ANALISIS MODEL ANTRIAN M/G/1

DENGAN *WORKING VACATION*

Skripsi
Disusun untuk melengkapi syarat-syarat
guna memperoleh gelar Sarjana Sains

INDAH HOIRUNNISAH
3125110094

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA
2017

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

ANALISIS MODEL ANTRIAN M/G/1
DENGAN *WORKING VACATION*

Nama : Indah Hoirunnisah

No. Registrasi : 3125110094

	Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab			
Dekan	: Prof. Dr. Suyono, M.Si	....	....
	NIP. 19671218 199303 1 005		
Wakil Penanggung Jawab			
Wakil Dekan I	: Dr. Muktiningsih N., M.Si	....	....
	NIP. 19640511 198903 2 001		
Ketua	: Dr. Lukita Ambarwati, S.Pd, M.Si	....	....
	NIP. 19721026 200112 2 001		
Sekretaris	: Ibnu Hadi, M.Si	....	....
	NIP. 19810718 200801 1 017		
Penguji	: Prof. Dr. Suyono, M.Si	....	....
	NIP. 19671218 199303 1 005		
Pembimbing I	: Ir. Fariani Hermin, MT	....	....
	NIP. 19600211 198703 2 001		
Pembimbing II	: Vera Maya Santi, M.Si	....	....
	NIP. 19790531 200501 2 006		

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal: 07 Februari 2017

LEMBAR PENGESAHAN

Dengan ini saya mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta

Nama	: Indah Hoirunnisah
No. Registrasi	: 3125110094
Program Studi	: Matematika
Judul	: Analisis Model Antrian M/G/1 dengan *Working Vacation*

Menyatakan bahwa skripsi ini telah siap diajukan untuk sidang skripsi.

Menyetujui,

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Ir. Fariani Hermin, MT	**Vera Maya Santi, M.Si**
NIP. 19600211 198703 2 001	NIP. 19790531 200501 2 006

Mengetahui,

Koordinator Program Studi Matematika

Dr. Lukita Ambarwati, S.Pd, M.Si.

NIP. 19721026 200112 2 001

ABSTRACT

Indah Hoirunnisah, 3125110094. Analysis of M/G/1 with *Working Vacation* Queue Model. Thesis. Faculty of Mathematics and Natural Science Jakarta State University. 2017.

In the queueing system M/G/1 with Working Vacation, Arrival customer is Poisson Distribution, service time is General distribution and a single server. In this thesis, The service order in the system is First In First Out (FIFO). Working vacation begin when the queue becomes empty (no one arrival in system) then the secondary job is working, however if there are costumer in vacation time, the server continues to work with a lower speed. Steady state probability is analyzed to obtain the queue length distribution formula. Queue characteristic such as the expected value of queue length in the system and the expected value of waiting time in the system is analyzed.

Keywords *: queue model, working vacation, steady state probability, queue length, waiting time.*

ABSTRAK

INDAH HOIRUNNISAH, 3125110094. Analisis Model Antrian M/G/1 dengan *Working Vacation*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. 2017.

Pada sistem antrian M/G/1 dengan *Working Vacation*, pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu pelayanan pelanggan berdistribusi Umum dan memiliki satu saluran pelayanan pelanggan. Pada skripsi ini, disiplin antrian yang digunakan adalah FIFO (*First In First Out*). *Working Vacation* pada sistem terjadi saat tidak ada pelanggan yang datang ke sistem (sistem kosong) sehingga *server* melakukan pekerjaan sekunder, tetapi jika ada pelanggan yang datang akan dilayani dengan laju pelayanan yang lebih rendah. Analisis probabilitas *steady state* dilakukan untuk menentukan formula distribusi jumlah pelanggan dalam sistem antrian. Karakteristik antrian yang akan ditinjau adalah ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem dan ekspektasi waktu tunggu pelanggan dalam sistem .

Kata kunci : model antrian, *working vacation*, probabilitas *steady state*, jumlah pelanggan, waktu tunggu.

PERSEMBAHANKU...

"...niscaya Allah akan mengangkat (derajat) orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat. Dan Allah Mahateliti terhadap apa yang kamu kerjakan.(Q.S. Mujadillah :11)"

"Barangsiapa yang tak pernah mengecap kehinaan dalam mencari ilmu walau hanya sebentar, akan meminum kehinaan kebodohan pada sisa hidupnya"
-Imam Syafi'i

"Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas"
-Albert Einstein

Yang utama dari segalanya...Kehadirat Allah SWT atas segala Rahmat dan Nikmat-Nya yang tak hingga. Kekuatan dan pertolongan dari-Nya selalu menyertaiku dalam penyelesaian studi di UNJ. Sholawat serta salam selalu tercurah untuk Nabi Muhammad SAW.

