2 + 1.5)Z(s) = \dfrac{1.25s}{s^2 + 1.44}$ (43)

Eliminasi Persamaan (41) dan Persamaan (42).

$$(41)\ (s^2+0.16)X(s)-0.9Y(s)+0.5Z(s)=0 \qquad \mid \times 2$$

$$(42)\ 0.12X(s)+(s^2+1.4)Y(s)-0.75Z(s)=\frac{0.6s}{s^2+0.34} \qquad \mid \times \frac{4}{3}$$

$$(2s^2+0.32)X(s)-1.8Y(s)+Z(s)=0$$

$$0.16X(s)+(1.33s^2+1.8)Y(s)-Z(s)=\frac{0.8s}{s^2+0.34} \qquad +$$

$$(2s^2+0.48)X(s)+1.33s^2Y(s)=\frac{0.8s}{s^2+0.34} \tag{44}$$

Eliminasi Persamaan (42) dan (43).

$$(42)\ 0.12X(s)+(s^2+1.4)Y(s)-0.75Z(s)=\frac{0.6s}{s^2+0.34} \qquad \mid \times \frac{25}{3}$$

$$(43)\ -1.5X(s)-1.5Y(s)+(s^2+1.5)Z(s)=\frac{1.25s}{s^2+1.44} \qquad \mid \times \frac{2}{3}$$

$$X(s)+(8.3s^2+11.6)Y(s)-6.2Z(s)=\frac{5s}{s^2+0.34}$$

$$-X(s)-Y(s)+(0.67s^2+1)Z(s)=\frac{0.83s}{s^2+1.44} \qquad +$$

$$(8.3s^2+10.6)Y(s)+(0.67s^2-5.2)Z(s)=\frac{5s}{s^2+0.34}+\frac{0.83s}{s^2+1.44} \tag{45}$$

Eliminasi Persamaan (43) dan Persamaan (44).

$$(43)\ -1.5X(s)-1.5Y(s)+(s^2+1.5)Z(s)=\frac{1.25s}{s^2+1.44} \qquad \mid \times (2s^2+0.48)$$

$$(44)\ (2s^2+0.48)X(s)+1.33s^2Y(s)=\frac{0.8s}{s^2+0.34} \qquad \mid \times 1.5$$

$$-1.5(2s^2+0.48)X(s)-(3s^2+0.72)Y(s)+(s^2+1.5)(2s^2+0.48)Z(s)=\frac{1.25s(2s^2+0.48)}{s^2+1.44}$$

$$1.5(2s^2+0.48)X(s)+2s^2Y(s)=\frac{1.2s}{s^2+0.34} \qquad +$$

$$(-s^2-0.72)Y(s)+(s^2+1.5)(2s^2+0.48)Z(s)=$$

$$\frac{1.25s(2s^2+0.48)}{s^2+1.44}+\frac{1.2s}{s^2+0.34} \tag{46}$$

Eliminasi Persamaan (46) dan Persamaan (45).

$$(46)\ (-s^2-0.72)Y(s)+(s^2+1.5)(2s^2+0.48)Z(s)=$$
$$\frac{1.25s(2s^2+0.48)}{s^2+1.44}+\frac{1.2s}{s^2+0.34} \qquad \mid \times (8.3s^2+10.6)$$

$$(45)\ (8.3s^2+10.6)Y(s)+(0.67s^2-5.2)Z(s)=$$
$$\frac{5s}{s^2+0.34}+\frac{0.83s}{s^2+1.44} \qquad \mid \times (s^2+0.72)$$

$$-(s^2+0.72)(8.3s^2+10.6)Y(s)+(s^2+1.5)(2s^2+0.48)(8.3s^2+10.6)Z(s)=$$

$\dfrac{1.25s(2s^2+0.48)(8.3s^2+10.6)}{s^2+1.44}+\dfrac{1.2s(8.3s^2+10.6)}{s^2+0.34}$

$(s^2+0.72)(8.3s^2+10.6)Y(s)+(0.67s^2-5.2)(s^2+0.72)Z(s)=$

$\dfrac{5s(s^2+0.72)}{s^2+0.34}+\dfrac{0.83s(s^2+0.72)}{s^2+1.44}(*)$ $+$

$$Z(s)=\frac{25s(5s^4+80325s^2+17394)}{(25s^2+36)(4s^6+1.24275\cdot 10^5s^4+94826s^2+9720)}$$
$$+\frac{5s(365s^2+408)}{(50s^2+17)(4s^6+1.24275\cdot 10^5s^4+94826s^2+9720)}$$

Lakukan Invers Transformasi *Laplace* pada $Z(s)$ sehingga diperoleh solusi masalah nilai awal untuk $z(t)$:

$$z(t)=-0.58e^{-1.4It}+0.51e^{-1.02It}+1.29e^{-0.3It}+1.2e^{0.3It}+0.51e^{1.01It}-$$
$$0.58e^{1.4It}+0.47\cos(1.2t)-2.9\cos(0.58t) \quad (47)$$

Substitusi $Z(s)$ ke Persamaan (*) sehingga diperoleh $Y(s)$.

$$Y(s)=\frac{12.5s(2.496250\cdot 10^6s^6+1.1619325\cdot 10^7s^4+1.0680304\cdot 10^7s^2+3.858396\cdot 10^6)}{(50s^2+17)(4s^6+1.24275\cdot 10^5s^4+94826s^2+9720)(25s^2+36)}$$

Lakukan Invers Transformasi *Laplace* pada $Y(s)$ sehingga diperoleh solusi masalah nilai awal untuk $y(t)$:

$$y(t)=0.75e^{-1.4It}+1.26e^{-1.01It}+0.7e^{-.03It}+0.7e^{0.3It}+1.26e^{1.01It}+0.75e^{1.4It}-$$
$$1.37\cos(0.58t)-4.07\cos(1.2t) \quad (48)$$

Setelah diperoleh solusi masalah nilai awal $z(t)$ dan $y(t)$, akan diperoleh solusi masalah nilai awal $x(t)$ dengan mensubstitusi $y(t)$ dan $z(t)$ ke Persamaan (39), sehingga didapatkan:

$$x(t)=5\cos(0.58t)-0.15e^{-1.4It}-0.72e^{-1.01It}+0.52e^{-0.3It}+0.52e^{0.3It}-$$
$$0.72e^{1.01It}-0.15e^{1.4It}-6.08\cos(0.58t)+1.59\cos(1.2t) \quad (49)$$

