PENENTUAN HARGA KONTRAK OPSI ASIA

MENGGUNAKAN METODE *QUASI MONTE CARLO*

Skripsi

Disusun untuk melengkapi syarat-syarat

guna memperoleh gelar Sarjana Sains

FATMAH AINURROCHMA

3125120210

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA

2017

ABSTRACT

FATMAH AINURROCHMA, 3125120210. *Asian Options Pricing Using Quasi Monte Carlo Methods. Thesis. Faculty of Mathematics and Natural Science Jakarta State University. 2017.*

The development of the investment is currently growing rapidly, so that more and more alternative investment can be the choice of investors in investing. Alternative means offered by the company is derivative products, one of the most known of derivative products is the option. Stock are underlying options which most populer. There are two commonly used options, the European Option and the American Option. Both options have a payoff which only depends on the asset price when it is executed. Under Asian Options to be used in this thesis, its payoff not only depends on asset price when it is executed but also depends on the averege asset prices over the lifetime of the option. The average type used is the arithmetic average using the Quasi Monte Carlo method. The Quasi Monte Carlo method is based on a uniformly distributed sequence, the rows that will be discussed in this thesis are Halton sequence 2-dimension. The first purpose using the Quasi Monte Carlo method is to generate the dots $x_i, i = 1, \ldots, N$ *on* $[0.1)^2$ *so that to get the minimum error by replacing the dots with the sequences of* $x_i, i = 1,\ dots, N$ *on* $[0.1)^2$ *that including the uniformly distributed sequrence. It is expected that the error on the approach can be ignored by enlarging the* N *value. The next purpose is to get a better convergence value, this will be fulfilled with the line low-discrepancy. Sequence can be "resurrected" after all the purpose of the Quasi Monte Carlo methods, so it can proceed on the calculation to determine the value of an Asian call option.*

Keywords *: Option, Asian Option, Quasi Monte Carlo, Halton sequence, Discrepancy, low discrepancy.*

ABSTRAK

FATMAH AINURROCHMA, 3125120210. Penentuan Harga Kontrak Opsi Asia Menggunakan Metode *Quasi Monte Carlo*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. 2017.

Perkembangan dunia investasi saat ini tumbuh pesat, sehingga semakin banyak alternatif alat investasi yang dijadikan pilihan investor dalam berinvestasi. Sarana alternatif yang ditawarkan perusahaan adalah produk derivatif, salah satu produk derivatif yang banyak dikenal ialah opsi. Saham merupakan aset dasar opsi yang sangat populer. Terdapat dua opsi yang sering digunakan, yaitu Opsi Eropa dan Opsi Amerika kedua opsi tersebut memiliki *payoff* yang hanya bergantung pada harga aset saat dieksekusi. Sedang Opsi Asia yang akan digunakan pada skripsi ini, *payoff* nya tidak hanya bergantung pada harga aset saat dieksekusi tapi juga tergantung pada rata-rata harga aset selama masa hidup opsi. Tipe rata-rata yang digunakan ialah rata-rata aritmatik menggunkan metode *Quasi Monte Carlo*. Metode *Quasi Monte Carlo* didasari sebuah barisan yang terdistribusi uniform, barisan yang akan dibahas pada penulisan ini ialah barisan *Halton* dimensi-2. Tujuan pertama dengan menggunakan metode *Quasi Monte Carlo* ialah menghasilkan titik-titik $x_i, i = 1, \ldots, N$ di $[0, 1)^2$ sehingga memperoleh *error* yang minimum, yaitu dengan mengganti titik-titik tersebut dengan barisan $x_i, i = 1, \ldots, N$ di $[0, 1)^2$ yang memenuhi barisan yang terdistribusi *uniform*. Diharapkan kesalahan pada pendekatan dapat diabaikan dengan memperbesar nilai N. Tujuan selanjutnya ialah mendapat nilai konvergensi yang lebih baik, hal ini akan terpenuhi dengan barisan *low-discrepancy*. Barisan dapat dibangkitkan setelah terpenuhi semua tujuan dari metode *Quasi Monte Carlo*, sehingga dapat dilanjutkan pada perhitungan untuk menentukan nilai sebuah opsi call Asia.

Kata kunci : Opsi, Opsi Asia, *Quasi Monte Carlo*, barisan *Halton*, *Discrepancylow discrepancy*.

PERSEMBAHANKU...

"*La haula wala Quwwata illa Billahi* "

Tiada daya dan upaya melainkan kekuatan Allah

"*Sesungguhnya jika kamu bersyukur, niscaya Aku akan menambah (nikmat) kepadamu*"-{(Q.S.Ibrahim:8)}

Skripsi ini kupersembahkan untuk Bapak, Mama, Arafah, dan Alvina.

"Terima kasih atas do'a, semangat, serta kasih sayang kalian".

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada ALLAH SWT melalui pengetahuan dan kemampuan yang diberikan-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Penentuan Opsi Asia Menggunakan Metode *Quasi Monte Carlo*" yang merupakan salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana prodi Matematika, Universitas Negeri Jakarta. Shalawat dan salam penulis lantunkan kepada suri tauladan kita, Muhammad Shalallahu alaihi wa sallam, beserta keluarganya yang mulia, sahabatnya yang tercinta, dan pengikutnya yang setia hingga akhir zaman. Skripsi ini berhasil diselesaikan tidak terlepas dari adanya bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin menyampaikan terima kasih terutama kepada:

1. Kedua orang tua penulis yang telah mendidik, merawat hingga tidak pernah lepas memberikan dukungan dan do'a kepada penulis.

2. Bapak Prof. Dr. Suyono, M.Si., selaku Dekan FMIPA serta Dosen Pembimbing I dan Bapak Ibnu Hadi, M.Si. selaku Dosen Pembimbing II, yang telah berkenan meluangkan waktunya dalam memberikan bimbingan, saran, nasehat serta arahan sehingga skripsi ini menjadi lebih baik dan terarah.

3. Ibu Dr. Lukita Ambarwati, S.Pd., M.Si, selaku Ketua Prodi Matematika FMIPA UNJ yang telah banyak membantu penulis.

4. Ibu Ir. Fariani Hermin, M.T, selaku Pembimbing Akademik atas segala bimbingan dan kerja sama Ibu selama perkuliahan, dan seluruh Bapak/Ibu dosen atas pengajarannya yang telah diberikan, serta karyawan/karyawati FMIPA UNJ yang telah memberikan informasi yang

penulis butuhkan dalam menyelesaikan skripsi.

5. Keluarga besar dan kedua adik perempuan penulis, Arafah dan Alvina yang memberi motivasi tersendiri untuk penulis, mendo'akan penulis, dan menghibur ketika penulis mengalami kesulitan dalam penulisan skripsi ini. Semoga ini menjadi motivasi kalian untuk terus bersusah payah dalam menuntut ilmu.

6. Sahabat tercinta penulis Sulistianik dan Loyalitasya Bela Prasiwi yang menemani penulis dalam setiap keadaan. Serta kerabat penulis sejak masa SD hingga SMA yang telah memberikan inspirasi penulisan ini.

7. Teman-teman "Cantik" yang sering menghabiskan waktu bersama selama perkuliahan dan seluruh mahasiswa matematika murni angkatan 2012 yang selalu memberi semangat dan masukan kepada penulisan khusunya Bobby Reynaldo, Dwi Agustina, Bety Suryani Putri, Aan Nur Aini, Dewanti Kumala Sari, Rizka Annisa Fitri, Sharah Annisa, Yulifirda Isnaini.

8. Kak Debora Saurina, Kak Dwi Fitriani, Kak Idam, dan kakak-kakak tingkat matematika yang memberi semangat selama masa perkuliahan.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Masukan dan kritikan akan sangat berarti. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca sekalian.

Jakarta, Agustus 2017

Fatmah Ainurrochma

DAFTAR ISI

ABSTRACT **i**

ABSTRAK **ii**

KATA PENGANTAR **iv**

DAFTAR ISI **vi**

I PENDAHULUAN **1**

1.1 Latar Belakang Masalah 1

1.2 Perumusan Masalah 3

1.3 Pembatasan Masalah 3

1.4 Tujuan Penulisan 4

1.5 Manfaat Penulisan 4

1.6 Metode Penelitian 4

II LANDASAN TEORI **5**

2.1 Opsi 5

2.2 Opsi Asia 7

2.3 Ukuran dan Variabel Acak 8

2.4 Gerak Brown 11

2.5 Formula *Itô* 14

2.5.1 Gerak Brown Geometrik 16

2.6 Proses Harga Saham 17

2.7 Metode *Monte Carlo* 19

2.7.1 *Monte Carlo* Standar 20

2.8 *Quasi Monte Carlo* 21

2.8.1 *Discrepancy (Ketidaksesuaian)* 22

2.8.2 Barisan *Van der Corput* 24

2.8.3 Barisan Halton 25

2.9 Distribusi Normal 27

III PEMBAHASAN **29**

3.1 Metode *Quasi Monte Carlo* 29

3.2 Penentuan Harga Opsi Asia Menggunakan Rata-Rata Aritmatika 38

3.3 Contoh Kasus 40

IV PENUTUP **43**

4.1 Kesimpulan 43

4.2 Saran 44

DAFTAR PUSTAKA **45**

LAMPIRAN **46**

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Perkembangan dunia investasi sekarang ini semakin pesat, hal ini ditunjukkan oleh semakin banyak alternatif alat investasi yang dijadikan pilihan investor dalam berinvestasi. Sarana alternatif untuk berinvestasi yang ditawarkan di berbagai bursa dunia adalah produk derivatif. Produk derivatif merupakan suatu intrumen keuangan yang nilainya bergantung pada nilai aset yang mendasarinya. Salah satu produk derivatif yang banyak dikenal dan diperdagangkan oleh masyarakat adalah opsi. Opsi merupakan sebuah produk derivatif sehingga nilainya bergantung dengan aset yang mendasarinya. Aset yang mendasari opsi dapat berupa saham, emas, mata uang asing, indeks saham dan lainnya. Asset dasar opsi yang banyak digunakan investor ialah saham. Pada opsi terdapat dua jenis kontrak opsi yang paling mendasar, yaitu opsi *call* dan opsi *put*.

Opsi berdasarkan waktu eksekusinya terdapat dua tipe opsi, yaitu opsi Eropa dan opsi Amerika. Kedua opsi tersebut *payoff* nya hanya bergantung pada harga aset saat dieksekusi. Selain dari opsi Eropa dan Amerika terdapat opsi eksotik. Opsi eksotik adalah opsi yang *payoff*-nya tidak hanya bergantung pada harga aset saat dieksekusi, tapi juga bergantung pada harga-harga aset selama masa hidup opsi. Contoh opsi eksotik adalah *barrier option*, *lookback option* dan *Asian option* (opsi Asia).

Pemilihan opsi Asia merupakan sebuah sekuritas dalam berinvestasi dikarenakan opsi Asia *payoof* nya tidak hanya bergantung pada harga aset saat dieksekusi melainkan bergantung juga terhadap rata-rata harga aset selama masa hidup opsi.

Opsi Asia bergantung terhadap rata-rata harga aset maka tipe rata-rata yang akan digunakan dalam tugas akhir ini, ialah rata-rata aritmatika. Jika distribusi harga saham lognormal maka distribusi dari rata-rata aritmatikanya tidak diketahui. Hal ini menyulitkan dalam penentuan harga opsi Asia. Oleh karena itu, perlu dilakukan aproksimasi untuk menentukan distribusi rata-rata aritmatika. Metode yang akan digunakan untuk mengaproksimasi distribusi rata-rata tersebut, ialah dengan *Quasi Monte Carlo.*

Metode *Quasi Monte Carlo* merupakan metode *Monte Carlo* yang menggunakan barisan kuasi-acak sebagai pengganti dari bilangan acak semu. Terdapat beberapa barisan kuasi-acak diantaranya barisan *Van der Corput*, *Faure*, *Halton*, dan *Sobol.* Pada pembahasan selanjutnya, akan dperkenalkan barisan *Van der Corput* terlebih dahulu dikarenakan barisan *Van der Corput* bentuk dimensi satu dari barisan *Halton* yang akan digunakan pada perhitungan nilai kontrak opsi Asia.

Pada penulisan terdahulu di Indonesia sudah ada yang menuliskan mengenai opsi Asia yang berjudul penentuan opsi Asia pada penulisan ini metode yang digunakan rata-rata geometrik dengan *Black-Scholes* dan rata-rata aritmatiknya dengan pendekatan *Black-Scholes* (Khuriyanti, 2009). Adapun penulisan yang membahas mengenai metode *Quasi Monte Carlo* yaitu menghitung opsi Eropa dengan menggunakan metode *Quasi Monte Carlo* dengan menggunakan barisan *Van der Corput* (Rahmawati, 2010). Pada penulisan ini akan mengembangkan dari kedua penulisan tersebut yaitu menghitung nilai opsi Asia dengan menggunakan metode *Quasi Monte Carlo.* Pemilihan metode *Quasi Monte Carlo* berdasarkan penemuan studi sebelumnya yang memberi pernyataan bahwa, metode *Quasi Monte Carlo* lebih unggul dari setiap teknik lainnya karena hasilnya memiliki presisi yang tinggi dan standar deviasi yang rendah (Kubendran, 2014). Berdasarkan latar belakang tersebut penulisan ini mengangkat judul penentuan harga kontrak opsi Asia dengan menggunakan metode *Quasi Monte Carlo*.

1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah yang akan dikaji adalah bagaimana menentukan harga kontrak opsi Asia menggunakan metode *Quasi Monte Carlo* dengan barisan acak *Halton* ?

1.3 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah dalam penulisan ini adalah:

1. Aset dasar yang digunakan berupa saham.
2. Bentuk dasar opsi Asia yang digunakan adalah *average price option.*
3. Perhitungan hanya menggunakan tipe rata-rata aritmatika.
4. Barisan acak yang digunakan adalah barisan acak *Halton* dimensi-2.
5. Tingkat bunga yang digunakan ialah tingkat bunga bebas resiko.
6. Waktu pengeksekusian menggunakan *European style*
7. Opsi yang akan digunakan yaitu opsi *call* Asia

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan yang ingin dicapai dalam skripsi ini adalah langkah untuk menentukan harga kontrak opsi Asia dengan menggunakan metode *Quasi Monte Carlo*.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari skripsi ini adalah memperoleh pendekatan yang lebih akurat dengan metode *Quasi Monte Carlo* untuk memperoleh harga kontrak opsi Asia.