Skripsi ini kupersembahkan untuk Emak, ibuku yang selalu menyayangiku tanpa limit waktu. Alm. Bapak Suparman (ayahku yang jika beliau melihat) akan sangat bangga dengan putrinya yang lulus studi Matematika. Ketiga kakakku, Suryani, Sumiyati dan Siti Hodijah, sebagai saudara yang paling memahami diriku dan selalu mendukung yang terbaik untuk adik bungsunya. Kalianlah sumber motivasi terbesar untuk menempuh pendidikan yang lebih tinggi.

Tak lupa, kupersembahkan untuk teman-teman yang telah mewarnai kehidupanku selama ini, kalianlah pemantik api semangat disaat redup, pemantik karir untuk kehidupanku dan selalu menjadi *alarm* kebaikan untuk-Nya. Mereka adalah DRIF Matematika 2011 (Debora, Fitri Riry), *The Most Tarbiyah Partner* (Mba Atikah, Ratna, Iva, dan Dian), *Best friend of MTM 15* (Ulfah, Milka, Eha, Inayah, dan Dien), Sahabatku sejak Remas 39, Resti H, Kakak senior Matematika, Ka Khoiruz Zahra R. Teman seperjuangan yang sama-sama berbagi kebahagian, kesedihan dan nilai juang di ujung studi, Rifqy Marwah A. (Matematika 2011).

Kupersembahkan untuk Program Studi Matematika FMIPA UNJ, khususnya pembimbing skripsi Ibu Ir. Fariani Hermin, MT dan Ibu Vera Maya Santi, M.Si yang telah banyak membantu penyelesaian skripsi. Dosen-dosen Matematika, terima kasih atas jasamu yang telah berbagi ilmu matematika yang sangat berharga. Berkat pendidikan di prodi ini, semakin bertambah kecintaanku pada dunia Matematika.

"Terima kasih atas dukungan, do'a, serta kasih sayang kalian.".

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Analisis Model Antrian M/G/1 dengan *Working Vacation*" yang merupakan salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Sains program studi Matematika Universitas Negeri Jakarta.

Skripsi ini berhasil diselesaikan tidak terlepas dari adanya bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin menyampaikan terima kasih terutama kepada:

1. Ibu Ir. Fariani Hermin, MT selaku Dosen Pembimbing I dan Ibu Vera Maya Santi, M.Si selaku Dosen Pembimbing II, yang telah meluangkan waktunya dalam memberikan bimbingan, saran, nasehat serta arahan sehingga skripsi ini dapat menjadi lebih baik dan terarah.

2. Ibu Dr. Lukita Ambarwati, S.Pd, M.Si., selaku Koordinator Program Studi Matematika FMIPA UNJ yang telah banyak membantu penulis.

3. Bapak Drs. Tri Murdiyanto, M.Si., selaku Pembimbing Akademik atas segala bimbingan dan kerja sama Bapak selama perkuliahan, dan seluruh Bapak/Ibu dosen atas pengajarannya yang telah diberikan, serta karyawan/karyawati FMIPA UNJ yang telah memberikan informasi yang penulis butuhkan dalam menyelesaikan skripsi.

4. Ibu yang selalu mendukung, memotivasi, dan setia membantu penulis dengan penuh cinta dan kasih sayang yang tulus.

5. Ketiga kakak perempuan penulis, Suryani, Sumiyati dan Siti Hodijah yang terus memberi semangat dan mendoakan penulis untuk kelancaran penulisan skripsi ini.

6. Ibu Dania Siregar S.tat, M.Si., yang telah membantu diskusi materi penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Masukan dan kritikan akan sangat berarti. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca sekalian. Terima Kasih.