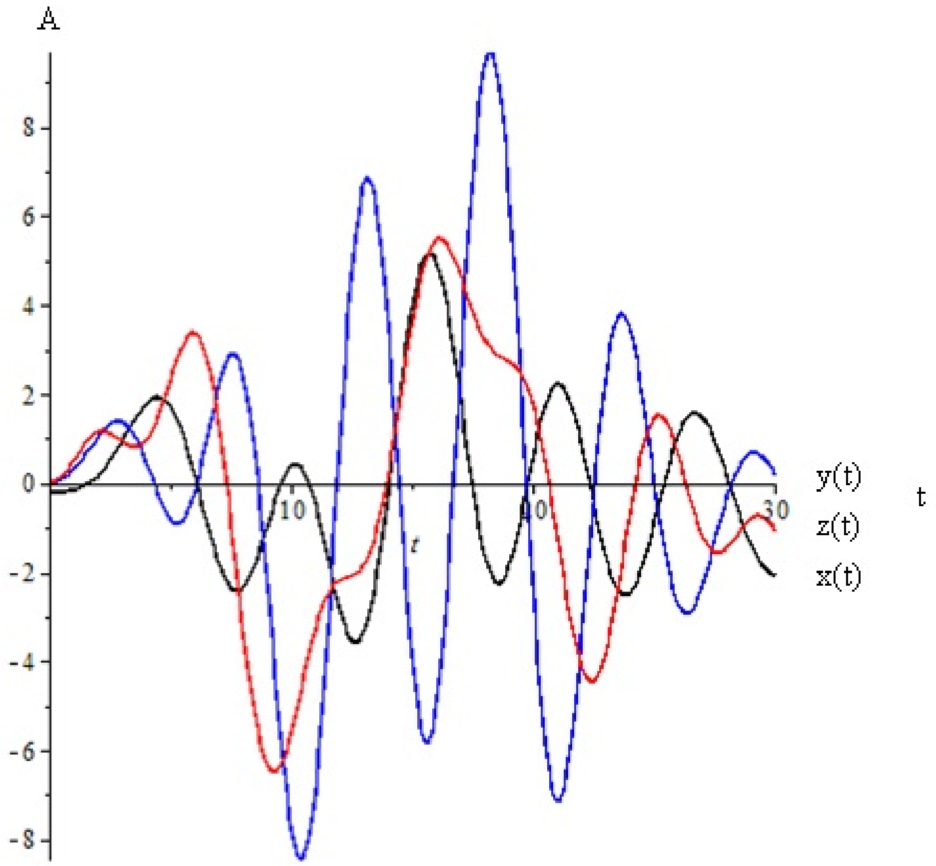
Secara garis besar, solusi masalah nilai awal untuk Model Asumsi Kedua adalah:

$$x(t)=5\cos(0.58t)-0.15e^{-1.4It}-0.72e^{-1.01It}+0.52e^{-0.3It}+0.52e^{0.3It}-$$
$$0.72e^{1.01It}-0.15e^{1.4It}-6.08\cos(0.58t)+1.59\cos(1.2t) \quad (49)$$

$$y(t) = 0.75e^{-1.4It} + 1.26e^{-1.01It} + 0.7e^{-.03It} + 0.7e^{0.3It} + 1.26e^{1.01It} + 0.75e^{1.4It} - 1.37\cos(0.58t) - 4.07\cos(1.2t) \quad (48)$$

$$z(t) = -0.58e^{-1.4It} + 0.51e^{-1.02It} + 1.29e^{-0.3It} + 1.2e^{0.3It} + 0.51e^{1.01It} - 0.58e^{1.4It} + 0.47\cos(1.2t) - 2.9\cos(0.58t) \quad (47)$$

Setelah memperoleh solusi masalah nilai awal untuk Model Asumsi Kedua, akan dilihat bagaimana perilaku getaran sistem pegas melalui grafik osilasi sebagai berikut.



Gambar 3.9: Grafik Osilasi Model Pegas Asumsi Kedua

Grafik 3.9 menunjukkan getaran berjalan fluktuatif, dengan simpangan yang kecil, kemudian menjadi besar, dan kembali mengecil, begitu seterusnya secara berselang-seling. Meskipun Pegas 2 dan Pegas 3 jenisnya osilasi paksa atau ada pengaruh gaya luar, namun gelombang yang dibentuk akan memiliki pola dengan simpangan demikian secara tetap tanpa henti atau gerak harmonik sederhana (karena tak ada peredam). Simpangan yang dihasilkan tiap pegas tidak berbeda jauh karena massa yang sama dan nilai konstanta pegas yang berbeda.

Besar periode tergantung dari massa yang digantungkan pada setiap pegas. Pergerakan pegas juga saling tumpang-tindih atau berpengaruh satu sama lain, misalnya ketika Pegas 1 sedang berosilasi ke bawah dengan melakukan regangan, maka Pegas 2 berosilasi ke atas dengan membentuk rapatan. Begitu juga sebaliknya, dan seterusnya bergiliran, layaknya gelombang longitudinal paga Gambar 3.8.

Perbedaan arah osilasi disebabkan karena setiap pegas memiliki waktu yang berbeda dalam melakukan getaran getaran pada suatu jangka waktu, tergantung pada beban masing-masing dan kekuatan pegas. Berikut ini adalah nilai dari Periode dan Frekuensi masing-masing Pegas.

Tabel 3.2: Tabel Periode dan Frekuensi Sistem Pegas Asumsi Kedua

	Periode (T) (dalam detik)	Frekuensi (f) (dalam Hertz)
Pegas 1	18.26 detik	0.054 Hz
Pegas 2	10.83 detik	0.092 Hz
Pegas 3	5.23 detik	0.191 Hz

Nilai periode terbesar dimiliki oleh Pegas 1 karena massa yang besar dan konstanta pegas yang kecil. Sedangkan frekuensi terbesar dimiliki oleh Pegas 3 karena massa yang kecil dan konstanta pegas yang besar.

Selanjutnya akan dilihat bagaimana model pegas dengan massa dan konstanta pegas jika dibedakan nilainya dan bagaimana pola getaran yang terjadi.

3.3 Solusi MNA dan Getaran Pegas Massa dan Konstanta Nonhomogen

Asumsikan massa m_1, m_2, dan m_3 bernilai berbeda, dan konstanta pegas k_1, k_2, dan k_3 juga bernilai berbeda. Setiap pegas memiliki keadaan berbeda ketika sedang bekerja. Pertama, akan ditelusuri Pegas 1 beserta penyusunan model dan bagaimana gaya yang terjadi.