1.6 Metode Penelitian

Skripsi ini merupakan kajian teori dalam bidang matematika keuangan yang didasarkan pada buku-buku dan jurnal-jurnal tentang teori permasalahan dalam bidang keuangan. Referensi utama penulisan ini diantaranya Paolo Brandimarte (2006) Piergiacomo Sabino (2007), Kurhayanti (2009), Nadya Rahmawati (2010) dan Kubendran (2014).

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai opsi, opsi eksotik, rata-rata aritmatik, proses stokastik, gerak Brown, proses saham, Metode *Quasi Monte Carlo* dan *Low Discrepancy.* Penentuan harga opsi Asia dengan rata-rata aritmatik dengan metode *Quasi Monte Carlo* akan dibahas pada bab selanjutnya, dan akan diperkenalkan pada bab ini.

2.1 Opsi

Opsi adalah suatu kontrak yang hanya memberikan hak kepada pemegang kontrak untuk membeli atau menjual suatu aset dasar kepada penulis option dengan harga tertentu (*strike price*) dalam jangka waktu tertentu (*expiration date*). Hak tersebut diperoleh pembeli opsi dengan membayarkan sejumlah uang kepada penjual opsi yang dinamakan harga opsi.

Berdasarkan jenis kontrak opsi yang paling mendasar terbagi menjadi dua yaitu:

1. Opsi *call* yaitu memberikan hak kepada *holder* untuk membeli suatu aset saham tertentu dengan jumlah tertentu dan pada harga yang telah ditentukan selama periode waktu tertentu.

2. Opsi *put* yaitu memberikan hak kepada *holder* untuk menjual suatu aset saham tertentu dengan jumlah tertentu dan pada harga yang telah ditentukan selama periode waktu tertentu.

Istilah-istilah yang sering digunakan dalam opsi:

1. *Holder* adalah pihak yang membeli kontrak opsi.
2. *Writer* adalah pihak yang mengeluarkan kontrak opsi.
3. *Strike price* (K) adalah harga yang harus dibayarkan holder kepada writer jika mengeksekusi opsi.
4. *Maturity time* (T) adalah waktu jatuh tempo.
5. *Payoff* adalah sejumlah nilai yang diterima holder saat masa opsi berakhir.
6. Aset dasar adalah aset yang menjadi dasar dari kontrak opsi.
7. Harga opsi adalah harga awal yang diberikan *holder* ke *writer* untuk memperoleh hak opsi.
8. *Volatilitas* adalah *standar deviasi* dari harga aset keuangan.
9. *Risk-free rate* atau tingkat suku bunga bebas resiko (r) adalah tingkat suku bunga yang diasumsikan diperoleh jika berinvestasi aset yang bebas resiko.

Berdasarkan waktu pengeksekusian, opsi terbagi menjadi 2, yaitu:

1. Opsi Eropa adalah jenis opsi yang hanya dapat dieksekusi saat masa opsi berakhir.
2. Opsi Amerika adalah jenis opsi yang dapat dieksekusi kapanpun selama masa hidup opsi.

Selain opsi eropa dan opsi amerika terdapat opsi eksotik. Opsi eksotik ialah opsi yang *payoff* nya tidak hanya bergantung pada harga aset saat dieksekusi, tapi juga bergantung pada harga-harga aset selama masa hidup opsi. Beberapa opsi eksotik, yaitu :

1. Opsi *Barrier* adalah opsi yang memiliki *payoff* nya bergantung pada perubahan hidup atau matinya lintasan asset yang tingkatnya telah ditetapkan.

2. Opsi *Lookback* adalah opsi yang *payoff* nya pada bergantung pada salah satu dari maksimum atau minimum nilai yang telah dicapai oleh asset.

3. Opsi Asia adalah opsi yang *payoff*-nya bergantung pada rata-rata harga aset selama masa hidup opsi.

2.2 Opsi Asia

Opsi Asia adalah opsi yang *payoff*-nya bergantung pada rata-rata harga aset selama masa hidup opsi. Ada 2 bentuk dasar dari opsi Asia, yaitu:

1. *Average price option* adalah opsi Asia yang *payoff*-nya bergantung pada perbedaan antara rata-rata harga saham selama masa hidup opsi dengan harga eksekusi yang telah ditentukan. *Payoff* dari *average price option* saat jatuh tempo adalah

$$\begin{cases} max\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt - K, 0\right) & \text{untuk opsi call Asia} \\ max\left(K - \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt, 0\right) & \text{untuk opsi put Asia} \end{cases}$$

   Dimana :

   $\frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt$: Merupakan Rata-Rata Harga Saham, dan

   K : *Strike Price* (Harga yang harus dibayarkan)

   $S(t)$: Harga saham pada waktu (t)

2. *Average strike option* adalah opsi Asia yang *payoff*-nya bergantung pada perbedaan antara harga saham saat jatuh tempo dengan rata-rata harga

aset selama masa hidup opsi.

Payoff dari *average strike option* saat jatuh tempo adalah

$$\begin{cases} max\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt - S(T), 0\right) & \text{untuk opsi call Asia} \\ max\left(S(T) - \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt, 0\right) & \text{untuk opsi put Asia} \end{cases}$$

Dimana :

$S(T)$: Harga saham pada saat jatuh Tempo

Misal $\phi(S)$ sebuah *payoff* dari harga saham. Beberapa tipe rata-rata opsi Asia, yaitu :

1. Rata-rata aritmatika kontinu *call* dan *put*

$$\phi(S) = \left(\frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt - K\right) \text{ dan } \phi(S) = \left(K - \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt\right)$$

2. Rata-rata geometrik kontinu *call* dan *put*

$$\phi(S) = \left(e^{\frac{1}{T}\int_0^T \log S(t)dt} - K\right) \text{ dan } \phi(S) = \left(K - e^{\frac{1}{T}\int_0^T \log S(t)dt}\right)$$

3. Rata-rata aritmatika diskrit *call* dan *put*

$$\phi(S) = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m} S(t_i) - K\right) \text{ dan } \phi(S) = \left(K - \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m} S(t_i)\right)$$

4. Rata-rata geometrik diskrit *call* dan *put*

$$\phi(S) = \left(e^{\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m} S(t_i)} - K\right) \text{ dan } \phi(S) = \left(K - e^{\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m} S(t_i)}\right)$$

2.3 Ukuran dan Variabel Acak

Teori berikut ini merupakan teori yang mendasari pengertian dari metode *Monte Carlo*. Namun, hal ini tidak menjadi fokus utama dalam penulisan ini.

Definisi 2.3.1 (σ-aljabar)**.** Misal Ω himpunan sebarang yang tak kosong dan $\mathcal{F}$ adalah keluarga subhimpunan Ω. $\mathcal{F}$ dikatakan aljabar-σ jika:

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$
2. Jika $A \in \mathcal{F}$ maka $A^c \in \mathcal{F}$
3. Jika $(A_n) \in \mathcal{F}$ maka $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n) \in \mathcal{F}$

Definisi 2.3.2 (Ukuran)**.** Diberikan $\mathcal{F}$ aljabar-σ pada Ω. Fungsi $\lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ disebut ukuran jika memenuhi:

1. $\lambda(\emptyset) = 0$
2. $\lambda(A) \geq 0$ untuk setiap $A \in \mathcal{F}$
3. Jika $(A_n) \in \mathcal{F}$ merupakan barisan himpunan yang saling lepas, yaitu $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, maka
$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$$

Definisi 2.3.3 (Ukuran Probabilitas)**.** Diberikan $\mathcal{F}$ aljabar-σ pada Ω. Fungsi $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ disebut ukuran probabilitas jika memenuhi:

1. $P(\emptyset) = 0$ dan $P(\Omega) = 1$
2. Jika $(A_n) \in \mathcal{F}$ merupakan himpunan yang saling lepas, yaitu $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, maka
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Definisi 2.3.4. Diberikan Ω himpunan tak kosong, $\mathcal{F}$ aljabar-σ pada Ω, dan P ukuran probabilitas pada $\mathcal{F}$.

1. $(\Omega, \mathcal{F})$ disebut ruang terukur

2. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ disebut ruang probabilitas

Definisi 2.3.5. Diberikan $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan terukur $\mathcal{F}$ jika untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, himpunan $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}$.

Definisi 2.3.6. Misalkan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan riil, Aljabar Borel pada $\mathbb{R}$ adalah aljabar-σ terkecil yang memuat semua interval buka pada $\mathbb{R}$.

Definisi 2.3.7. Misalkan f merupakan fungsi dari ruang terukur $(\Omega, \mathcal{F})$ pada bilangan riil. Fungsi f dikatakan terukur jika untuk setiap himpunan Borel $B \in \mathcal{B}$, himpunan $\{x, f(x) \in B\} \in \mathcal{F}$.

Beberapa contoh himpunan Borel yaitu:

1. Semua himpunan buka di $\mathbb{R}$.
2. Semua komplemen dari himpunan buka di $\mathbb{R}$.
3. Semua gabungan dari himpunan buka di $\mathbb{R}$.
4. Semua komplemen dari gabungan himpunan buka di $\mathbb{R}$.

Definisi 2.3.8. Diberikan ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sebuah barisan $\{\mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, ...\}$ dikatakan filtrasi jika $\mathcal{F}_n$ untuk setiap n merupakan subaljabar$-\sigma$ dari $\mathcal{F}$, dan $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ untuk $n = 0, 1, 2, ...$

Definisi 2.3.9. Diberikan ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Fungsi terukur $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ disebut variabel acak jika untuk setiap $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ berlaku $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Jika X variabel acak, fungsi distribusi dari X didefinisikan dengan

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \in (-\infty, x]).$$

Variabel acak X dikatakan diskrit jika fungsi distribusinya dapat dinyatakan sebagai

$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} P(X = y).$$

Variabel acak X dikatakan kontinu jika fungsi distribusinya dapat dinyatakan sebagai

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy, x \in \mathbb{R},$$

untuk suatu fungsi $f : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty)$ yang terintegralkan. Fungsi f ini dinamakan fungsi kepadatan peluang. Dalam kasus kontinu

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

Nilai ekspektasi (*mean*) dari variabel acak X dinotasikan dengan $E(X)$ yang didefinisikan sebagai

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x xf(x), & \text{jika } X \text{ diskrit;} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, & \text{jika } X \text{ kontinu} \end{cases}$$

2.4 Gerak Brown

Model pergerakan harga saham menggunakan proses *Wiener* sebagai representasi sifat acak dari harga saham. Oleh karena itu teori-teori pada subbab ini penting dalam menentukan model pergerakan harga saham.

Definisi 2.4.1. Proses stokastik adalah suatu variable acak $X(t)$ dengan t $\in T$ dan $T \subset \mathbb{R}$. Bila $T = 1, 2, ...$ maka $X(t)$ adalah proses stokastik dalam waktu diskret. Bila $T = [0, \infty)$ maka $X(t)$ adalah proses stokastik dalam waktu kontinu.

Berdasarkan definisi stokastik pergerakan harga saham merupakan sebuah proses stokastik hal ini dikarenakan harga saham merupakan variabel acak yang pergerakannya tidak dapat diketahui secara pasti pada waktu t.

Definisi 2.4.2. Proses stokastik $(W(t), t \geq 0)$ dinamakan proses gerak Brown (proses Wiener) jika

1. $W(0) = 0$;
2. $(W(t), t \geq 0)$ mempunyai sifat *stationary increment* dan *independent increment*;
3. Untuk setiap $t \geq 0, W(t)$ berdistribusi normal dengan *mean* 0 dan variansi $\sigma^2 t$.

Definisi 2.4.3. Gerak Brown dengan *mean* μt dan variansi $\sigma^2 t$ disebut gerak Brown dengan *drift* μ dan parameter variansi σ^2.

Untuk $\sigma = 1$, $W(t)$ disebut gerak Brown standar.

Teorema 2.4.1. Jika $\{W(t), t \geq 0\}$ merupakan gerak Brown standar dan

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t)$$

maka $\{X(t), t \geq 0\}$ merupakan gerak Brown dengan *drift*.

Dimana :

μ	: Nilai ekspektasi dari *return*
σ	: Standar deviasi (volatilitas) dari *return*

Bukti. Akan dibuktikan teorema 2.4.1 memenuhi definisi gerak Brown

1. Untuk $t = 0$, $X(0) = \mu(0) + \sigma W(0) = 0 + 0 = 0$
2. Akan ditunjukan bahwa $X(t+h) - X(t)$ bersifat *stationary increment* dan *independent increment*

(a) Akan ditunjukkan bahwa $X(t+h)-X(t)$ bersifat *independent increments* untuk setiap $n > 0$ dan $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
X(t_n) - X(t_{n-1}) &= \mu(t_n - t_{n-1}) + \sigma(W(t_n) - W(t_{n-1})) \\
X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}) &= \mu(t_{n-1} - t_{n-2}) + \sigma(W(t_{n-1}) - W(t_{n-2})) \\
&\vdots \\
X(t_2) - X(t_1) &= \mu(t_2 - t_1) + \sigma(W(t_2) - W(t_1)) \\
X(t_1) &= \mu(t_1) + \sigma W(t_1)
\end{aligned}
$$

Karena untuk semua $n \geq 0$ dan $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $W(t_n) - W(t_{n-1}), \ldots, W(t_2) - W(t_1), W(t_1)$ saling independen, maka

$$X(t_n) - X(t_{n-1}), \ldots, X(t_2) - X(t_1), X(t_1)$$

juga saling independen. Jadi proses $\{X(t), t \geq 0\}$ bersifat *independent increments*.