Jakarta, 11 Februari 2017

Indah Hoirunnisah

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

			halaman
$\mu_0(t)$	:	laju pelayanan saat vacation selama t	34
$\mu_1(t)$	:	laju pelayanan saat sibuk selama t	34
$b^{(k)}$	:	Ekspektasi dari x^k	34
$P_{n,0}(x)$	:	Probabilitas n pelanggan pada waktu *vacation*	42
$P_{n,1}(x)$	:	Probabilitas n pelanggan pada waktu sibuk	42
δ_{in}	:	Kronecker Delta	42
$S_b^*(r)$	:	Transformasi Laplace CDF pada waktu sibuk	34
$S_v^*(r)$	:	Transformasi Laplace CDF pada waktu *vacation*	34

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori antrian merupakan studi probabilistik kejadian garis tunggu (*waiting line*), yakni suatu garis tunggu dari pelanggan yang memerlukan layanan dari sistem yang ada. Antrian terjadi pada umumnya karena kebutuhan pelayanan melebihi kapasitas pelayanan, sehingga pengguna fasilitas yang tiba tidak bisa segera mendapat layanan disebabkan kesibukan layanan. Antrian sering ditemui dalam aktivitas sehari-hari. Di berbagai penggunaan fasilitas umum seperti kereta api, *teller bank*, dan terminal akan menemui fenomena mengantri pada pengguna fasilitas.

Pelayanan, pelanggan dan antrian yang terjadi berada dalam satu himpunan yang disebut sistem antrian. Beberapa komponen dasar yang harus diperhatikan dalam sistem antrian agar penyediaan fasilitas pelayanan dapat melayani para pelanggan yaitu: bentuk kedatangan para pelanggan, jumlah pelayanan, bentuk fasilitas pelayanan dan disiplin antrian yang mengatur pelayanan kepada pelanggan datang sampai pelanggan tersebut meninggalkan tempat pelayanan. Pelanggan dan pelayanan merupakan komponen yang paling utama dalam sistem antrian. Kedua komponen ini akan menjadi dasar untuk mengetahui karakteristik pada suatu model antrian.

Kedatangan pelanggan umumnya dijelaskan melalui suatu bentuk distribusi karena kedatangan pelanggan merupakan suatu proses stokastik. Salah satu bentuk distribusi kedatangan pelanggan yang umum dikenal adalah kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson, yakni kedatangan pelanggan secara acak memenuhi *Markovian Property.* Sedangkan pelayanan pelanggan menjelaskan waktu pelayanan pelanggan yang umumnya merupakan suatu variabel acak dengan distribusi eksponensial.

Pelayanan dalam antrian ada kalanya mengambil liburan (*vacation*). Sistem antrian dengan *vacation* merupakan suatu karakteristik antrian dengan faktanya bahwa waktu kosong (*idle time*) pada pelayanan yang mungkin diperlukan pekerjaan tambahan yang lain. *Vacation* dapat dianggap sebagai waktu istirahat pelayan pada jam pelayanan, waktu bagi pelayan ketika melakukan tugas sekunder, atau gangguan teknis pada saat pelayan melakukan pelayanan (Tian & Zhang, 2006:viii). Sistem antrian dengan *vacation* berlaku selama waktu periode dalam sistem tidak tersedia untuk kedatangan selanjutnya. Namun, adanya suatu *vacation* dalam antrian tidak selalu menunggu kondisi antrian kosong, tetapi juga dapat terjadi terjadi sewaktu-waktu meskipun masih terdapat pelanggan yang mengantri (Doshi, 1986:35). Contoh adanya *vacation* dalam sistem antrian yaitu pelayan mengalami kekosongan pekerjaan (karena tidak ada pelanggan) maka pelayan akan melakukan pekerjaan sekunder. Contoh lainnya pada *Teller bank* yang melakukan pekerjaan lain saat menunggu perbaikan mesin yang rusak, sehingga terjadi penundaan pelayanan.

Salah satu jenis *vacation* yang dikenal adalah model *Working Vacation. Working Vacation* merupakan *vacation* yang dilakukan oleh pelayan saat tidak ada pelanggan. Namun ketika ada pelanggan yang datang ketika pelayan sedang *vacation*, pelanggan akan dilayani langsung tetapi dengan kecepatan yang lebih rendah dari biasanya. Selanjutnya untuk pelanggan yang datang berikutnya akan dilayani dengan kecepatan normal. Model antrian dengan *Working Vacation* mempunyai dua laju pelayanan, yaitu laju pelayanan pada waktu sibuk dan laju pelayanan waktu libur.