Gaya yang dialami Pegas 1 ada 2, yaitu dalam keadaan setimbang berdasarkan hukum pertama *Newton* yang berarti resultan gaya ketiga pegas sama dengan 0 dan dalam keadaan umum atau memiliki percepatan yang berarti gaya massa pada Pegas 1 bergerak lurus beraturan (hukum kedua *Newton*). Massa Pegas 1 dihitung secara keseluruhan karena dibawah Pegas 1 bukan hanya terdapat Massa 1 saja, tetapi Pegas 2, Massa 2, Pegas 3, dan Massa 3 juga dihitung sebagai Massa Total 1 untuk Pegas 1. Selain itu, meskipun Pegas 2 dan Pegas 3 termasuk ke dalam massa total, kedua Pegas tetap dipertimbangkan gaya pegasnya. Massa total 2 Pegas 2 juga dihitung dari Massa 2, Pegas 3 sampai Massa 3. Sedangkan Pegas 3 hanya memiliki Massa 3 sebagai Massa Total 3. Maka dalam keadaan setimbang dapat dirumuskan dengan Persamaan (17). Ilustrasi untuk Persamaan (17) terdapat pada Gambar 3.1.

Tanda positif dan negatif pada gaya pegas menunjukkan arah gaya (dalam hal ini, arah ke atas adalah arah yang negatif). Resultan gaya pegas bernilai 0 dikarenakan adanya gaya pemulih (*Restoring Force*), yaitu dimana pegas kembali ke keadaan awalnya atau posisi semula. Pegas 1 mengalami gaya pegas dan mengalami pertambahan panjang karena adanya Massa 1. Selanjutnya Pegas 2 diberikan di bawah Massa 1. Massa 2 juga diberikan di bawah Pegas 2 sehingga Pegas 2 dan Pegas 1 mengalami pertambahan panjang. Selanjutnya Pegas 3 diberikan di bawah Massa 2 dan Massa 3 juga diberikan di bawah Pegas

3, sehingga Pegas 1 dan Pegas 2 kembali mengalami pertambahan panjang.

Pegas 1 akan mengalami gaya pegas ke atas, dan dipulihkan ke posisi setimbang oleh usaha dari Massa Total 1. Begitu juga dengan Pegas 2, akibat dari pergerakan Massa 1, Pegas 2 terdorong ke bawah dan dipulihkan oleh usaha dari Massa Total 2. Pegas 3 juga mengalami gaya pegas ke atas akibat pergerakan dari Massa 2 dan dipulihkan kembali ke posisi setimbang oleh usaha dari Massa Total 3. Sehingga pergerakan yang terjadi pada masing-masing pegas dan massa saling susul-menyusul arah. Hal ini yang mengakibatkan resultan gaya pegas sama dengan 0.

Prinsip gaya pemulih pada sistem pegas sama dengan gaya yang terjadi ketika seseorang berada di dalam mobil. Ketika mobil dalam keadaan diam, orang tersebut juga masih dalam keadaan diam. Pada saat mobil berjalan, tubuhnya akan terdorong ke belakang, katakanlah arahnya negatif. Namun, ketika mobil direm mendadak, tubuhnya akan terdorong ke depan, berarti arahnya positif. Artinya, tubuh orang tersebut memiliki kemampuan mempertahankan posisi awalnya agar tidak mengalami perpindahan, atau tubuhnya bergerak dengan kecepatan tetap.

Kemudian, dalam keadaan umum, berdasarkan hukum kedua *Newton*, gaya Pegas 1 dapat dirumuskan dengan Persamaan (18). Ilustrasi untuk Persamaan (18) terdapat pada Gambar 3.2. Persamaan (18) adalah jumlah gaya ketiga pegas (F_n), disertai dengan usaha masing-masing massa total (W_n), yang berbanding lurus dengan hukum kedua *Newton* atau Massa Total 1 dikali percepatan Pegas 1 (a_x) atau turunan kedua dari $x(t)$. $x(t)$ merupakan panjang Pegas 1 pada saat t. Sehingga bila dikembangkan hasilnya adalah sebagai berikut.

- $\sum_{n=1}^{3} (F_n + W_n) = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)a_x \ ; \ a_x = x''(t)$

- $\sum_{n=1}^{3}(F_n + W_n) = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$
- $F_1 + W_1 + F_2 + W_2 + F_3 + W_3 = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$
- $-k_1(s_1 + x(t)) + M_1 g + k_2(s_2 + y(t) - x(t)) - M_2 g - k_3(s_3 + z(t) - y(t) - x(t)) + M_3 g = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$
- $-k_1 s_1 + m_1 g + p_2 g + m_2 g + p_3 g + m_3 g + k_2 s_2 - m_2 g - p_3 g - m_3 g - k_3 s_3 + m_3 g - k_1 x(t) + k_2 y(t) - k_2 x(t) - k_3 z(t) + k_3 y(t) + k_3 x(t) = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$
- $(-k_1 s_1 + m_1 g + k_2 s_2 + p_2 g - k_3 s_3 + m_3 g) - k_1 x(t) + k_2 y(t) - k_2 x(t) - k_3 z(t) + k_3 y(t) + k_3 x(t) = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$

Berdasarkan Persamaan (17):

- $(-k_1 - k_2 + k_3)x(t) + (k_2 + k_3)y(t) - k_3 z(t) = (m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t)$
- $(m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3)x''(t) - (-k_1 - k_2 + k_3)x(t) - (k_2 + k_3)y(t) + k_3 z(t) = 0$
- $x''(t) - \frac{(-k_1 - k_2 + k_3)}{m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3}x(t) - \frac{(k_2 + k_3)}{m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3}y(t) + \frac{k_3}{m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3}z(t) = 0$; $M_1 = m_1 + m_2 + m_3 + p_2 + p_3$
- $x''(t) - \frac{(-k_1 - k_2 + k_3)}{M_1}x(t) - \frac{(k_2 + k_3)}{M_1}y(t) + \frac{k_3}{M_1}z(t) = 0$

Maka diperoleh persamaan untuk keadaan Pegas 1, yaitu:

$$x''(t) - \frac{(-k_1 - k_2 + k_3)}{M_1}x(t) - \frac{(k_2 + k_3)}{M_1}y(t) + \frac{k_3}{M_1}z(t) = 0. \tag{50}$$

Selanjutnya, akan ditinjau gaya yang dialami Pegas 2. Gaya yang dialami Pegas 2 ada 3, yaitu dalam keadaan setimbang berdasarkan hukum pertama *Newton*, dalam keadaan umum (Hukum kedua *Newton*), dan gaya luar yang bekerja pada Massa 2. Maka dalam keadaan setimbang dapat dirumuskan dengan Persamaan (20). Pada persamaan (20) tidak dilihat lagi pergerakan Pegas 1 karena akan difokuskan pada bagaimana keadaan fisis pada Pegas 2 dan benda lain di bawahnya saja. Pegas 2 mengalami gaya pegas ke atas setelah diberikan Massa 2 di bawahnya, kemudian dipulihkan ke posisi setimbang oleh usaha dari Massa 2. Kemudian di bawah Massa 2 diberikan Pegas 3 dan Massa 3 di bawah Pegas 3 sehingga Massa Total 2 adalah jumlah dari Massa 2, Massa Pegas 3, dan Massa 3. Gaya Pegas 3 juga ditinjau meskipun merupakan bagian dari Massa Total 2. Pegas 3 mengalami gaya pegas ke bawah akibat dorongan dari usaha Massa 2, dan dipulihkan oleh usaha Massa 3 ke posisi setimbang. Hal ini mengakibatkan resultan gaya sama dengan 0. Ilustrasi untuk Persamaan (20) terdapat pada Gambar 3.3.