(b) Akan ditunjukkan bahwa $X(t+h) - X(t)$ bersifat *stationary increments*. Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
X(t+h) - X(t) &= \mu(t+h) + \sigma W(t+h) - (\mu(t) + \sigma W(t)) \\
&= \mu(t+h) + \sigma W(t+h) - \mu(t) - \sigma W(t) \\
&= \mu(t+h) - \mu(t) + \sigma W(t+h) - \sigma W(t) \\
&= \mu(t) + \mu(h) - \mu(t) + \sigma(W(t+h) - W(t)) \\
&= \mu(h) + \sigma(W(t+h) - W(t))
\end{aligned}
$$

Karena $(W(t+h) - W(t)$ tidak bergantung pada t maka $X(t+h) - X(t)$ juga tidak bergantung pada t. Jadi $X(t+h) - X(t)$ bersifat *stationary increments*.

3. Dalam fungsi normal, apabila suatu variabel acak Y memiliki *mean* 0 dan variansi 1 maka $\mu+\sigma Y$ berdistribusi normal dengan *mean* μ dan variansi σ^2. Karena $\{W(t), t \geq 0\}$ merupakan gerak Brown standar, maka $W(t)$ berdistribusi normal dengan *mean* 0 dan variansi t sehingga $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$ juga berdistribusi normal dengan *mean* μt dan variansi $\sigma^2 t$

$\square$

2.5 Formula *Itô*

Definisi 2.5.1. Sebuah proses *Itô* adalah proses stokastik yang memenuhi persamaan

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(s), s)ds + \int_0^t \sigma(X(s), s)dW(s) \tag{2.1}$$

dimana $W(s)$ gerak Brown (proses Wiener), μ melambangkan koefisien *drift* dan σ melambangkan *volatilities*.

Proses *Itô* merupakan proses *Wiener* dengan μ dan σ sutu fungsi peubah acak X dalam waktu t. Dapat dinyatakan dalam diferensial stokastik sebagai berikut

$$dX(X(t), t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW_t \tag{2.2}$$

Misalkan $X(t)$ sebuah proses *Itô* memenuhi (2.1) anggap $f(x, t)$ adalah sebuah fungsi kontinu dengan turunan parsial $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, dan $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ juga sebuah proses *Itô*, maka $f(X(t), t)$ juga proses *Itô* dan

$$df(X(t), t) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2 dt \tag{2.3}$$

Hal ini dapat ditunjukkan dengan menggunakan deret Taylor ordo pertama dan ordo kedua dapat digunakan untuk nilai fungsi f di sekitar x_k, dapat diaproksimasi dengan:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f^{'}(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2}f^{''}(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2$$

Jika $x_k = W(t_k)$ maka akan didapat :

$$f(W(t_{k+1})) = f(W(t_k))+f^{'}W(t_k))[W(t_{k+1})-W(t_k)]+\frac{1}{2}f^{''}(W(t_k))[W(t_{k+1})-W(t_k)]^2$$

$$f(W(t_{k+1}))-f(W(t_k)) = f^{'}W(t_k))[W(t_{k+1})-W(t_k)]+\frac{1}{2}f^{''}(W(t_k))[W(t_{k+1})-W(t_k))]^2$$

Misal $\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ adalah partisi dari [0,t]

$$\begin{aligned} f(W(T)) - f(W(0)) &= \sum_{k=0}^{n-1}[f(W(t_{k+1})) - f(W(t_k))] \\ &= \sum_{k=0}^{n=1} f'(W(t_k))[W(t_{k+1}) - W(t_k)] \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f''(W(t_k))[W(t_{k+1}) - W(t_k)]^2 \end{aligned}$$

Untuk $\|\pi\| \to 0$

$$\begin{aligned} f(W(T)) - f(W(0)) &= \int_0^t f'(W(u))dW(u) + \frac{1}{2}\int_0^t f"(W(u))(dW(u))^2 \\ &= \int_0^t f'(W(u))dW(u) + \frac{1}{2}\int_0^t f"(W(u))dt \end{aligned}$$

Rumus Itô dalam bentuk integral dapat dinyatakan dengan

$$f(W(T)) = f(W(0)) + \int_0^t f'(W(u))dW(u) + \frac{1}{2}\int_0^t f"(W(t))dt$$

Formula Itô dalam bentuk diferensial dapat dinyatakan dengan

$$df(W(T)) = f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f"(W(t))dt$$

Bila fungsi $f(X(t), t)$ fungsi kontinu dan terdeferensial pada variabel $X(t)$ yang didefinisikan persamaan diferensial stokastik dengan drift rate μ dan variansi rate σ dengan tabel *Itô* didapatkan $(dX(t))^2 = \sigma^2 dt$ sehingga :

$$\begin{aligned} df(X(t),t) &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX(t))^2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu_t dt + \sigma_t dW(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX(t))^2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dW(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2 dt \end{aligned}$$

Sehigga $f(X(t),t)$ juga proses *Itô* dengan persamaan diferensial stokastik

$$df(X(t),t) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2 dt$$

Persamaan diferensial stokastik diatas yang akan dimanfaat pada gerak brown untuk memodelkan perubahan harga $S(t)$

2.5.1 Gerak Brown Geometrik

Harga saham akan mengikuti gerak brown jika model pergerakan saham dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial stokastik. Harga saham pada saat t, yaitu $S(t)$ dikatakan mengikuti gerak brown geometrik jika dapat dinyatakan dengan

$$S(t) = S(0)\exp\left[\sigma W(t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right] \tag{2.4}$$

μ dan σ adalah konstanta dengan $\sigma > 0$.

Misalkan $f(S(t),t)$ proses *Itô*, maka berdasarkan persamaan (2.3) $f(S(t),t)$ dapat dinyatakan dalam persamaan diferensial stokastik yaitu

$$d(S(t)) = \frac{\partial(S(t))}{\partial t}S(t)dt + \frac{\partial(S(t))}{\partial x}S(t)(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(S(t))}{\partial x^2}S(t)\sigma^2 dt$$

Anggap $S(t)$ mengikuti gerak brown geometrik, maka didapatkan gerak brown geometrik dalam bentuk diferensial :

$$
\begin{aligned}
d(S(t)) &= \frac{\partial(S(t))}{\partial t}S(t)dt + \frac{\partial(S(t))}{\partial x}S(t)(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(S(t))}{\partial x^2}S(t)\sigma^2 dt \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) + \frac{1}{2}S(t)\sigma^2 dt \\
&= \mu S(t)dt - \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \\
&= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)
\end{aligned}
$$

Gerak brown geometrik dalam bentuk diferensial :

$$d(S(t)) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{2.5}$$

2.6 Proses Harga Saham

Misal $S(t_i)$ adalah harga saham pada saat t_i, untuk periode waktu Δt , ekspektasi perubahan ΔS, dengan μ adalah tingkat *return* (pengembalian) dari harga saham yang diharapkan. Berdasarkan persamaan (2.5) jika volatilitas dari tingkat pengembalian selalu nol maka tingkat pengembalian akan bernilai tetap ($\mu = c$) untuk setiap interval waktu. Sehingga perubahan harga saham dapat dimodelkan sebagai berikut :

$$\Delta S = \mu S(t_i)\Delta t \tag{2.6}$$

dimana

$$\Delta S = S(t_{i+1}) - S(t_i) \tag{2.7}$$

untuk tingkat pengembalian yang diharapkan per periode waktu Δt :

$$\mu = \frac{\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)}}{\Delta t}$$

Namun dalam aplikasinya, volatilitas dari tingkat pengembalian tidak selalu bernilai nol. Artinya investor memiliki tingkat pengembalian yang tidak tentu untuk harga saham pada waktu yang berbeda. Hal ini dapat ditulis

$$\begin{aligned}
\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)} &= \mu\Delta t + \sigma\Delta W(t) \\
S(t_{i+1}) - S(t_i) &= S(t_i)(\mu\Delta t + \sigma\Delta W(t)) \\
\Delta S &= \mu S(t_i)\Delta t + \sigma S(t_i)\Delta W(t) \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

dimana $X(t)$ adalah proses stokastik yang memenuhi gerak *Brown Standar* sehingga didapatkan

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) + \mu S(t_i)\Delta t + \sigma S(t_i)\Delta W(t) \qquad (2.9)$$

Berdasarkan sifat Gerak Brown standar persamaan (2.9) dapat ditulis menjadi

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) + \mu S(t_i)\Delta t + \sigma S(t_i)\sqrt{\Delta t} Z_i \qquad (2.10)$$

dimana Z_i berdistribusi normal identik independent di (0,1) dengan $\Delta t \to 0$, maka persamaan (2.10) menjadi sebuah persamaan diferensial stokastik dengan waktu yang kontinu

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)W(t) \qquad (2.11)$$

Pergerakan harga saham mengikuti gerak brown geometrik bentuk diferensial persamaan (2.5), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
S(t) &= S(0)\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right) \\
\frac{S(t)}{S(0)} &= \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right) \\
\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) &= \mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W(t) \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Jika diketahui $W(t) \sim N(0, t)$, maka mean distribusi harga saham :

$$\begin{aligned}
E\left[\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t)\right] &= E\left[\mu t\right] - E\left[\frac{1}{2}\sigma^2 t\right] + E\left[\sigma W(t)\right] \\
&= \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + 0 \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

variansi distribusi harga saham adalah

$$\begin{aligned} Var\Big[\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t)\Big] &= Var\Big[\sigma W(t)\Big] \\ &= \sigma^2 Var\Big[W(t)\Big] \\ &= \sigma^2 t \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dengan parameter-parameter yang telah dicari terhadap asumsi resiko natural yaitu asumsi bahwa tingkat pengembalian yang diharapkan sama dengan risk-free rate $\mu = r$, diperoleh

$$\ln\bigg(\frac{S(t)}{S(0)}\bigg) \sim N\bigg(\Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)t, \sigma^2 t\bigg) \tag{2.15}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa distribusi dari logaritma harga saham $S(t)$ adalah sebagai berikut:

$$\ln S(t) \sim N\bigg(\ln S(0) + \Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)t, \sigma^2 t\bigg) \tag{2.16}$$

Misal $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 \cdots < t_n$ dan $\Delta = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = t_{n+1} - t_n$, maka persamaan (2.15) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0)\exp\bigg(\Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)(t-0) + \sigma Z\sqrt{t-0}\bigg) \\ S(t) &= S(0)\exp\bigg(\Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)(t_2 - t_1) + \sigma Z\sqrt{t_2 - t_1}\bigg) \\ S(t) &= S(0)\exp\bigg(\Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)(\Delta t) + \sigma Z\sqrt{\Delta t}\bigg) \end{aligned}$$

Jadi, $S(t)$ yaitu harga saham saat waktu (t) dapat dimodelkan

$$S(t) = S(0)\exp\bigg(\Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)\Delta t + \sigma Z\sqrt{\Delta t}\bigg) \tag{2.17}$$

2.7 Metode *Monte Carlo*

Metode *Monte Carlo* merupakan metode untuk megaproksimasi ekspektasi dari variabel acak dengan pembangkit bilangan acak.

2.7.1 *Monte Carlo* Standar

Misalkan permasalahan dari estimasi numerik mengikuti integral di $[0,1]^d$, $d \in \mathbb{Z} \geq 1$:

$$I = \int_{[0,1]^d} f(x)dx$$

Untuk $d = 1$, pada $[0,1)$ menghasilkan approximasi:

$$\begin{aligned} I = \int_{[0,1]} f(x)dx \quad &\simeq \quad \bar{I} = \sum_{i=0}^{M} w_i f(\frac{i}{M}) \\ &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M-1} f(\frac{i}{M}) + \frac{f(0)+f(1)}{2M} \end{aligned}$$

dengan $w_0 = w_M = \frac{1}{2M}$ dan $w_i = \frac{1}{M}$ untuk $1 \leq i \leq M-1$.

Untuk $d > 1$ menggunakan aturan hasil kali kartesius satu dimensi sedemikian hingga integral dimensi-d dapat dilihat sebagai iterasi integral satu dimensi dan menerapkan aturan integral satu dimensi dalam setiap iterasi. Misal $f \in C^2([0,1]^d)$, sebuah hasil kali cartesian dari kubus satuan dimensi-d adalah :

$$I = \int_{[0,1]^d} f(x)dx \quad \simeq \quad \bar{I} = \sum_{i_1=0}^{M} \cdots \sum_{i_d=0}^{M} w_{i_1} \dots w_{i_d} f(\frac{i_1}{M}, \dots, \frac{i_d}{M})$$

Misal (Ω, F, P) ruang probabilitas sebarang, dan $f : [0;1]^d \to [0;1]$ fungsi terintegral *square integrable* pada $[0;1]^d$, maka $I = I_f$ dapat dianggap sebagai $E[f(x)]$ di mana x berdistribusi uniform di $[0,1]^d$.

Definisi 2.7.1 (Estimasi Standard Monte Carlo)**.** Misal $(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_N})$ merupakan vektor i.i.d (independent identical distributed) r.v.s (*random variabel sequence*) dengan $\mathbf{x_n} \sim U([0,1]^d)$ dan $n = 1, \dots, N$. Suatu estimasi MC standar dari I dapat didefinisikan sebagai (Piergiacomo 2007):

$$\bar{I}_f = \bar{I}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\mathbf{x_i}) \tag{2.18}$$

Low Large of number memastikan bahwa fraksi ini menyatu dalam probabilitas hampir pasti dengan nilai yang benar dari integral, dengan *Low Large of number* maka (Piergiacomo 2007) :

$$P(\lim_{n\to\infty} \bar{I}_N = I_f) = 1 \tag{2.19}$$

Untuk f *square integrable*, dapat dihitung sebuah varian dari $f(\mathbf{x})$:

$$\sigma_f^2 = Var[f(\mathbf{x})] = \int_{[0,1]^d} (f(x) - I_f)^2 dx \tag{2.20}$$

Teorema pusat limit memastikan bahwa (Piergiacomo 2007):

$$\bar{I}_N - I_f \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(0, \frac{\sigma_f^2}{N}\right) \tag{2.21}$$

Parameter σ_f pada umumnya tidak diketahui, tetapi dapat diperkirakan secara statistik oleh deviasi standar sederhana (Piergiacomo 2007):

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(f(\mathbf{x_i} - \bar{I}_N))^2} \tag{2.22}$$

Metode *Monte Carlo* yang didasarkan penggunaan barisan bilangan acak hanya memiliki laju konvergensi $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, dimana O . Sehingga, diperlukan barisan bilangan lain yang memiliki laju konvergensi yang lebih baik.

2.8 *Quasi Monte Carlo*

Metode *Quasi Monte Carlo* QMC didasari barisan bilangan dengan ketidaksesuaian yang rendah (*low discrepancy*) yang terdistribusi uniform. Hal ini bertujuan untuk menghasilkan titik-titik $x_i, i = 1, \ldots, N$ sehingga menghasilkan kesalahan yang minimun dan laju konvergensi yang lebih baik.

Definisi 2.8.1 ((Estimasi Quasi Monte Carlo))**.** Misal $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_N}$ merupakan titik-titik dalam sebuah *hypercube* $[0,1)^d$. Suatu estimasi *QMC* dari I didefinisikan sebagai (Piergiacomo 2007):

$$\hat{I}_{QMC} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} f(x_i) \tag{2.23}$$

2.8.1 *Discrepancy (Ketidaksesuaian)*

Definisi 2.8.2 (Distribusi Uniform di $[0, 1)^d$)**.** Barisan $x_n n \in N$ berdistribusi uniform di$[0, 1)^d$ jika untuk semua $f \in C([0, 1)^d)$:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_{[0,1)^d} f(x)dx = I \tag{2.24}$$

Definisi 2.8.3 (Himpunan Titik dan Barisan)**.** Sebuah himpunan titik P ialah himpunan terbatas terdiri di N titik-titik $x_1, \ldots, x_N$,$x_n \in [0, 1)^d, n = 1, \ldots, N$ selama barisan sebuah himbunan takterbatas dari titik-titik.

Discrepancy digunakan sebagai ukuran yang dapat mengukur keseragaman suatu himpunan titik

Definisi 2.8.4 (General Discrepancy)**.** Misal P dinyatakan sebagai selang $[u, v)$ dimana $0 \leq u < v < 1$ yang merupakan koleksi subinterval di $[0, 1)$, general discrepancy dari himpunan titik $x_1, \ldots, x_N$ di $[0, 1)^d$ didefinisikan sebagai:

$$D_N = \sup_{J \in P} \left| \frac{A(J; N)}{N} - \lambda(J) \right| = \sup_{J \in P} \left| \frac{\sum_{n=1}^{N} c_j(x_n)}{N} - \lambda(J) \right| \tag{2.25}$$

Dimana :

$c_j(x_n)$	: Fungsi karakteristik J
$\lambda(J)$	: terukur Lebesque

Definisi 2.8.5. Jika P pada definisi *discrepancy* dibatasi menjadi koleksi subinterval di $[0, 1)^d$ yang dinyatakan sebagai $[0, v)^d, 0 \leq v \leq 1$, disebut dengan *discrepancy star* D_N^*

Teorema 2.8.1. *Discrepancy* D_N dan *star discrepancy* D_N^* dihubungkan oleh suatu ketaksamaan yaitu :

$$D_N^* \leq D_N \leq 2D_N^* \tag{2.26}$$

Bukti. Ketaksamaan pertama $D_N^* \leq D_N$ dapat terpenuhi, hal ini berdasarkan pada Definisi 2.9.5 dan Definisi 2.9.6

Selanjutnya akan dibuktikan $D_N \leq 2D_N^*$, perhatikan bahwa $A\big([\alpha, \beta]\big) = A([0, \beta]; N) - A([0.\alpha]; N)$ dimana $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$.

Oleh karena itu,

$$\left|\frac{A\big([\alpha, \beta); N\big)}{N} - (\beta - \alpha)\right| = \left|\frac{A([0, \beta]; N) - A([0, \alpha]; N)}{N} - (\beta - \alpha)\right| \tag{2.27}$$

$$= \left|\frac{A([0, \beta]; N)}{N} - \beta + \alpha - \frac{A([0, \alpha]; N)}{N}\right|$$

$$\leq \left|\frac{A([0, \beta]; N)}{N} - \beta\right| + \left|\alpha - \frac{A([0, \alpha]; N)}{N}\right|$$

supremum dari kedua ruas didapatkan,

$$\sup\left|\frac{A\big([\alpha, \beta); N\big)}{N} - (\beta - \alpha)\right| \leq \sup\left|\frac{A([0, \beta]; N)}{N} - \beta\right| + \sup\left|\alpha - \frac{A([0, \alpha]; N)}{N}\right|$$

$$D_N \leq D*_N + D*_N$$

$$D_N \leq 2D*_N$$

□

Definisi 2.8.6 (Barisan *Low-discrepancy*)**.** Sebuah barisan S pada sebuah *hypercube* $[0, 1)^2$ disebut *barisan low-discrepancy* jika discrepancy $D_N^*(S)$ dari $N \in \mathbb{N}$ adalah. (Piergiacomo 2007)

$$D_N^* = O\left(\frac{ln^d N}{N}\right) \tag{2.28}$$

dimana O merupakan hubungan kedua fungsi nilai kedua fungsi menuju tak hingga

2.8.2 Barisan *Van der Corput*

Barisan Van der Coput juga dikenal sebagai barisan inverse radikal . Diberikan sebuah bilangan bulat b, setiap bilangan non-negative n dapat kita tulis sebagai :

$$n = \sum_{j=0}^{m} a_j(n) b^j \tag{2.29}$$

Definisi 2.8.7. Sebuah basis b fungsi invers radikal $\phi_b(n) \in [0, 1)$ didefinisikan sebagai (Phelim P. Boyle dan Ken Seng Tan 1997):

$$\phi_b(n) = \sum_{j=0}^{m} a_j(n) \frac{1}{b^{j+1}} \tag{2.30}$$

Dimana $a_j(n) \in \mathbb{Z}_b = \{0, 1, \ldots, b-1\}$ dengan variansi n sebuah barisan *Van der Corput*

Contoh Misal barisan dengan *base prime* $b = 3$ dimulai :

1. $n = 1$ dimana $a_j(1) \in \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

$$\begin{aligned} n = 1 &= \sum_{j=0}^{m} a_j(1) 3^j & \qquad \phi_3(1) &= \sum_{j=0}^{m} a_j(1) \frac{1}{3^{j+1}} \\ 1 &= a_0(1) 3^0 & &= a_0(1) \frac{1}{3^1} \\ 1 &= (\mathbf{1}) 3^0, \qquad a_0(1) = 1 & &= (1) \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2. $n = 2$ dimana $a_j(2) \in \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

$$\begin{aligned} n = 2 &= \sum_{j=0}^{m} a_j(2) 3^j & \qquad \phi_3(2) &= \sum_{j=0}^{m} a_j(2) \frac{1}{3^{j+1}} \\ 2 &= a_0(2) 3^0 & &= a_0(2) \frac{1}{3^1} \\ 2 &= (\mathbf{2}) 3^0, \qquad a_0(2) = 2 & &= (2) \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2.8.3 Barisan Halton

Barisan Halton memperluas barisan Van der Corput untuk $d > 1$ mengingat d relatif bilangan bulat prima, biasanya d bilangan prima pertama.

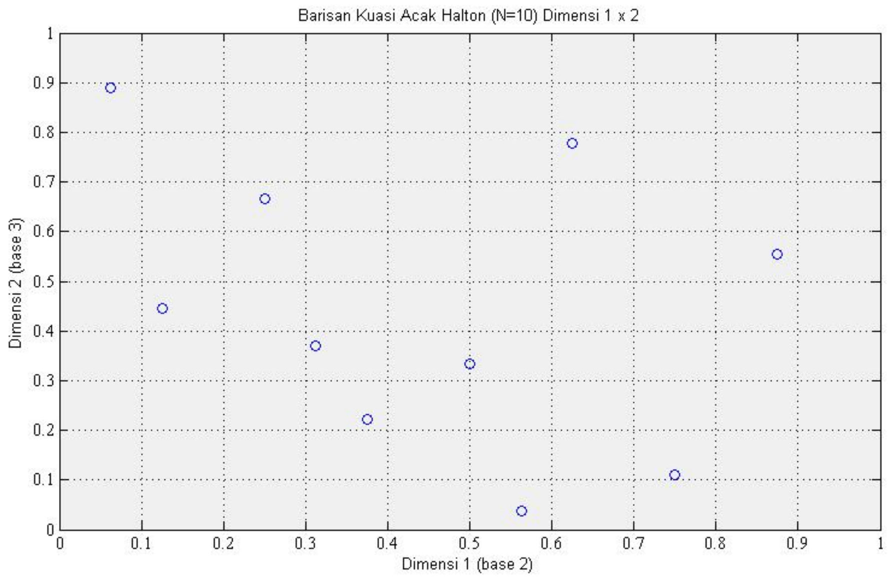
Definisi 2.8.8 (Barisan Halton)**.** Diberikan $d \geqslant 1$ dan misal $b_1, \ldots, b_d$ sebuah bilangan bulat pertama d. Elemen ke-n, x_n dari dimensi-d barisan Halton pada $[0, 1)^d$ didefinisikan dengan: (Piergiacomo 2007):

$$x_n = (\phi_{b_1}(n), \ldots, \phi_{b_d}(n)) \tag{2.31}$$

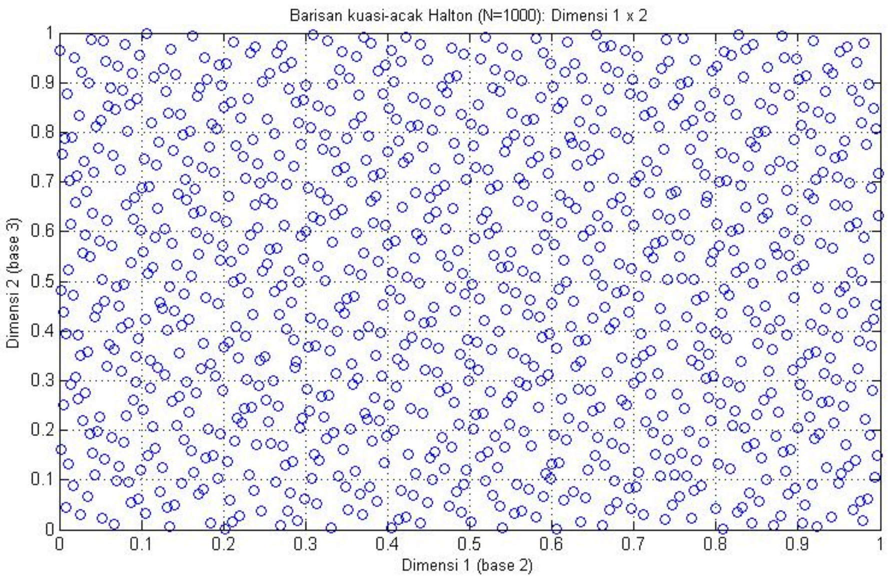
Contoh Misal barisan dengan *base prime* $b = 3$ dimulai : $d = 1x2$

Tabel 2.1: Barisan Halton 2 dimensi

Jumlah (N)	Dim = 1 (Base 2)	Dim = 2 (base 3)
n = 1	1/2	1/3
n = 2	1/4	2/3
n = 3	3/4	1/9
n = 4	1/8	4/9
n = 5	5/8	7/9
n = 6	3/8	2/9
n = 7	7/8	5/9
n = 8	1/16	8/9
n = 9	9/16	1/27
n = 10	5/16	10/27



Gambar 2.1: Barisan kuasi-acak Halton (N=10): 2 Dimensi



Gambar 2.2: Barisan kuasi-acak Halton (N=1000): 2 Dimensi

2.9 Distribusi Normal

Distribusi seragam dapat dihasilkan dengan bilangan acak semu atau bilangan kuasi-acak. Cara utama untuk melakukan transformasi ini adalah dengan kumulatif fungsi distribusi invers, untuk fungsi distribusi distribusi kumulatif normal standar adalah:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp^{-t^2/2} \, dt \tag{2.32}$$

Alternatif metode transformasi adalah transformasi invers, yang didasari pada pendekatan distribusi normal invers (Φ^{-1}). Hal ini berdasarkan

Teorema 2.9.1. *Invers Transform* Misalkan ingin dihasilkan suatu variabel acak X dengan sifat $P(X \leq x) = F(x)$ untuk semua x. Dengan *invers transform*

$$X = F^{-1}(U), \qquad\qquad U \sim Unif[0, 1]$$

dimana F adalah suatu fungsi distribusi kumulatif, F^{-1} adalah fungsi invers dari F, dan Unif[0,1] menyatakan distribusi uniform [0,1]