Pada keadaan Pegas 2 terdapat pengaruh gaya luar. Pengaruh gaya luar yang dimaksud adalah gaya dengan cara menarik Massa 2 ke bawah namun dengan kemiringan sebesar sudut tertentu, katakanlah gayanya sebesar F_0 Newton. Sehingga bila diilustrasikan seperti membentuk segitiga siku-siku, dengan arah tarikan sebagai sisi miring, dan garis horizontal sebagai sisi datar. Maka sudut yang dibentuk akibat gaya tersebut adalah sudut *cosinus*. Nilai sudut *cosinus* berupa perkalian antara kecepatan sudut (ω_2) dengan waktu (t). Maka gaya luar tersebut sebesar $F_0 \cos \omega_2 t$ Newton.

Dengan adanya gaya luar sebesar $F_0 \cos \omega_2 t$ Newton, dalam keadaan umum, berdasarkan hukum kedua *Newton*, gaya Pegas 2 dapat dirumuskan dengan Persamaan (21). Ilustrasi untuk Persamaan (21) terdapat pada Gambar 3.4. Persamaan (21) menjelaskan bahwa jumlah gaya Pegas 2 dan Pegas 3, diikuti usaha masing-masing massa dan gaya luar yang diberikan terhadap Massa 2, berbanding lurus dengan hukum kedua *Newton* atau Massa Total 2 dikali percepatan Pegas 2 (a_y) atau turunan kedua dari $y(t)$. $y(t)$ merupakan panjang Pegas 2 pada saat t. Sehingga bila dikembangkan hasilnya adalah sebagai berikut.

- $\sum_{n=2}^{3} (F_n + W_n) + F_0 \cos \omega_2 t = (m_2 + m_3 + p_3)a_y \ ; \ a_y = y''(t)$
- $\sum_{n=2}^{3} (F_n + W_n) + F_0 \cos \omega_2 t = (m_2 + m_3 + p_3)y''(t)$
- $F_2 + W_2 + F_3 + W_3 + F_0 \cos \omega_2 t = (m_2 + m_3 + p_3)y''(t)$

- $-k_2(s_2+y(t)-x(t))+m_2g+p_3g+m_3g+k_3(s_3+z(t)-y(t)-x(t))-m_3g+$ $F_0\cos\omega_2 t=(m_2+m_3+p_3)y''(t)$
- $-k_2s_2+m_2g+p_3g+m_3g+k_3s_3-m_3g-k_2y(t)+k_2x(t)+k_3z(t)-k_3y(t)-$ $k_3x(t)+F_0\cos\omega_2 t=(m_2+m_3+p_3)y''(t)$

Berdasarkan Persamaan (20):

- $-k_2y(t)+k_2x(t)+k_3z(t)-k_3y(t)-k_3x(t)+F_0\cos\omega_2 t=(m_2+m_3+p_3)y''(t)$
- $(m_2+m_3+p_3)y''(t)-(k_2-k_3)x(t)-(-k_2-k_3)y(t)-k_3z(t)=$ $F_0\cos\omega_2 t$
- $y''(t)-\frac{(k_2-k_3)}{m_2+m_3+p_3}x(t)-\frac{(-k_2-k_3)}{m_2+m_3+p_3}y(t)-\frac{k_3}{m_2+m_3+p_3}z(t)=$ $\frac{F_0}{m_2+m_3+p_3}\cos\omega_2 t$; $M_2=m_2+m_3+p_3$
- $y''(t)-\frac{(k_2-k_3)}{M_2}x(t)-\frac{(-k_2-k_3)}{M_2}y(t)-\frac{k_3}{M_2}z(t)=\frac{F_0}{M_2}\cos\omega_2 t$

Maka diperoleh persamaan untuk keadaan Pegas 2, yaitu:

$$y''(t)-\frac{(k_2-k_3)}{M_2}x(t)-\frac{(-k_2-k_3)}{M_2}y(t)-\frac{k_3}{M_2}z(t)=\frac{F_0}{M_2}\cos\omega_2 t. \quad (51)$$

Selanjutnya, akan ditinjau gaya yang dialami Pegas 3. Gaya yang dialami pegas ketiga ada 3, yaitu dalam keadaan setimbang berdasarkan hukum pertama *Newton*, dalam keadaan umum (Hukum kedua *Newton*), dan gaya luar yang juga bekerja pada Massa 3. Maka dalam keadaan setimbang dapat dirumuskan dengan Persamaan (23). Pada persamaan (23) tidak dilihat lagi pergerakan Pegas 1 dan Pegas 2 karena akan difokuskan pada bagaimana keadaan fisis pada Pegas 3 dan benda lain di bawahnya saja. Pegas 3 mengalami gaya pegas ke atas setelah diberikan Massa 3 di bawahnya, kemudian dipulihkan ke posisi setimbang oleh usaha dari Massa 3. Hal ini mengakibatkan resultan gaya sama dengan 0. Ilustrasi untuk Persamaan (23) terdapat pada Gambar 3.5.

Pada keadaan Pegas 3 terdapat pengaruh gaya luar. Pengaruh gaya luar yang dimaksud adalah gaya dengan cara menarik Massa 2 ke bawah namun dengan kemiringan sebesar sudut tertentu, katakanlah gayanya sebesar F_0 Newton. Sehingga bila diilustrasikan seperti membentuk segitiga siku-siku, dengan arah tarikan sebagai sisi miring, dan garis horizontal sebagai sisi datar. Maka sudut yang dibentuk akibat gaya tersebut adalah sudut *cosinus*. Nilai sudut *cosinus* berupa perkalian antara kecepatan sudut (ω_3) dengan waktu (t). Maka gaya luar tersebut sebesar $F_0 \cos \omega_3 t$ Newton.

Dengan adanya gaya luar, dalam keadaan umum, berdasarkan hukum kedua *Newton*, gaya Pegas 3 dapat dirumuskan dengan Persamaan (24). Ilustrasi untuk Persamaan (24) terdapat pada Gambar 3.6. Persamaan (24) menjelaskan bahwa jumlah antara gaya pegas 3, usaha Massa Total 3, dan gaya luar berbanding lurus dengan hukum kedua *Newton* atau Massa Total 3 dikali percepatan Pegas 3 (a_z) atau turunan kedua dari $z(t)$. $z(t)$ adalah panjang Pegas 3 pada saat t. Sehingga bila dikembangkan hasilnya adalah sebagai berikut.