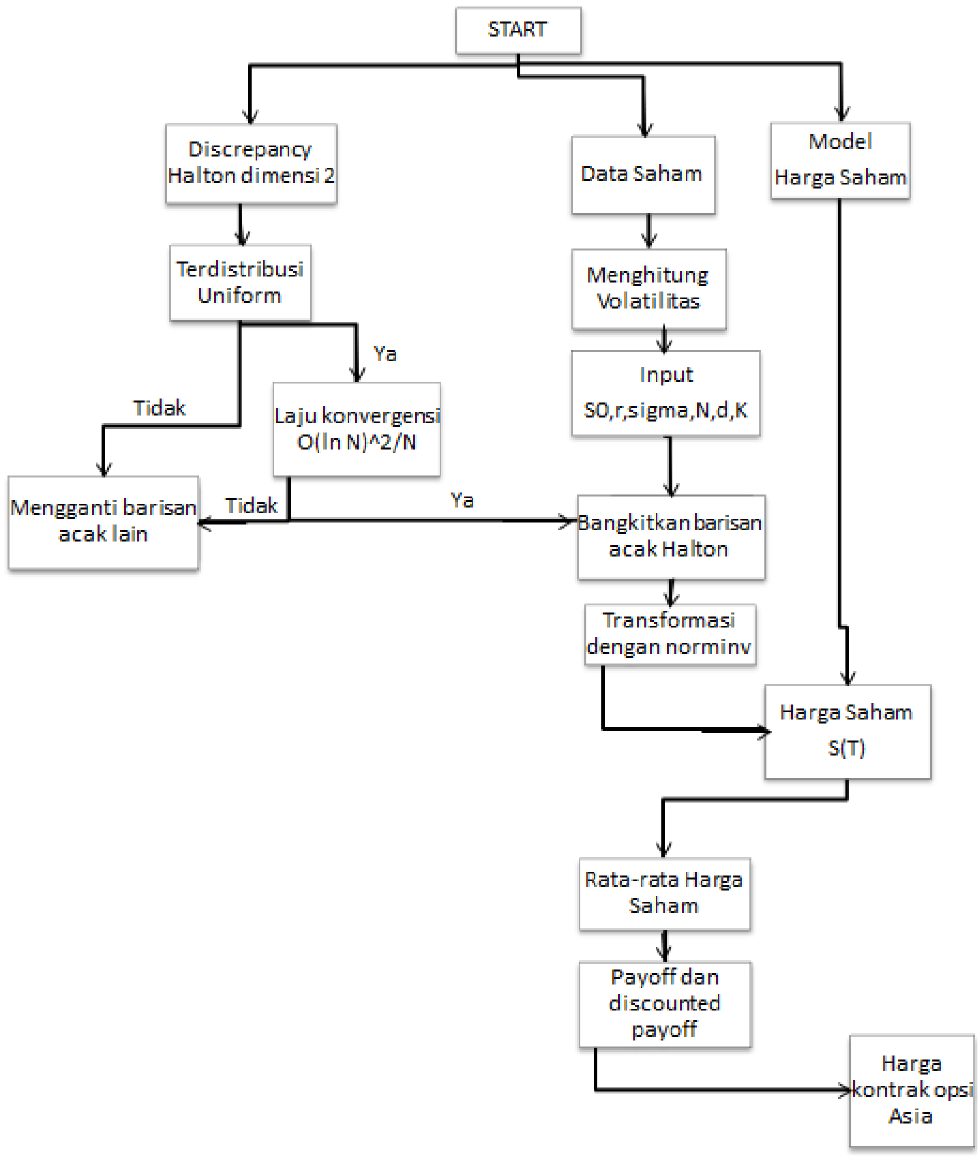
Bukti. Untuk membuktikan bahwa *invers transform* menghasilkan sampel dari F, akan diperiksa distribusi dari X yaitu:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P(F^{-1}(U) \leq x) \\ &= P(U \leq F(x)) = F(x) \end{aligned}$$

□

Berdasarkan Teorema *Invers Transform*, misalkan $U \sim Unif[0, 1]$ dan $\Phi(x)$ adalah fungsi kumulatif normal standar (2.32) maka $\Phi^{-1}(U)$ adalah suatu sampel dari Φ. $\Phi^{-1}(U)$ adalah fungsi iners normal, nilainya akan diaproksimasikan menggunakan fungsi norminv pada *software* Matlab yaitu:

$$\Phi^{-1}(U) = norminv(P, \mu, \sigma)$$



Gambar 2.3: Diagram alir penentuan harga kontrak opsi Asia

BAB III

PEMBAHASAN

Pembahasan pada bab ini merupakan penjabaran proses untuk menentukan harga kontrak opsi Asia dengan rata-rata aritmatik. Penentuan distribusi rata-rata aritmatik akan diaproksimasi menggunakan metode *Quasi Monte Carlo*

3.1 Metode *Quasi Monte Carlo*

Metode *Quasi Monte Carlo* didasari pada barisan bilangan yang terdistribusi uniform. Pada bab sebelumnya sudah dijelaskan mengenai metode *Quasi Monte Carlo* secara umum dan konsep yang mendasari penggunaannya. Pada pendefinisian *Quasi Monte Carlo*, dimensi (d) harus terlebih dahulu diketahui. Dimensi dari suatu masalah biasanya didefinisikan sebagai banyaknya *time step* atau banyaknya aset dasar yang digunakan. Pada penulisan ini hanya fokus menggunakan dua dimensi masalah.

Titik-titik yang akan dibangkitkan menjadi dasar dari tujuan utama penulisan. Metode *Quasi Monte Carlo* adalah menghasilkan titik-titik x_n, $(n = 1, \ldots, N)$ yang bertujuan untuk meminimalisir kesalahan pada pendekatan (2.23). Berdasarkan tujuan ini, himpunan titik-titik x_n, $(n = 1, \ldots, N)$ di $[0, 1)$ akan diganti dengan suatu barisan tak berhingga dari titik-titik $x_n(n = 1, \ldots, N)$ di $[0, 1)^2$. Diharapkan kesalahan pada pendekatan (2.25) dapat diabaikan dengan memperbesar nilai N, dengan kata lain dapat ditulis sebagai:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_n) = \int_{[0,1)^d} f(x)dx \tag{3.1}$$

Barisan $x_n(n = 1, \ldots, N)$ di $[0, 1)^2$ dapat memenuhi (3.1) jika barisan yang terdistribusi uniform di $[0, 1)^2$ memenuhi definisi uniform pada persamaan (2.24).

Kesalahan (*error*) akan minimum dengan mengganti himpunan titik-titik x_n dimana $(n = 1, \ldots, N)$ di $[0, 1)^2$ dengan suatu barisan tak berhingga yang berdistribusi uniform. Pemilihan titik-titik x_n $(n = 1, \ldots, N)$ di $[0, 1)^2$ yang berdistribusi uniform menjadi hal yang penting dalam pencapaian tujuan ini, yang diharapkan akan memperoleh laju konvergensi yang lebih baik. Pada himpunan diskrit, titik-titik x_n $(n = 1, \ldots, N)$ di $[0, 1)^2$ dikatakan berdistribusi uniform baik jika himpunan titik-titik tersebut benar-benar terdistribusi secara uniform. Faktanya selalu ada subinterval yang tidak memuat satu titikpun dari titik-titik yang diberikan, sehingga perlu adanya ukuran yang dapat mengukur *uniformity* suatu himpunan titik yang diberikan. Ukuran tersebut dikenal dengan *Discrepancy*, bertujuan untuk mengukur deviasi suatu barisan dari distribusi uniform yang ideal. *Descrepancy* (Defini 2.8.4) dan *star descrepancy* (Definisi 2.8.5) dihubungkan dengan ketaksamaan (Teorema 2.8.1) dalam beberapa dimensi sangat mirip. Pada teorema ketaksamaan dimensi dua memiliki hubungan ketaksamaan sangat mirip dengan teorema 2.8.1. Berikut akan dibuktikan teorema 2.8.1 berlaku untuk dua dimensi.

Misal $(d = 2)$, J merupakan sub interval dari I^2, yang didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} J &= \{(x_1, x_2) \in I^2 : \alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1, \text{dan } \alpha_2 \leq x_2 \leq \beta_2, \} \\ &= [\alpha_1, \beta_1) \times [\alpha_2, \beta_2), 0 \leq \alpha_i < \beta_i \text{ dimana } i = 1, 2 \end{aligned}$$

didapatkan,

$$J_1^* = \Big([0, \beta_1) \times [0, \beta_2)\Big) \qquad J_3^* = \Big([0, \beta_1) \times [0, \alpha_2)\Big)$$

$$J_2^* = \Big([0, \alpha_1) \times [0, \alpha_2)\Big) \qquad J_4^* = \Big([0, \beta_2) \times [0, \alpha_1)\Big)$$

Sehingga,

$$\lambda(J) = \lambda(J_1^*) - \lambda(J_2^*) - \lambda(J_3^*) + \lambda(J_4^*)$$

dan

$$A(J;N) = A(J_1^*;N) - A(J_2^*;N) - A(J_3^*;N) + A(J_4^*;N) \tag{3.2}$$

Sedemikian hingga,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{A(J;N)}{N} - (\lambda(J))\right| &= \left|\frac{A(J_1^*;N) - A(J_2^*;N) - A(J_3^*;N) + A(J_4^*;N)}{N} - \right. \\
&\quad \left.(\lambda(J_1^*) - \lambda(J_2^*) - \lambda(J_3^*) + \lambda(J_4^*))\right| \\
&= \left|\frac{A(J_1^*;N)}{N} - \lambda(J_1^*) + \lambda(J_2^*) - \frac{A(J_2^*;N)}{N} + \lambda(J_3^*) - \right. \\
&\quad \left.\frac{A(J_3^*;N)}{N} + \lambda(J_4^*) - \frac{A(J_1^*;N)}{N}\right| \\
&\leq \left|\frac{A(J_1^*;N)}{N} - \lambda(J_1^*)\right| + \left|\frac{A(J_2^*;N)}{N} - \lambda(J_2^*)\right| + \\
&\quad \left|\frac{A(J_3^*;N)}{N} - \lambda(J_3^*)\right| + \left|\frac{A(J_1^*;N)}{N} - \lambda(J_1^*)\right|
\end{aligned}$$

supremum dari kedua ruas

$$\begin{aligned}
\sup\left|\frac{A(J;N)}{N} - (\lambda(J))\right| &\leq \sup\left|\frac{A(J_1^*;N)}{N} - \lambda(J_1^*)\right| + \sup\left|\frac{A(J_2^*;N)}{N} - \lambda(J_2^*)\right| + \\
&\quad \sup\left|\frac{A(J_3^*;N)}{N} - \lambda(J_3^*)\right| + \sup\left|\frac{A(J_1^*;N)}{N} - \lambda(J_1^*)\right|
\end{aligned}$$

$$D_N \leq D_N^* + D_N^* + D_N^* + D_N^*$$

$$D_N \leq 4D_N^* \tag{3.3}$$

Suatu barisan berhingga dari titik-titik dengan *discrepancy* yang kecil, baik untuk D_N maupun D_N^* memberikan suatu approksimasi yang *valid* ke distribusi uniform, dalam arti untuk suatu barisan takberhingga $\lim_{N\to\infty} D_N = 0$ dan $\lim_{N\to\infty} D_N^* = 0$, barisan tersebut ekuivalen dengan barisan yang berdistribusi uniform di $[0,1)^2$. Hal ini dapat ditunjukkan seperti pada teorema 1.1 bahwa sebuah barisan w terdistribusi uniform di $\mathbb{R}^k$ jika dan hanya jika $\lim_{N\to\infty} D_n(w) = 0$ atau ekuivalen $\lim_{N\to\infty} D_n^*(w) = 0$. Hal tersebut dinyatakan pada teorema berikut :

Teorema 3.1.1. Barisan $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ terdistribusi uniform di $[0,1)$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{N\to\infty} D_N = 0$

Bukti. $(\rightarrow)$ Akan dibuktikan jika barisan $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ terdistribusi uniform di $[0,1)$ maka $\lim\limits_{N\to\infty} D_N = 0$.

Pilih sebuah bilangan bulat $m \geq 2$ untuk $0 \leq k \leq m-1$, misalkan I_k notasi sebuah interval $I_k = \left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right)$. Selama $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ terdistribusi uniform di $[0,1)$, terdapat sebuah bilangan bulat positif $N_0 = N_0(m)$ sedemikian sehingga untuk $N \geq N_0$ dan untuk setiap $k = 0, 1, \ldots, m-1$, didapati

$$\frac{1}{m}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{N} c_{I_k}(x_i)}{N} \leq \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{m}\right) \tag{3.4}$$

Selanjutnya, misalkan $J = [\alpha, \beta)$ adalah sembarang subinterval di $[0,1)$. Berarti terdapat interval J_1 dan J_2, gabungan berhingga dari beberapa interval I_k sedemikian hingga $J_1 \subseteq J \subseteq J_2$, $\lambda(J) - \lambda(J_1) < \frac{2}{m}$ dan $\lambda(J_2) - \lambda(J) < \frac{2}{m}$ dan $\lambda(J_2) - \lambda(J) < \frac{2}{m}$

Dari (3.3) untuk setiap $N \geq N_0$ akan diperoleh:

$$\lambda(J_1)\left(1 - \frac{1}{m}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{N} c_{J_1}(x_i)}{N} \leq \frac{\sum_{i=1}^{N} c_{J}(x_i)}{N} \leq \frac{\sum_{i=1}^{N} c_{J_2}(x_i)}{N} \leq \frac{\sum_{i=1}^{N} c_{J_2}(x_i)}{N}$$

Akibatnya, akan diperoleh

$$\left(\lambda(J) - \frac{2}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right) < \frac{\sum_{i=1}^{N} c_{J}(x_i)}{N} < \left(\lambda(J) - \frac{2}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

Karena $\lambda \leq 1$, maka

$$-\frac{3}{m} + \frac{2}{m^2} > \frac{\sum_{i=1}^{N} c_{J}(x_i)}{N} - \lambda(J) < \frac{3}{m} + \frac{2}{m^2}, \text{untuk setiap } N \geq N_0 \tag{3.5}$$

Karena kedua batas (3.4) tidak bergantung pada J, maka $D_N \leq \frac{3}{m} + \frac{2}{m^2}$ untuk setiap $N \geq N_0$ dengan demikian batas tersebut dapat dibuat sedemikian kecil, maka terbukti bahwa jika $X = x_{n_n}^{\infty} = 1$ terdistribusi uniform di $[0,1)$ maka $\lim\limits_{N\to\infty} D_N = 0$

$(\leftarrow)$ Akan ditunjukkan jika $\lim\limits_{N\to\infty} D_N = 0$ maka barisan $X = \{x_i\}_{n=1}^{\infty}$ terdistribusi uniform di $[0,1)$.

Karena $\lim_{N\to\infty} D_N = 0$, maka berdasarkan definisi

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} D_N &= \lim_{N\to\infty} \sup_J \left| \frac{\sum_{i=1}^{N} c_J(x_i)}{N} - \lambda(J) \right| \\ &= \sup_J \lim_{N\to\infty} \left| \frac{\sum_{i=1}^{N} c_J(x_i)}{N} - \lambda(J) \right| = 0\end{aligned}$$

Karena J adalah sembarang subinterval di $[0,1)$, dengan demikian untuk setiap subbinterval J di $[0,1)$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N} c_j(x_i)}{N} = \lambda(J)$$

Jadi, berdasarkan definisi distribusi uniform maka terbukti bahwa $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ terdistribusi uniform di $[0,1)$. □

Berdasarkan teorema ketaksamaan dan teorema 3.1.1 didapatkan akibat 3.1.1, yaitu

Akibat 3.1.1. Barisan $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ terdistribusi uniform di $[0,1)$ jika dan hanya jika $\lim_{N\to\infty} D_N^* = 0$

Sehingga menghasilkan titik-titik x_i dengan kesalahan minimum akan terpenuhi jika discrepancy maupun star discrepansy dari suatu himpunan titik yang dihasilkan dari $[0,1)^2$ bernilai kecil. Namun, pada suatu himpunan dari N titik yang dipilih secara random, ekspektasi *discrepancy*-nya hanya memenuhi:

$$E(D_N) = O\left(\sqrt{\frac{\log\log N}{N}}\right) \tag{3.6}$$

Ekspektasi ini sesuai laju konvergensi metode Monte Carlo yang berdasarkan dengan bilangan acak, yaitu $O(1/\sqrt{N})$

Himpunan N titik dapat dibentuk dengan barisan *Star discrepancy* yang lebih kecil yang dikenal dengan barisan *low-discrepancy* (Definisi 2.9.7). Baris tersebut menghasilkan barisan *star discrepancy* yang lebih kecil dari pada barisan bilangan acak. Hal ini yang menyebabkan barisan *low-discrepancy* terdistribusi secara uniform lebih baik, dapat dilihat pada gambar 2.2.

Tujuan selanjutnya ialah mendapatkan laju konvergensinya yang lebih baik. Jika dibandingkan ekspektasi *discrepancy Monte Carlo* (3.7) dengan *low discrepancy,low discrepancy* (2.34) memiliki *star discrepancy* lebih kecil dari pada bilangan yang dipilih secara acak pada *Monte Carlo*. Hal ini juga yang menyebabkan laju konvergensinya lebih baik. Untuk melihat perbandingan laju konvergensi batas kesalahan integrasi menuju nol dapat dilihat pada tabel

Tabel 3.1: Perbandingan laju konvergensi batas kesalahan integrasi menuju nol

N	$\sqrt{\frac{\log\log N}{N}}$	$\frac{(\log N)^2}{N}$
10^1	0,28879620	0,1
10^2	0,12357911	0,04
10^3	0,04396186	0,009
10^4	0,01490076	0,0016
10^5	0,00494315	0,00025

Pada tabel tersebut menunjukan bahwa dengan menggunakan barisan *low discrepancy* mendapatkan laju konvergensi batas kesalahan integrasi menuju nol yang lebih cepat dari pada dengan menggunakan barisan bilangan yang dipilih acak.

Jika untuk basis $b_1, ..., b_s$ barisan acak Halton dimensi dua *Descrepancy* dari $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$

$$D_N(x_n) = O\left(\frac{(\log N)^2}{N}\right) \tag{3.7}$$

lebih tepat lagi *low-discrepancy*

$$D_N^* < \frac{2}{N} + \frac{1}{N}\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{b_i - 1}{2\log b_i}\log N + \frac{b_i + 1}{2}\right) \tag{3.8}$$

Hal ini berdasarkan teorema berikut

Teorema 3.1.2. Jika S merupakan barisan Halton dalam basis relatif prima,

$b_1, \ldots, b_s$ maka

$$D_N^* < \frac{s}{N} + \frac{1}{N} \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{b_i - 1}{2 \log b_i} \log N + \frac{b_i + 1}{2} \right) \text{ untuk setiap } N \geq 1$$

Bukti. Jelas $N \geq 1$ dan $D(J) = A(J; S_N) - N\lambda_s(J)$ untuk interval $J \subseteq I^s$, dimana S_N adalah himpunan titik yang ditetapkan dari urutan N pertama dari barisan *Halton*. Untuk $1 \leq i \leq s$ dan sebuah bilangan bulat $e \geq 0$, misal $\epsilon_i(e)$ bagian dari setiap interval $[0, ab_i^e)$ dengan $a \in \mathbb{Z}, 0 < a < b_i^e$, dan misal $\mathcal{F}_i(e)$ menjadi bagian dari setiap interval $[cb_i^{-f}, (c{+}1)b_i^f]$ dengan $c, f \in \mathbb{Z}$ memuat $0 \leq f \leq e$ dan $0 \leq c < b_i^f$. Untuk bilangan bulat $e_1, \ldots, e_s \geq 0$, misal $\epsilon(e_1, \ldots, e_s)$ menjadi bagian dari setiap interval $E = \prod_{i=1}^s E_i$ dengan $E_i \in \epsilon_e(e_i \cup \mathcal{F}_i)(e_i)$ untuk $1 \leq i \leq s$. Klaim bahwa

$$|D(E)| \leq \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{1}{2}(b_i - 1)e_i + 1 \right) \text{ untuk setiap } E = \prod_{i=1}^{s} E_i \in \epsilon(e_1, \ldots, e_s) \quad (3.9)$$

ketika sebuah hasil kali kosong ialah 1. Akan dibuktikan (3.9) dengan induksi pada bilangan k dari index i untuk setiap $1 \leq i \leq s$. Braisan pada barisan halton ialah

$$x_n = (\psi_{b_1}(n), \ldots, \psi_{b_s}(n)) \in E \quad (3.10)$$

jika dan hanya jika, untuk $1 \leq i \leq s$, digit pertama f_i (dalam basisi b_i) dari $\psi_{b_i}(n)$ setelah sebuah titik desimal memiliki beberapa nilai yang ditentukan. Setara untuk $1 \leq i \leq s$, f_i digit paling tidak signifikan dari n dalam basis b_i harus memiliki beberapa nilai yang ditentukan, atau dengan kata lain, n Harus terletak di kelas residu yang ditentukan $\mod b_i^{f_i}$. Selama $b_1, \ldots, b_s$ merupakan pasangan bilangan relatif prima, mengikuti Teorema sisa Cina bahwa kondisi terakhir adalah ekuivalen ke n terletak di kelas residu yang ditentukan mod $m = b_1^{f_1}, \ldots, b_s^{f_s}$. Akibatnya, diantara m periode berurut dari S, tepatnya salah satunya terletak di E. ini menunjukan bahwa $|D(E)| \leq 1$

Misal bahwa untuk $k \geq 1$ anggap telah ditetapkan untuk $k-1$, dan anggap $E = \prod_{i=1}^s E_i \in \epsilon(e_1, \ldots, e_s)$, dimana diasumsikan tanpa kehiangan generalitasnya bahwa $E_i \notin \mathcal{F}_i(e_i)$ untuk $k+1 \leq i \leq s$. Maka $E_1 = [0, ab_1^{-e_1})$ untuk beberapa $a \in \mathbb{Z}, 0 < a < b_1^{e_1}$. Misal

$$ab_1^{-e_1} = \sum_{j=1}^{e_1} d_j b_1^{-j}$$

menjadi sebuah digit ekspansi dalam basis b_1. Maka E_1 dapat ditulis sebagai gabungan disjoint untuk interval d_1 dalam $\mathcal{F}_1(e_1)$ pada panjang b_1^{-1}, untuk interval d_2 dalam $\mathcal{F}_1(e_1)$ pada panjang b_1^{-2} dan seterusnya. Sedemikian hingga,

$$E_1 = \bigcup_{r=1}^{d} F_r \tag{3.11}$$

dengan pasangan disjoint $F_r \in \mathcal{F}_1(e_1)$ untuk $1 \leq r \leq d := \sum_{j=1}^{e_1} d_j$, dan E adalah gabungan disjoint

$$E = \bigcup_{r=1}^{b} (F_r \times E_2 \times \cdots \times E_s)$$

Hsl ini mengikuti

$$|D(E)| \leq \sum_{r=1}^{d} |D(F_r \times E_2 \times \cdots \times E_s)| \leq d \prod_{i=2}^{k} \left(\frac{1}{2}(b_i - 1)e_i + 1 \right) \tag{3.12}$$

dimana pada ketidaksamaan kedua, kita gunakan hipotesis induksi. Dengan $G = [ab_1^{e_1}, 1)$, kita dapat $E_1 = [0, 1]\ G$ sehingga

$$\begin{aligned} |D(E)| &\leq |D([0,1] \times E_2 \times \cdots \times E_s)| + |D(G \times E_2 \times \cdots \times E_s)| \\ &\leq \prod_{i=2}^{k} \left(\frac{1}{2}(b_i - 1)e_i + 1 \right) + |D(G \times E_2 \times \cdots \times E_s)| \end{aligned}$$

Selanjutnya G ditulis sebagai gabungan disjoint dari $(b_1 - 1)e - d + 1$ interval di $\mathcal{F}_1(e_1)$; oleh karena itu

$$|D(E)| \leq ((b_1 - 1)e_1 - d + 2) \prod_{i=2}^{k} \left(\frac{1}{2}(b_i - 1)e_1 + 1 \right)$$

Menambahkan ketaksamaan ini ke (3.13) dan membagi dengan 2, kita mendapatkan (3.10) untuk nilai k.

Misal $J = \prod_{i=1}^{s}[0, u_i) \subseteq I^s$ sebuah sebarang. Untuk $1 \leq i \leq s$, misal e_i bilangan bulat terkecil dengan $b_i^{e_i} \geq N$ dan misal a_i bilangan bulat terkecil dengan $a_i b_i^{-e_i} \geq u_i, E = \prod_{i=1}^{s}[0, a_i b_i^{e_i}]$. Selama koordinat ke-i dari setiap titik di S_N adalah rasional dengan penyebut $b_i^{e_i}$, kita dapatkan $A(J; S_N) = A(E; S_N)$ Selanjutkan didapatkan $E \in \epsilon(e_1, \ldots, e_s)$ dan juga

$$\begin{aligned}
|D(J)| &\leq N(\lambda_s(E) - \lambda(J) + |D(E)| \\
&\leq N\sum_{i=1}^{s} b_i^{-e_i} + |D(E)| \leq |D(E)| \\
&\leq s + \prod_{i=1}^{s}\left(\frac{1}{2}(b_i - 1)e_i + 1\right) \\
&< s + \prod_{i=1}^{s}\left(\frac{(b_i - 1)}{2}\left(1 + \frac{\log N}{log b_i}\right) + 1\right) \\
&< s + \prod_{i=1}^{s}\left(\frac{(b_i - 1)}{2} + \frac{(b_i - 1)\log N}{2 log b_i} + 1\right) \\
&< s + \left(\prod_{i=1}^{s}\frac{(b_i - 1)\log b_i + (b_i - 1)\log N + 2\log b_i}{2\log b_i}\right) \\
&< s + \left(\prod_{i=1}^{s}\frac{(b_i + 1)\log b_i + (b_i - 1)\log N}{2\log b_i}\right) \\
&< s + \prod_{i=1}^{s}\left(\frac{(b_i + 1)}{2} + \frac{(b_i - 1)}{2 log b_i}\log N\right)
\end{aligned}$$

Berdasarkan teorema estimasi discrepancy, didapatkan

$$D(J) < \frac{s}{N} + \frac{1}{N}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{(b_i + 1)}{2} + \frac{(b_i - 1)}{2 log b_i}\log N\right)$$

Sehingga dengan teorema pertidaksamaan

$$D_N^* < \frac{s}{N} + \frac{1}{N}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{(b_i + 1)}{2} + \frac{(b_i - 1)}{2 log b_i}\log N\right)$$

□

3.2 Penentuan Harga Opsi Asia Menggunakan Rata-Rata Aritmatika

Karakteristik rata-rata Aritmatika ialah ketika harga saham berdistribusi lognormal, rata-rata aritmatik dari harga saham tidak berdistribusi lognormal. Rata-rata aritmatik merupakan penjumlahan dari variabel-variabel acak (harga saham) yang lognormal, didapatkan :

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i) = \frac{1}{n}(S(t_1) + S(t_2) + S(t_3) + \cdots + S(t_n)) \tag{3.13}$$

Berdasarkan sifat ditribusi lognormal, distribusi dari penjumlahan variabel acak yang berdistribusi lognormal adalah tidak lognormal. Maka hal ini menunjukkan distribusi rata-rata aritmatik harga saham tidak diketahui secara pasti maka perlu adanya aproksimasi untuk dapat menghitung rata-rata aritmatik harga saham. Metode aproksimasi yang akan digunakan ialah metode *Quasi Monte Carlo* (QMC).

Pada simulasi *Quasi Monte Carlo*, approksimasi harga kontrak saham dapat dihasilkan melalui beberapa proses transformasi. Transformasi yang dilakukan pada simulasi *Quasi Monte Carlo* ialah

$$U_i \to Z_i \to S_i(T) \to S^{(i)}_{(ave)} \to \hat{C}^{(i)}_{(ave)} \to \hat{C}_{(ave)} \tag{3.14}$$

dimana transformasi U_i yang berdistribusi uniform $[0, 1)^2$ menjadi barisan Z_i yang berdistribusi normal. Transformasi kedua, menghitung harga saham pada saat T dari variabel acak normal standar. Transformasi ketiga, menghitung rata-rata harga saham $S^{(i)}_{(ave)}$. Transformasi selanjutnya menghitung ekspektasi *discounted payoff* $\hat{C}^{(i)}_{(ave)}$ dari setiap harga saham $\hat{C}_{(ave)}$ dan transformasi terakhir menghitung harga kontrak saham.

Sebelum melakukan Nilai rata-rata harga asset dasar selama masa hidup opsi dapat ditentukan, jika terlebih dahulu diketahui taksiran parameter volatilitas ($\hat{\sigma}$), harga saham saat ini $S(0)$, waktu jatuh tempo (T) dan tingkat bunga bebas resiko r, serta barisan yang berdistribusi normal standar Z_i. Metode penaksiran parameter volatilitas yang digunakan adalah berdasarkan *historical volatility* yaitu

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{S(t)}{S(t_{i-1})}\right)\right)^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{S(t)}{S(t_{i-1})}\right)^2}$$

Menentukan rata-rata harga opsi call Asia dengan metode QMC, dijelaskan dengan algoritma berikut:

1. Bangkitkan barisan Halton dimensi 2 yang terdistribusi *uniform* $(U_i, i = 1, \ldots, N)$.

2. Transformasi barisan Halton yang terdistribusi *uniform* (U_i) menggunakan fungsi norminv dengan bantuan *software* Matlab.