- $F_3 + W_3 + F_0 \cos \omega_3 t = m_3 a_z$; $a_z = z''(t)$
- $-k_3(s_3 + z(t) - y(t) - x(t)) + m_3 g + F_0 \cos \omega_3 t = m_3 z''(t)$
- $-k_3 s_3 + m_3 g + k_3 x(t) + k_3 y(t) - k_3 z(t) + F_0 \cos \omega_3 t = m_3 z''(t)$

Berdasarkan Persamaan (23):

- $k_3 x(t) + k_3 y(t) - k_3 z(t) + F_0 \cos \omega_3 t = m_3 z''(t)$
- $m_3 z''(t) - k_3 x(t) - k_3 y(t) + k_3 z(t) = F_0 \cos \omega_3 t$
- $z''(t) - \frac{k_3}{m_3} x(t) - \frac{k_3}{m_3} y(t) + \frac{k_3}{m_3} z(t) = \frac{F_0}{m_3} \cos \omega_3 t$; $M_3 = m_3$
- $z''(t) - \frac{k_3}{M_3} x(t) - \frac{k_3}{M_3} y(t) + \frac{k_3}{M_3} z(t) = \frac{F_0}{M_3} \cos \omega_3 t$

Maka diperoleh persamaan untuk keadaan Pegas 3, yaitu

$$z''(t) - \frac{k_3}{M_3} x(t) - \frac{k_3}{M_3} y(t) + \frac{k_3}{M_3} z(t) = \frac{F_0}{M_3} \cos \omega_3 t. \tag{52}$$

Sehingga Model Asumsi Ketiga secara garis besar adalah:

$$x''(t) - \frac{(-k_1 - k_2 + k_3)}{M_1} x(t) - \frac{(k_2 + k_3)}{M_1} y(t) + \frac{k_3}{M_1} z(t) = 0. \tag{50}$$

$$y''(t) - \frac{(k_2 - k_3)}{M_2} x(t) - \frac{(-k_2 - k_3)}{M_2} y(t) - \frac{k_3}{M_2} z(t) = \frac{F_0}{M_2} \cos \omega_2 t. \tag{51}$$

$$z''(t) - \frac{k_3}{M_3}x(t) - \frac{k_3}{M_3}y(t) + \frac{k_3}{M_3}z(t) = \frac{F_0}{M_3}\cos\omega_3 t. \tag{52}$$

Setelah memperoleh model untuk asumsi pertama, langkah selanjutnya adalah mencari Solusi MNA dari model tersebut. Metode yang digunakan adalah Transformasi *Laplace*. Sebelum melakukan transformasi, substitusikan terlebih dahulu data dari hasil Laporan Praktikum Pegas Spiral oleh Anita Nurdianingrum (2011).

$$m_1 = 2 \text{ kg}$$
$$m_2 = 4 \text{ kg}$$
$$m_3 = 1 \text{ kg}$$
$$p_2 = p_3 = 0.0143 \text{ kg}$$
$$k_1 = 3 \text{ Newton/m}$$
$$k_2 = 5 \text{ Newton/m}$$
$$k_3 = 6 \text{ Newton/m}$$
$$F_0 = 5 \text{ Newton}$$

Kecepatan sudut ω_2 adalah sebagai berikut:

$$\frac{1}{k_{total2}} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30} \rightarrow k_{total2} = \frac{30}{11} = 2.7$$
$$m_{total2} = M_2 = m_2 + m_3 + p_3 = 4 + 1 + 0.0143 = 5.0143$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_{total2}}{m_{total2}}} = \sqrt{\frac{2.7}{5.0143}} = 0.73$$

Sedangkan kecepatan sudut ω_3 adalah:

$$\frac{1}{k_{total3}} = \frac{1}{k_3} = \frac{1}{6} \rightarrow k_{total3} = 6$$
$$m_{total3} = M_3 = m_3 = 4$$
$$\omega_3 = \sqrt{\frac{k_{total3}}{m_{total3}}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = 1.2$$

Sehingga model Asumsi Ketiga menjadi:

$$x''(t) + 0.3x(t) - 1.6y(t) + 0.9z(t) = 0 \tag{53}$$

$$y''(t) + 0.2x(t) - 2y(t) - 1.2z(t) = \cos(0.73t) \tag{54}$$

$$z''(t) - 1.5x(t) - 1.5y(t) + 1.5z(t) = 1.25\cos(2.4t) \tag{55}$$

Selanjutnya, lakukan Transformasi *Laplace* pada masing-masing persamaan dan pada kedua ruas, dilambangkan dengan operator linier $\mathcal{L}$.

Laplace Persamaan (53):

- $\mathcal{L}\{x''(t) + 0.3x(t) - 1.6y(t) + 0.9z(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$
- $s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 0.3X(s) - 1.6Y(s) + 0.9Z(s) = 0$

Masukkan Kondisi awal $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y'(0) = 0$, dan $z'(0) = 0$.

- $(s^2 + 0.3)X(s) - 1.6Y(s) + 0.9Z(s) = 0$ (56)

Laplace Persamaan (54):

- $\mathcal{L}\{y''(t) + 0.2x(t) - 2y(t) - 1.2z(t) = \mathcal{L}\{\cos 0.73t\}$
- $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 0.2x(t) - 2Y(s) - 1.2Z(s) = \dfrac{s}{s^2 + 0.5}$

Masukkan Kondisi awal $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, $y'(0) = 0$, dan $z'(0) = 0$.

- $0.2X(s) + (s^2 - 2)Y(s) - 1.2Z(s) = \dfrac{s}{s^2 + 0.5}$ (57)

Laplace Persamaan(55):

- $\mathcal{L}\{z''(t) - 1.5x(t) - 1.5y(t) + 1.5z(t)\} = \mathcal{L}\{1.25\cos(2.4t)\}$
- $s^2Z(s) - sz(0) - z'(0) - 1.5X(s) - 1.5Y(s) + 1.5Z(s) = \dfrac{1.25s}{s^2 + 5.7}$

Masukkan Kondisi awal $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y'(0) = 0$, dan $z'(0) = 0$.

- $-1.5X(s) - 1.5Y(s) + (s^2 + 1.5)Z(s) = \dfrac{1.25s}{s^2 + 5.7}$ (58)

Eliminasi Persamaan (56) dan Persamaan (57).

(56) $(s^2 + 0.3)X(s) - 1.6Y(s) + 0.9Z(s) = 0 \qquad | \times 1.2$

(57) $0.2X(s) + (s^2 - 2)Y(s) - 1.2Z(s) = \dfrac{s}{s^2 + 0.5} \qquad | \times 0.9$

$(1.2s^2 + 0.36)X(s) - 1.9Y(s) + 0.9 \cdot 1.2Z(s) = 0$

$0.19X(s) + (0.9s^2 - 1.8)Y(s) - 0.9 \cdot 1.2Z(s) = \dfrac{0.9s}{s^2 + 0.5} \qquad +$

$$(1.2s^2+0.55)X(s)+(0.9s^2-3.7)Y(s)=\frac{0.9s}{s^2+0.5} \tag{59}$$

Eliminasi Persamaan (57) dan (58).

$$(57)\ 0.2X(s)+(s^2-2)Y(s)-1.2Z(s)=\frac{s}{s^2+0.5} \qquad |\times 1.5$$

$$(58)\ -1.5X(s)-1.5Y(s)+(s^2+1.5)Z(s)=\frac{1.25s}{s^2+5.7} \qquad |\times 0.2$$

$$0.2\cdot 1.5X(s)+(1.5s^2-3)Y(s)-1.8Z(s)=\frac{1.5s}{s^2+0.5}$$

$$-0.2\cdot 1.5X(s)-0.3Y(s)+(0.2s^2+0.3)Z(s)=\frac{0.25s}{s^2+5.7} \qquad +$$

$$(1.5s^2-3.3)Y(s)+(0.2s^2-1.5)Z(s)=\frac{1.5s}{s^2+0.5}+\frac{0.25s}{s^2+5.7} \tag{60}$$

Eliminasi Persamaan (58) dan Persamaan (59).

$$(58)\ -1.5X(s)-1.5Y(s)+(s^2+1.5)Z(s)=\frac{1.25s}{s^2+5.7} \qquad |\times(1.2s^2+0.55)$$

$$(59)\ (1.2s^2+0.55)X(s)+(0.9s^2-3.7)Y(s)=\frac{0.9s}{s^2+0.5} \qquad |\times 1.5$$

$$-1.5X(s)-(1.8s^2+0.8)Y(s)+(s^2+1.5)(1.2s^2+0.55)Z(s)=\frac{1.25s(1.2s^2+0.55)}{(s^2+5.7)}$$

$$1.5(1.2s^2+0.55)X(s)+(1.35s^2-5.5)Y(s)=\frac{1.35s}{s^2+0.5} \qquad +$$

$$(-0.45s^2-6.3)Y(s)+(s^2+1.5)(1.2s^2+0.55)Z(s)=\frac{1.25s(1.2s^2+0.55)}{s^2+5.7}+\frac{1.35s}{s^2+0.5} \tag{61}$$

Eliminasi Persamaan (61) dan Persamaan (60).

$$(61)\ (-0.45s^2-6.3)Y(s)+(s^2+1.5)(1.2s^2+0.55)Z(s)=\frac{1.25s(1.2s^2+0.55)}{s^2+5.7}+\frac{1.35s}{s^2+0.5} \qquad |\times(1.5s^2-3.3)$$

$$(60)\ (1.5s^2-3.3)Y(s)+(0.2s^2-1.5)Z(s)=\frac{1.5s}{s^2+0.5}+\frac{0.25s}{s^2+5.7} \ |\times(-0.45s^2-6.3)$$

$$(-0.45s^2-6.3)(1.5s^2-3.3)Y(s)+(s^2+1.5)(1.2s^2+0.55)(1.5s^2-3.3)Z(s)=\frac{1.25s(1.2s^2+0.55)(1.5s^2-3.3)}{s^2+5.7}+\frac{1.35s(1.5s^2-3.3)}{s^2+0.5}$$

$$(-0.45s^2-6.3)(1.5s^2-3.3)+(0.2s^2-1.5)(-0.45s^2-6.3)Z(s)=\frac{1.5s(-0.45s^2-6.3)}{s^2+0.5}+\frac{0.25s(-0.45s^2-6.3)}{s^2+5.7}(*) \qquad -$$

$$Z(s)=\frac{s(6s^6+50s^4+47435s^2+74999)}{(10s^2+57)(2s^2+1)(240s^6-46s^4-791s^2-1623)}$$

Lakukan Invers Transformasi *Laplace* pada $Z(s)$ sehingga diperoleh solusi masalah nilai awal untuk $z(t)$:

$$z(t) = -0.38\cos(0.7t) - 0.29\cos(2.38t) + 0.08e^{-1.5t} + (0.12+ \\ 0.09I)e^{(-0.4-1.18I)t} + (0.12 - 0.09I)e^{(-0.4+1.18I)t} + \\ (0.12 - 0.09I)e^{(0.4-1.18I)t} + (0.12 + 0.09I)e^{(0.4+1.18I)t} + 0.08e^{1.59t} \tag{62}$$

Substitusi $Z(s)$ ke Persamaan (*) sehingga diperoleh $Y(s)$.

$Y(s) = \dfrac{0.67s(24000s^8 + 2.414 \cdot 10^5 s^6 - 1.84 \cdot 10^5 s^4 - 5.88 \cdot 10^5 s^2 - 8.4 \cdot 10^5)}{(5s^2 - 11)(10s^2 + 57)(2s^2 + 1)(240s^6 - 46s^4 - 791s^2 - 1623)}$

Lakukan Invers Transformasi *Laplace* pada $Y(s)$ sehingga diperoleh solusi masalah nilai awal untuk $y(t)$:

$$y(t) = -0.2\cos(0.7t) + 0.08\cos(2.38t) + 0.15e^{-1.59t} + \\ (-0.035 - 0.037I)e^{(-0.4-1.18I)t} + (-0.035 + 0.037)e^{(-0.4+1.18I)t} + \\ (-0.035 + 0.037I)e^{(0.4-1.18I)t} + (-0.035 - 0.037I)e^{(0.4+1.18I)t} + 0.15e^{1.59t} - \\ 0.04\cosh(1.48t) \tag{63}$$

Setelah diperoleh solusi masalah nilai awal $z(t)$ dan $y(t)$, akan diperoleh solusi masalah nilai awal $x(t)$ dengan mensubstitusi $y(t)$ dan $z(t)$ ke Persamaan (54), sehingga didapatkan:

$$x(t) = 5\cos(0.73t) - 5.03\cos(0.7t) + 1.5\cos(2.38t) + 0.06e^{-1.59t} + (-0.005 - \\ 0.15I)e^{(0.4-1.18I)t} + (-0.005 - 0.15I)e^{(-0.4+1.18I)t} + (-0.005 + \\ 0.15I)e^{(-0.4-1.18I)t} + (-0.005 + 0.15I)e^{(0.4+1.18I)t} + \\ 0.06e^{1.59t} + 0.04\cosh(1.48t) \tag{64}$$