3. Menghitung harga saham $S_i(T)$ dengan *input* r, σ, T dan Z_i dimana Z_i merupakan hasil transformasi. Didapatkan $S_i(T)$ dengan

$$S_i(T) = S(0)\exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_i\right] \tag{3.15}$$

4. Nilai rata-rata harga saham detentukan dengan *input* m dan $S_i(T)$

$$S^{(i)}_{(ave)} = A_T = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} S^{(i)}_j \tag{3.16}$$

5. Menghitung *payoff* $C^{(i)}_{(ave)}$ diperlukan rata-rata harga saham $(S^{(i)}_{(ave)})$ dan nilai *strike price* (K). Didapatkan dengan

$$C^{(i)}_{(ave)} = max(0, S^{(i)}_{(ave)} - K) \tag{3.17}$$

6. Menghitung *discounted payoff*

$$\hat{C}^{(i)}_{(ave)} = e^{-rT}.C^{(i)}_{(ave)} \tag{3.18}$$

7. Aproksimasi harga opsi call Asia

$$\hat{C}_{(ave)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{C}_{(ave)}^{(i)} \tag{3.19}$$

3.3 Contoh Kasus

Pada contoh kasus ini akan dipaparkan langkah-langkah implementasi *Quasi Monte Carlo* (QMC) untuk mengaproksimasi nilai kontrak opsi *call* Asia. Data yang akan diolah berupa data saham PT. Waskita Karya (PERSERO) terhitung sejak tanggal 29 Januari 2016 - 27 Januari 2017.

1. Data saham diperlukan dalam pengolahan nilai opsi dengan metode *Quasi Monte Carlo* ini memiliki tujuan untuk mendapatkan nilai $S(0)$ dan menghitung taksiran parameter volatilitas ($\hat{\sigma}$) pada model pergerakan harga saham. $S(0)$ pada perhitungan ini yaitu data pada saham tanggal 27 Januari 2017 Data terdapat pada lampiran periode 245 hari kerja, dari alamat situs : http://www.duniainvestasi.com/bei/prices/stock.

   Penaksiran parameter volatilitas (σ) menggunakan *historical volatility*, dimana data yang akan digunakan diasumsikan berdistribusi lognormal. Perhitungan nilai volatilitas harian, didapatkan

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{S(t)}{S(t_{i-1})}\right)\right)^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{S(t)}{S(t_{i-1})}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{244}(0,090861) - \frac{1}{245(244)}(0,370105476)^2} \\
&= \sqrt{(0,000370091)} = 0,019237755
\end{aligned}$$

   untuk volatilitas tahunan

$$\begin{aligned}
\sigma &= (0,019237755)(\sqrt{245}) \\
&= 0,301118495
\end{aligned}$$

didapatkan nilai volatilitasnya sebesar 0,30

2. Data tingkat suku bunga bebas resiko r yang digunakan dalam waktu jatuh tempo 1 tahun, misal sebesar 0,5 dengan *strike price* sebesar Rp.2.600,00.

3. Menentukan harga $S_i(T)$ Terlebih dahulu bangkitkan barisan Halton yang terdistribusi uniform.

   (a) Menentukan himpunan bilangan *Halton* dengan $N = 245, N = 500, N = 1000$ dan seterusnya.

   (b) Mendapatkan barisan acak *Halton*.

   (c) Transformasi barisan Halton tersebut menjadi barisan bilangan yang berdistribusi normal standar dengan menggunakan fungsi norminv pada *software* Matlab

4. Harga saham $S_i(T)$ berdistribusi lognormal dengan dengan input $r = 0.5, \sigma = 0.3, T = 1,$ dan menggunakan barisan acak yang telah ditransformasi menjadi terdistribusi normal Z_i.

$$S_i(T) = S(0)\exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_i\right]$$

5. Nilai rata-rata harga aset detentukan dengan persamaan, dengan *input* m dan $S_i(T)$

$$S^{(i)}_{(ave)} = A_T = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} S_j^{(i)}(T)$$

6. Menghitung *payoff* untuk mendapatkan menghitung *discounted payoff.*

7. Rata-rata dari *discounted payoff* menghasilkan aproksimasi harga kontrak opsi call Asia, didapatkan. :

Tabel 3.2: Taksiran harga opsi call Asia dengan *QMC* barisan acak *Halton*

d	N	$\hat{C}_{(ave)}$ (Rp)	SE
2	245	719.09	34.9042
	500	720.05	24.2500
	1000	720.3057	17.2393
	10000	720.9791	5.468
	100000	721.0202	1.7303
	1000000	721.0217	0.4298
	10000000	721.0218	0.1730

Dengan memperbesar nilai N akan memperkecil kesalahan, sehingga didapatkan taksiran nilai harga opsi *call* Asia Rp.721,0218.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Metode *Quasi Monte Carlo* didasari sebuah barisan yang terdistribusi uniform, tujuan pertama dengan menggunakan metode *Quasi Monte Carlo* ialah menghasilkan titik-titik $x_i, i = 1, \ldots, N$ di $[0,1)^2$ sehingga memperoleh kesalahan yang minimum, yaitu dengan mengganti titik-titik tersebut dengan barisan $x_i, i = 1, \ldots, N$ di $[0,1)^2$ yang memenuhi barisan yang terdistribusi *uniform.*

Berdasarkan teorema 3.1.2. dan teorema 3.1.1 beserta akibatnya yang telah dibuktikan menunjukkan bahwa barisan acak *Halton* dimensi-2 memenuhi barisan yang terdistribusi *uniform.* Tujuan selanjutnya ialah mendapat nilai konvergensi yang lebih baik yang diharapkan kesalahan pada pendekatan dapat diabaikan dengan memperbesar nilai N, hal ini dapat dilihat pada tabel 3.1 bahwa barisan low discrepancy memiliki laju konvergensi batas kesalahan integrasi menuju nol yang lebih cepat. Barisan Halton merupakan barisan *low-discrepancy* (Teorema 3.1.2) dengan star discrepancy

$$D_N^* < \frac{s}{N} + \frac{1}{N}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{b_i - 1}{2\log b_i}\log N + \frac{b_i + 1}{2}\right)$$

Barisan dapat dibangkitkan karena telah terpenuhi semua tujuan dari metode *Quasi Monte Carlo.* Selanjutnya ialah transformasikan barisan Halton yang berdistribusi uniform menjadi berdistribusi normal yaitu dengan norminv menggunakan bantuan software Matlab, dengan demikian dapat dihitung harga saham $S_i(T)$, rata-rata harga asset, *payoff* dan menghitung *discounted payoff* hingga mendapat taksiran dari nilai opsi call Asia.

4.2 Saran

Beberapa saran yang bermanfaat guna menindak lanjuti tugas akhir ini, yaitu

1. Penerapan harga opsi Asia menggunakan rata-rata aritmatik, dengan menggunakan beberapa metode aproksimasi Turnbull dan Wakemann, aproksimasi Levy, Monte Carlo Valuation, dan metode-metode lainnya.

2. Penentuan harga opsi put Asia menggunakan metode yang sama tetapi barisan yang berbeda seperti Barisan acak Sobol, barisan acak Faure, dan barisan acak Naeiderreiter.

3. Menerapkan merode *Quasi Monte Carlo* pada perhitungan opsi atau kasus yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Boyle, P dan Tan, K.S. 1997. *Quasi-Monte Carlo Methods.* Waterloo: *University of Waterloo*

Brandimate, P. 2006. *Numerical Methods in Finance and Economics.* Edisi ke-2. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Goncu, A. 2009. *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods in Financial Derivative Pricing. disertasi.* Florida State University Libraries. Turki.

Hahn, B.D dan Valentine, D.T. 2007. *Essential Matlab For Engineers and Scientist.* Edisi ke-3. ELSEVIER.

Khuriyanti. 2009. Penentuan Harga Opsi Asia. Depok: Universitas Indonesia

Kubendran, Quasi-Monte Carlo Approach to Asian Option Pricing, *Asia-Pacific Journal of Management, Research Vol. 10: 67-78, 2014*

Krykova, Inna. 2003. *Evaluating of Path-Dependent Secutitie With Low Discrepancy Methods.* Worcester Polytechnic Institute.

Niederreiter,H. 1974. *Uniform Distribution Of Sequences.* Edisi ke-2. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Niederreiter,H. 1992. *Random Number Generation and Quasi-Monte Catlo Methods.* Edisi ke-2. Philadelphia: Austrian Academy of Sciences.

Rahmawati,N. 2010. *mplementasi metode quasi-monte carlo dengan barisan van der corput dalam mengaproksimasi premi opsi call eropa.* Depok: Universitas Indonesia

Sabino,P. 2007. *Monte Carlo and Quasi Monte Carlo Methods in Option Pricing and Hedging.* Bari: University of Bari.

LAMPIRAN

Data Saham PT. Waskita Karya (Persero)

Tanggal	$S(t)$	$\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}$	$\ln\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}$	$(\ln\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})})^2$
27 Januari 2017	2570			
26 Januari 2017	2580	0,996124031	-0,0038835	0,000015
25 Januari 2017	2550	1,011764706	0,01169604	0,000137
24 Januari 2017	2540	1,003937008	0,003929278	0,000015
23 Januari 2017	2530	1,003952569	0,003944778	0,000016
20 Januari 2017	2620	0,965648855	-0,034955015	0,001222
19 Januari 2017	2670	0,981273408	-0,018904155	0,000357
18 Januari 2017	2660	1,003759398	0,00375235	0,000014
17 Januari 2017	2640	1,007575758	0,007547206	0,000057
16 Januari 2017	2630	1,003802281	0,003795071	0,000014
13 Januari 2017	2640	0,996212121	-0,003795071	0,000014
12 Januari 2017	2600	1,015384615	0,015267472	0,000233
11 Januari 2017	2590	1,003861004	0,003853569	0,000015
10 Januari 2017	2580	1,003875969	0,003868477	0,000015
09 Januari 2017	2540	1,015748031	0,015625318	0,000244
06 Januari 2017	2580	0,984496124	-0,015625318	0,000244
05 Januari 2017	2550	1,011764706	0,01169604	0,000137
04 Januari 2017	2600	0,980769231	-0,019418086	0,000377
03 Januari 2017	2540	1,023622047	0,023347364	0,000545
30 Desember 2016	2550	0,996078431	-0,003929278	0,000015
29 Desember 2016	2600	0,980769231	-0,019418086	0,000377
28 Desember 2016	2470	1,052631579	0,051293294	0,002631
27 Desember 2016	2390	1,033472803	0,032924785	0,001084
23 Desember 2016	2300	1,039130435	0,038384243	0,001473
22 Desember 2016	2300	1	0	0,000000
21 Desember 2016	2360	0,974576271	-0,025752496	0,000663
20 Desember 2016	2430	0,971193416	-0,029229638	0,000854
19 Desember 2016	2440	0,995901639	-0,004106782	0,000017
16 Desember 2016	2480	0,983870968	-0,016260521	0,000264
15 Desember 2016	2520	0,984126984	-0,016000341	0,000256
14 Desember 2016	2530	0,996047431	-0,003960401	0,000016
13 Desember 2016	2570	0,984435798	-0,015686596	0,000246
09 Desember 2016	2570	1	0	0,000000
08 Desember 2016	2590	0,992277992	-0,007751977	0,000060
07 Desember 2016	2480	1,044354839	0,043399316	0,001884
06 Desember 2016	2490	0,995983936	-0,00402415	0,000016
05 Desember 2016	2480	1,004032258	0,00402415	0,000016
02 Desember 2016	2510	0,988047809	-0,012024193	0,000145
01 Desember 2016	2530	0,992094862	-0,00793655	0,000063

30 Nopember 2016	2550	0,992156863	-0,007874056	0,000062
29 Nopember 2016	2380	1,071428571	0,068992871	0,004760
28 Nopember 2016	2270	1,04845815	0,047320656	0,002239
25 Nopember 2016	2350	0,965957447	-0,034635497	0,001200
24 Nopember 2016	2290	1,026200873	0,025863511	0,000669
23 Nopember 2016	2360	0,970338983	-0,030109801	0,000907
22 Nopember 2016	2370	0,995780591	-0,004228336	0,000018
21 Nopember 2016	2300	1,030434783	0,029980832	0,000899
18 Nopember 2016	2320	0,99137931	-0,008658063	0,000075
17 Nopember 2016	2310	1,004329004	0,004319661	0,000019
16 Nopember 2016	2350	0,982978723	-0,017167804	0,000295
15 Nopember 2016	2180	1,077981651	0,075090451	0,005639
14 Nopember 2016	2290	0,951965066	-0,049226941	0,002423
11 Nopember 2016	2410	0,950207469	-0,05107493	0,002609
10 Nopember 2016	2500	0,964	-0,036663984	0,001344
09 Nopember 2016	2450	1,020408163	0,020202707	0,000408
08 Nopember 2016	2490	0,983935743	-0,016194686	0,000262
07 Nopember 2016	2500	0,996	-0,004008021	0,000016
04 Nopember 2016	2510	0,996015936	-0,003992021	0,000016
03 Nopember 2016	2480	1,012096774	0,012024193	0,000145
02 Nopember 2016	2580	0,96124031	-0,039530839	0,001563
01 Nopember 2016	2600	0,992307692	-0,007722046	0,000060
31 Oktober 2016	2620	0,992366412	-0,007662873	0,000059
28 Oktober 2016	2620	1	0	0,000000
27 Oktober 2016	2590	1,011583012	0,011516442	0,000133
26 Oktober 2016	2580	1,003875969	0,003868477	0,000015
25 Oktober 2016	2590	0,996138996	-0,003868477	0,000015
24 Oktober 2016	2590	1	0	0,000000
21 Oktober 2016	2610	0,992337165	-0,007692346	0,000059
20 Oktober 2016	2590	1,007722008	0,007692346	0,000059
19 Oktober 2016	2610	0,992337165	-0,007692346	0,000059
18 Oktober 2016	2640	0,988636364	-0,011428696	0,000131
17 Oktober 2016	2620	1,007633588	0,007604599	0,000058
14 Oktober 2016	2620	1	0	0,000000
13 Oktober 2016	2670	0,981273408	-0,018904155	0,000357
12 Oktober 2016	2670	1	0	0,000000
11 Oktober 2016	2640	1,011363636	0,011299555	0,000128
10 Oktober 2016	2630	1,003802281	0,003795071	0,000014
07 Oktober 2016	2620	1,003816794	0,003809528	0,000015
06 Oktober 2016	2620	1	0	0,000000

05 Oktober 2016	2610	1,003831418	0,003824096	0,000015
04 Oktober 2016	2690	0,970260223	-0,030190972	0,000911
03 Oktober 2016	2690	1	0	0,000000
30 September 2016	2620	1,026717557	0,026366876	0,000695
29 September 2016	2690	0,973977695	-0,026366876	0,000695
28 September 2016	2690	1	0	0,000000
27 September 2016	2690	1	0	0,000000
26 September 2016	2650	1,01509434	0,014981554	0,000224
23 September 2016	2650	1	0	0,000000
22 September 2016	2630	1,007604563	0,007575794	0,000057
21 September 2016	2620	1,003816794	0,003809528	0,000015
20 September 2016	2580	1,015503876	0,015384919	0,000237
19 September 2016	2700	0,955555556	-0,045462374	0,002067
16 September 2016	2650	1,018867925	0,018692133	0,000349
15 September 2016	2620	1,011450382	0,011385322	0,000130
14 September 2016	2550	1,02745098	0,027080959	0,000733
13 September 2016	2480	1,028225806	0,027834799	0,000775
09 September 2016	2590	0,957528958	-0,043399316	0,001884
08 September 2016	2640	0,981060606	-0,019121041	0,000366
07 September 2016	2690	0,981412639	-0,018762276	0,000352
06 September 2016	2700	0,996296296	-0,003710579	0,000014
05 September 2016	2750	0,981818182	-0,018349139	0,000337
02 September 2016	2760	0,996376812	-0,003629768	0,000013
01 September 2016	2730	1,010989011	0,010929071	0,000119
31 Agustus 2016	2790	0,978494624	-0,021739987	0,000473
30 Agustus 2016	2780	1,003597122	0,003590668	0,000013
29 Agustus 2016	2750	1,010909091	0,010850016	0,000118
26 Agustus 2016	2760	0,996376812	-0,003629768	0,000013
25 Agustus 2016	2790	0,989247312	-0,010810916	0,000117
24 Agustus 2016	2780	1,003597122	0,003590668	0,000013
23 Agustus 2016	2780	1	0	0,000000
22 Agustus 2016	2760	1,007246377	0,007220248	0,000052
18 Agustus 2016	2770	0,996389892	-0,00361664	0,000013
17 Agustus 2016	2770	1	0	0,000000
16 Agustus 2016	2800	0,989285714	-0,010772097	0,000116
15 Agustus 2016	2690	1,040892193	0,040078224	0,001606
12 Agustus 2016	2750	0,978181818	-0,022059718	0,000487
11 Agustus 2016	2820	0,975177305	-0,025135973	0,000632
10 Agustus 2016	2820	1	0 0,000000	
09 Agustus 2016	2800	1,007142857	0,007117468	0,000051
08 Agustus 2016	2810	0,996441281	-0,003565066	0,000013
05 Agustus 2016	2800	1,003571429	0,003565066	0,000013

04 Agustus 2016	2790	1,003584229	0,003577821	0,000013
03 Agustus 2016	2780	1,003597122	0,003590668	0,000013
02 Agustus 2016	2800	0,992857143	-0,007168489	0,000051
01 Agustus 2016	2800	1	0	0,000000
29 Juli 2016	2770	1,010830325	0,010772097	0,000116
28 Juli 2016	2820	0,982269504	-0,017889565	0,000320
27 Juli 2016	2800	1,007142857	0,007117468	0,000051
26 Juli 2016	2720	1,029411765	0,028987537	0,000840
25 Juli 2016	2710	1,003690037	0,003683245	0,000014
22 Juli 2016	2710	1	0	0,000000
21 Juli 2016	2710	1	0	0,000000
20 Juli 2016	2760	0,981884058	-0,018282045	0,000334
19 Juli 2016	2720	1,014705882	0,014598799	0,000213
18 Juli 2016	2700	1,007407407	0,007380107	0,000054
15 Juli 2016	2730	0,989010989	-0,011049836	0,000122
14 Juli 2016	2730	1	0	0,000000
13 Juli 2016	2590	1,054054054	0,052643733	0,002771
12 Juli 2016	2550	1,015686275	0,015564517	0,000242
11 Juli 2016	2570	0,992217899	-0,00781254	0,000061
01 Juli 2016	2500	1,028	0,027615167	0,000763
30 Juni 2016	2550	0,980392157	-0,019802627	0,000392
29 Juni 2016	2540	1,003937008	0,003929278	0,000015
28 Juni 2016	2530	1,003952569	0,003944778	0,000016
27 Juni 2016	2500	1,012	0,011928571	0,000142
24 Juni 2016	2480	1,008064516	0,008032172	0,000065
23 Juni 2016	2490	0,995983936	-0,00402415	0,000016
22 Juni 2016	2520	0,988095238	-0,011976191	0,000143
21 Juni 2016	2470	1,020242915	0,020040751	0,000402
20 Juni 2016	2440	1,012295082	0,012220111	0,000149
17 Juni 2016	2400	1,016666667	0,016529302	0,000273
16 Juni 2016	2380	1,008403361	0,00836825	0,000070
15 Juni 2016	2400	0,991666667	-0,00836825	0,000070
14 Juni 2016	2390	1,0041841	0,004175371	0,000017
13 Juni 2016	2420	0,987603306	-0,012474174	0,000156
10 Juni 2016	2440	0,991803279	-0,008230499	0,000068
09 Juni 2016	2480	0,983870968	-0,016260521	0,000264
08 Juni 2016	2460	1,008130081	0,00809721	0,000066
07 Juni 2016	2420	1,016528926	0,01639381	0,000269
06 Juni 2016	2410	1,004149378	0,004140793	0,000017
03 Juni 2016	2480	0,971774194	-0,028631813	0,000820
02 Juni 2016	2450	1,012244898	0,012170536	0,000148
01 Juni 2016	2510	0,976095618	-0,024194729	0,000585

31 Mei 2016	2510	1	0	0,000000
30 Mei 2016	2590	0,969111969	-0,031375123	0,000984
27 Mei 2016	2600	0,996153846	-0,003853569	0,000015
26 Mei 2016	2500	1,04	0,039220713	0,001538
25 Mei 2016	2460	1,016260163	0,016129382	0,000260
24 Mei 2016	2450	1,004081633	0,004073325	0,000017
23 Mei 2016	2450	1	0	0,000000
20 Mei 2016	2470	0,991902834	-0,008130126	0,000066
19 Mei 2016	2450	1,008163265	0,008130126	0,000066
18 Mei 2016	2580	0,949612403	-0,051701374	0,002673
17 Mei 2016	2580	1	0	0,000000
16 Mei 2016	2580	1	0	0,000000
13 Mei 2016	2550	1,011764706	0,01169604	0,000137
12 Mei 2016	2490	1,024096386	0,023810649	0,000567
11 Mei 2016	2440	1,020491803	0,020284671	0,000411
10 Mei 2016	2430	1,004115226	0,004106782	0,000017
09 Mei 2016	2460	0,987804878	-0,012270093	0,000151
04 Mei 2016	2550	0,964705882	-0,035932009	0,001291
03 Mei 2016	2440	1,045081967	0,04409532	0,001944
02 Mei 2016	2370	1,029535865	0,029108084	0,000847
29 April 2016	2345	1,010660981	0,010604553	0,000112
28 April 2016	2350	0,99787234	-0,002129926	0,000005
27 April 2016	2305	1,019522777	0,019334652	0,000374
26 April 2016	2270	1,015418502	0,015300845	0,000234
25 April 2016	2265	1,002207506	0,002205073	0,000005
22 April 2016	2280	0,993421053	-0,006600684	0,000044
21 April 2016	2280	1	0	0,000000
20 April 2016	2235	1,020134228	0,019934215	0,000397
19 April 2016	2230	1,002242152	0,002239643	0,000005
18 April 2016	2200	1,013636364	0,013544225	0,000183
15 April 2016	2160	1,018518519	0,018349139	0,000337
14 April 2016	2160	1	0	0,000000
13 April 2016	2200	0,981818182	-0,018349139	0,000337
12 April 2016	2180	1,009174312	0,009132484	0,000083
11 April 2016	2180	1	0	0,000000
08 April 2016	2180	1	0	0,000000
07 April 2016	2090	1,043062201	0,042160811	0,001778
06 April 2016	2140	0,976635514	-0,023641763	0,000559
05 April 2016	2125	1,007058824	0,007034027	0,000049
04 April 2016	2100	1,011904762	0,011834458	0,000140
01 April 2016	2035	1,031941032	0,031441526	0,000989

31 Maret 2016	2005	1,014962594	0,014851758	0,000221
30 Maret 2016	1995	1,005012531	0,00500001	0,000025
29 Maret 2016	2000	0,9975	-0,00250313	0,000006
28 Maret 2016	1985	1,007556675	0,007528266	0,000057
24 Maret 2016	1985	1	0	0,000000
23 Maret 2016	1970	1,007614213	0,007585371	0,000058
22 Maret 2016	1990	0,989949749	-0,010101096	0,000102
21 Maret 2016	2010	0,990049751	-0,010000083	0,000100
18 Maret 2016	2005	1,002493766	0,002490661	0,000006
17 Maret 2016	1965	1,020356234	0,020151815	0,000406
16 Maret 2016	1940	1,012886598	0,012804272	0,000164
15 Maret 2016	1925	1,007792208	0,007762005	0,000060
14 Maret 2016	1930	0,997409326	-0,002594035	0,000007
11 Maret 2016	1930	1	0	0,000000
10 Maret 2016	1940	0,994845361	-0,00516797	0,000027
08 Maret 2016	1895	1,023746702	0,023469135	0,000551
07 Maret 2016	1905	0,994750656	-0,00526317	0,000028
04 Maret 2016	1900	1,002631579	0,002628122	0,000007
03 Maret 2016	1910	0,994764398	-0,005249356	0,000028
02 Maret 2016	1915	0,997389034	-0,002614381	0,000007
01 Maret 2016	1925	0,994805195	-0,005208345	0,000027
29 Februari 2016	1930	0,997409326	-0,002594035	0,000007
26 Februari 2016	1940	0,994845361	-0,00516797	0,000027
25 Februari 2016	1920	1,010416667	0,010362787	0,000107
24 Februari 2016	1950	0,984615385	-0,015504187	0,000240
23 Februari 2016	1885	1,034482759	0,033901552	0,001149
22 Februari 2016	1930	0,976683938	-0,023592182	0,000557
19 Februari 2016	1925	1,002597403	0,002594035	0,000007
18 Februari 2016	1950	0,987179487	-0,012903405	0,000166
17 Februari 2016	1940	1,005154639	0,0051414	0,000026
16 Februari 2016	1930	1,005181347	0,00516797	0,000027
15 Februari 2016	1965	0,982188295	-0,017972242	0,000323
12 Februari 2016	1920	1,0234375	0,023167059	0,000537
11 Februari 2016	1915	1,002610966	0,002607563	0,000007
10 Februari 2016	1855	1,032345013	0,031832927	0,001013
09 Februari 2016	1770	1,048022599	0,046905149	0,002200
05 Februari 2016	1785	0,991596639	-0,008438869	0,000071
04 Februari 2016	1790	0,997206704	-0,002797205	0,000008
03 Februari 2016	1775	1,008450704	0,008415197	0,000071
02 Februari 2016	1780	0,997191011	-0,002812941	0,000008
01 Februari 2016	1730	1,028901734	0,028491956	0,000812
29 Januari 2016	1775	0,974647887	-0,025679014	0,000659

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama	:	Fatmah Ainurrochma
No. Registrasi	:	3125120210
Program Studi	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul "**Penentuan Harga Kontrak Opsi Asia Menggunakan Metode *Quasi Monte Carlo***" adalah :

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, Agustus 2017

Yang membuat pernyataan

Fatmah Ainurrochma

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

FATMAH AINURROCHMA. Lahir di Jakarta, 01 September 1994. Anak pertama dari lima bersaudara dari pasangan Bapak Agus Sobirin dan Ibu Charida. Saat ini bertempat tinggal di Jalan H Sulaiman Rt.004/Rw.02 Nomor 29, Jakarta Timur 13620.

No. Ponsel	:	085710277783
Email	:	fatmahiin@yahoo.co.id

Riwayat Pendidikan : Penulis mengawali pendidikan di TK Darul Hikma Cipinang Besar Selatan, SDN 01 Pagi Cipinang Melayu pada tahun 2000-2006, SMPN 80 Halim 2006-2009, dan SMAN 100 Jakarta pada tahun 2009-20012. Pada tahun 2012 penulis mendapatkan SNMPTN undangan yang memberi kesempatan penulis untuk dapat melanjutkan pendidikan di Universitas Negeri Jakarta jurusan Matematika, program studi matematika, fakultas MIPA.

Riwayat Organisasi : Masa SMA penulis mengikuti beberapa organisasi diantaranya OSIS sebagai sekertaris, KIR sebagai ketua dan anggota paskibra. Setelah menjadi mahasiswa penulis ikut serta pada organisasi kemahasiswaan pada dua tahun pertama penulis ikut serta dalam BEMJ sebagai staff Advokasi BEMJ Matematika, anggota KPM dan staff TPM.

Riwayat Pekerjaan : Selama kuliah penulis lebih sering menjadi pengajar, pernah menjadi tutor tetap dan menajemen akademik di Primagama Buaran, dan saat ini masih aktif sebagi tutor di primagama Kampung Melayu. Selain pengalaman mengajar penulis PKL di PT. ASABRI (Persero) Devisi Aktuaria, Pelayanan dan Pemasaran (APP) sebagai peginput, pengolah dan analisis data kuesioner kepuasan peserta ASABRI, hingga hasil dari laporan PKL penulis digunakan perusahaan sebagai laporan kepuasaan peserta ASABRI.