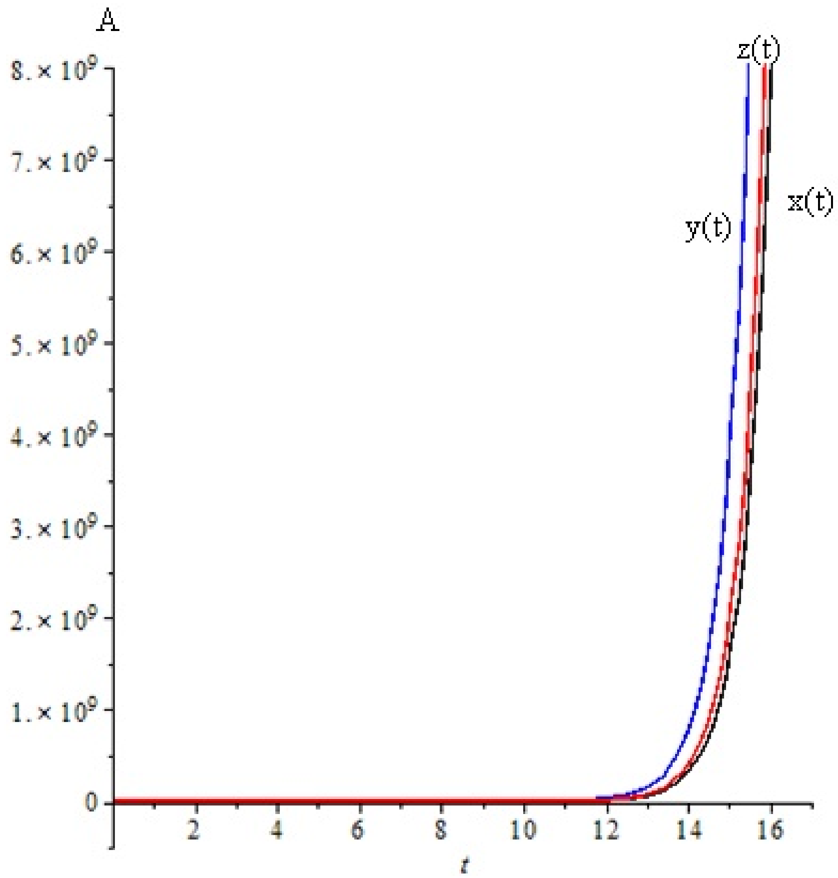
Secara garis besar, solusi masalah nilai awal untuk Model Asumsi Ketiga adalah:

$$x(t) = 5\cos(0.73t) - 5.03\cos(0.7t) + 1.5\cos(2.38t) + 0.06e^{-1.59t} + (-0.005 - \\ 0.15I)e^{(0.4-1.18I)t} + (-0.005 - 0.15I)e^{(-0.4+1.18I)t} + (-0.005 + \\ 0.15I)e^{(-0.4-1.18I)t} + (-0.005 + 0.15I)e^{(0.4+1.18I)t} + \\ 0.06e^{1.59t} + 0.04\cosh(1.48t) \tag{64}$$

$$y(t) = -0.2\cos(0.7t) + 0.08\cos(2.38t) + 0.15e^{-1.59t} +$$

$$(-0.035 - 0.037I)e^{(-0.4-1.18I)t} + (-0.035 + 0.037)e^{(-0.4+1.18I)t} +$$
$$(-0.035 + 0.037I)e^{(0.4-1.18I)t} + (-0.035 - 0.037I)e^{(0.4+1.18I)t} + 0.15e^{1.59t} -$$
$$0.04\cosh(1.48t) \qquad (63)$$
$$z(t) = -0.38\cos(0.7t) - 0.29\cos(2.38t) + 0.08e^{-1.5t} + (0.12+$$
$$0.09I)e^{(-0.4-1.18I)t} + (0.12 - 0.09I)e^{(-0.4+1.18I)t} +$$
$$(0.12 - 0.09I)e^{(0.4-1.18I)t} + (0.12 + 0.09I)e^{(0.4+1.18I)t} + 0.08e^{1.59t} \qquad (62)$$

Setelah memperoleh solusi masalah nilai awal untuk Model Asumsi Ketiga, akan dilihat bagaimana perilaku getaran sistem pegas melalui grafik osilasi sebagai berikut.



Gambar 3.10: Grafik Osilasi Model Pegas Asumsi Ketiga

Grafik 3.10 menunjukkan pegas semakin jauh dari posisi setimbang atau makin menjauh ke bawah dari posisi setimbang. Kemungkinannya ada 2. Pertama pegas telah melewati batas elastisitasnya akibat massa yang tidak sebanding dengan kekuatan pegas sehingga pegas tidak akan kembali ke bentuk semula. Kedua, Pegas akan putus dan jatuh dari penampang bersama masing-masing massa karena tidak kuat menahan beban. Hal ini dikarenakan setiap pegas memiliki konstanta yang kekuatannya lebih kecil dari nilai masing-masing massa atau beban yang terlalu berat dan berbeda-beda nilainya.

Untuk mengetahui perbedaan diantara ketiga model asumsi pegas, kelebihan dan kekurangannya, akan dijelaskan pada subbab berikutnya.

3.4 Perbandingan Antar Ketiga Model Pegas

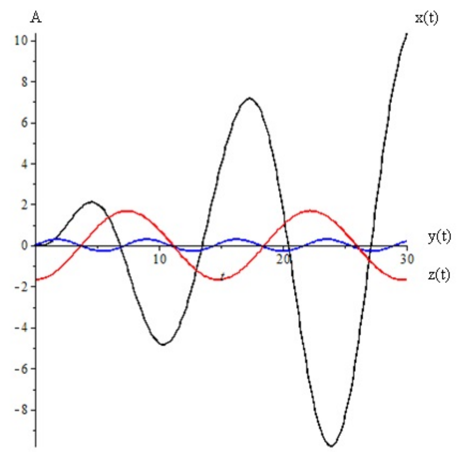
Pada subbab ini akan dijelaskan bagaimana hubungan antar Model Asumsi Sistem Pegas. Selain itu, akan dipaparkan Model manakah yang lebih baik untuk diterapkan dalam kehidupan sehari-hari dan bagaimana sebaiknya model yang kurang efektif diperbaiki agar tercipta getaran yang stabil.

1. **Perbandingan Antara Model Asumsi Pertama dengan Model Asumsi Kedua**

   Untuk melihat perbandingan antara Model Asumsi Pertama dengan Model Asumsi Kedua, dapat diperhatikan dari grafik masing-masing model. Grafik Model Asumsi Pertama terdapat pada Gambar 3.7. Telah diketahui bahwa osilasi yang dialami sistem pegas dengan massa berbeda dan konstanta pegas yang sama memiliki pergerakan getaran yang sangat lambat dan simpangan yang semakin besar per periodenya. Jika dibandingkan dengan Model Asumsi Kedua, Model Pertama kurang efektif karena meskipun elastis, tetapi memerlukan waktu yang lama untuk kembali ke posisi semula atau bentuk semula.

Sedangkan Grafik Model Asumsi Kedua yang diilustrasikan pada Gambar 3.9, memiliki kestabilan osilasi atau getaran pada setiap pegasnya. Selain itu, rata-rata periode setiap pegas tidak begitu lama dan cukup singkat untuk melakukan satu getaran penuh. Simpangan yang terjadi juga seimbang dan tidak berbeda jauh tiap periode sehingga untuk kembali ke posisi semula akan lebih cepat dibandingkan dengan Model Asumsi Pertama.

Agar Model Asumsi Pertama bisa melakukan satu getaran penuh lebih cepat, bisa dengan cara menyamakan nilai massa dan membedakan nilai konstanta pegas, atau dengan cara menyamakan nilai massa saja. Apabila nilai massa disamakan ketiganya dan nilai konstanta pegas bernilai sama pula ketiganya, maka osilasi yang terjadi akan relatif lebih singkat dan simpangannya rendah. Hal ini dapat digambarkan seperti pada grafik di bawah ini.



Gambar 3.11: Grafik Osilasi Model Pegas dengan Massa dan Konstanta Pegas Homogen

2. **Perbandingan Antara Model Asumsi Pertama dengan Model Asumsi Ketiga**

   Untuk melihat perbandingan antara Model Asumsi Pertama dengan Model Asumsi Ketiga, dapat diperhatikan dari grafik masing-masing model. Grafik Model Asumsi Pertama terdapat pada Gambar 3.7. Telah diketahui bahwa osilasi yang dialami sistem pegas dengan massa berbeda dan konstanta pegas yang sama memiliki pergerakan getaran yang sangat lambat dan simpangan yang semakin besar per periodenya. Jika dibandingkan dengan Model Asumsi Kedua, Model Pertama kurang efektif karena meskipun elastis, tetapi memerlukan waktu yang lama untuk kembali ke posisi semula atau bentuk semula.

   Sedangkan Grafik Model Asumsi Ketiga yang diilustrasikan pada Gambar 3.10, amplitudo setiap pegas cenderung naik, atau pegas-pegas tersebut cenderung tidak kembali pada bentuk semula akibat telah melebihi batas elastisitas. Kemungkinan lainnya adalah pegas-pegas tersebut putus dan jatuh bersama masing-masing massa karena tidak mampu menahan beban. Hal ini jelas menggambarkan betapa tidak efektifnya sistem pegas dengan massa dan konstanta pegas yang berbeda.

   Meskipun pada poin 1 dikatakan bahwa Model Asumsi Pertama kurang efektif, namun masih lebih baik dibandingkan Model Asumsi Ketiga, karena walaupun memiliki periode yang besar, namun masih ada kemungkinan pegas-pegas akan kembali ke posisi setimbang. Agar Model Asumsi Ketiga menjadi efektif, sama halnya dengan Model Asumsi Pertama, yaitu dengan melakukan penyamaan massa dan konstanta pegas atau melakukan penyamaan hanya pada massa saja. Ilustrasi grafik osilasi untuk massa dan konstanta pegas homogen ada di Gambar 3.11.

3. **Perbandingan Antara Model Asumsi Kedua dengan Model Asumsi Ketiga**

   Untuk melihat perbandingan antara Model Asumsi Kedua dengan Model Asumsi Ketiga, dapat diperhatikan dari grafik masing-masing model. Grafik Model Asumsi Ketiga yang diilustrasikan pada Gambar 3.10, amplitudo setiap pegas cenderung naik, atau pegas-pegas tersebut cenderung tidak kembali pada bentuk semula akibat telah melebihi batas elastisitas. Kemungkinan lainnya adalah pegas-pegas tersebut putus dan jatuh bersama masing-masing massa karena tidak mampu menahan beban. Hal ini jelas menggambarkan betapa tidak efektifnya sistem pegas dengan massa dan konstanta pegas yang berbeda.

   Sedangkan Grafik Model Asumsi Kedua yang diilustrasikan pada Gambar 3.9, memiliki kestabilan osilasi atau getaran pada setiap pegasnya. Selain itu, rata-rata periode setiap pegas tidak begitu lama dan cukup singkat untuk melakukan satu getaran penuh. Simpangan yang terjadi juga seimbang dan tidak berbeda jauh tiap periode sehingga untuk kembali ke posisi semula akan lebih cepat.

   Agar Model Asumsi Ketiga menjadi efektif, sama halnya dengan Model Asumsi Pertama, yaitu dengan melakukan penyamaan massa dan konstanta pegas atau melakukan penyamaan hanya pada massa saja. Ilustrasi grafik osilasi untuk massa dan konstanta pegas homogen ada di Gambar 3.11.

4. **Perbandingan Antara Model Asumsi Pertama, Model Asumsi Kedua, dan Model Asumsi Ketiga**

   Grafik pada Model Asumsi Pertama memiliki periode yang besar dan simpangan yang semakin besar per periode. Hal ini menunjukkan kurang efektifnya getaran karena sangat lambat, bahkan semakin melambat setiap detik. Grafik pada Model Asumsi Ketiga juga memiliki kekurangan, bahkan tidak efektif karena masalah perbedaan massa dan konstanta pegas yang tidak sepadan.

Berbeda dengan Grafik pada Model Asumsi Pegas Kedua yang cenderung stabil dan simpangan yang juga seimbang. Agar Model Asumsi Pertama dan Model Asumsi Ketiga menjadi efektif adalah dengan cara melakukan penyamaan massa dan konstanta pegas atau menyamakan massa saja. Sehingga osilasinya tergambar pada Gambar 3.11.

Perlu diperhatikan, apabila dalam kasus Model Asumsi Pertama massa terberat letaknya di bawah, maka Pegas 1 dan Pegas 2 akan mengalami perlambatan getaran juga atau nilai periode besar, seperti yang dialami massa terberat di bawah. Untuk Model Asumsi Kedua, apabila konstanta pegas terbesar dimiliki Pegas 1, maka getaran pada Pegas 2 dan Pegas 3 akan semakin banyak dan periodenya kecil, meskipun masing-masing pegas bermassa sama.

Pegas yang efektif dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, misalnya pada pegas sepeda motor untuk menahan guncangan karena jalanan yang dilalui tidak rata, dengan fungsi pegas sebagai penyerap getaran dan guncangan dari jalanan tersebut sehingga getaran tidak merambat sampai ke beban yang ditopang pegas. Selain itu, dengan 3 susun pegas secara seri, semakin memperhambat getaran untuk mencapai beban yang ditopang, akibat panjangnya rangkaian pegas dan memberi efek nyaman.