Working Vacation dalam sistem antrian telah banyak diteliti seperti: model M/M/1 dengan *Working Vacation* (Servi & Finn, 2002: 41-52) yang merupakan penelitian pertama model antrian dengan *Working Vacation*, model GI/M/1 dengan *Working Vacation* (Baba, 2005: 201-209) yang diteliti dengan metode analisis matrik, model GI/M/1/N dengan *Multiple Working Vacation* (Banik et al., 2007: 1701-1710), model GI/Geo/1/N dengan *Working Vacation* (Li, Tian dan Ma, 2008: 2715-2730) dan model M/G/1 dengan *General Working Vacation* (Wu & Takagi, 2006: 654-681). Khusus penelitian pada model M/G/1 dilakukan kembali dengan *Exponentially Working Vacation* melalui pendekatan analisis matrik (Li, Tian dan Zhang, 2009: 139-166) dan *Performance Analysis of M/G/1 Queue with Working Vacation and Vacation Interruption* dengan metode penambahan variabel dan analisis matrik (Zhang & Hou, 2010: 2977-2985).

Penulisan skripsi ini akan membahas model antrian M/G/1 dengan *Working Vacation* dengan disiplin antrian FIFO (*First In First Out*). Pemilihan model M/G/1 dengan *vacation* dikarenakan banyaknya penggunaan model antrian tersebut seperti di antrian loket pelayanan fasilitas, antrian barang pada mesin produksi di suatu pabrik, dan pada jaringan komputer saat prosesor "merawat" sistem komputer, yang mempunyai waktu pelayanan berdistribusi *General* dan memiliki kejadian *vacation*. Penelitian dilakukan melalui kajian pustaka pada model antrian tersebut. Model M/G/1 dengan *Working Vacation* merupakan sistem antrian yang memiliki waktu kedatangan berdistribusi Poisson, waktu pelayanan berdistribusi *General* dan saluran pelayanan tunggal. Adanya *Working Vacation* dalam sistem antrian menyebabkan adanya kondisi pelayanan normal dan kondisi pelayanan *vacation*. Melalui kondisi khusus tersebut, akan dianalisis karakteristiknya pada distribusi panjang antrian dan ekspektasi waktu tunggu dalam sistem antrian.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini yaitu :

1. Bagaimanakah formula distribusi panjang antrian dalam sistem antrian M/G/1 dengan *Working Vacation* ?
2. Bagaimanakah ekspektasi panjang antrian dalam sistem antrian M/G/1 dengan *Working Vacation* ?
3. Bagaimanakah ekspektasi waktu tunggu dalam sistem antrian M/G/1 dengan *Working Vacation* ?

1.3 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah dalam penulisan ini adalah pembahasan formulasi model antrian M/G/1 dengan *Working Vacation* sampai diperoleh formula ekspektasi panjang antrian dan ekspektasi waktu tunggu dalam sistem antrian. Disiplin antrian yang digunakan yaitu FIFO (*First In First Out*).

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan yang ingin dicapai dalam penulisan ini adalah untuk mengetahui karakteristik model antrian M/G/1 dengan *Working Vacation* melalui formula ekspetasi panjang antrian dan ekspektasi waktu tunggu pelanggan dalam sistem antrian.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari penulisan ini adalah :

1. Sebagai sumber pengetahuan bagi para pembaca dalam memahami lebih jauh mengenai teori antrian.
2. Sebagai bahan referensi studi lanjutan dalam mempelajari model-model antrian.
3. Sebagai sarana informasi bagi bidang yang mengaplikasikan teori antrian.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam skripsi ini adalah metode pustaka berupa kajian teori pada buku dan jurnal mengenai teori antrian. Jurnal utama yang dijadikan referensi adalah *Performance Analysis of M/G/1 Queue with Working Vacation and Vacation Interruption* (Zhang & Hou, 2010: 2977-2985).

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai sistem antrian, antrian M/G/1 dengan *vacation*, rantai markov kontinu, *probability generation function*, dan transformasi Laplace Stieltjes yang akan digunakan dalam menganalisis distribusi panjang antrian dan ekspektasi waktu tunggu.

2.1 Sistem Antrian

Teori antrian merupakan studi probabilistik kejadian garis tunggu (waiting line), yakni suatu garis tunggu dari pelanggan yang memerlukan layanan dari sistem yang ada. Antrian terjadi pada umumnya karena kebutuhan pelayanan melebihi kapasitas pelayanan, sehingga pengguna fasilitas yang tiba tidak bisa segera mendapat layanan disebabkan kesibukan layanan. Antrian sering ditemui dalam aktivitas sehari-hari. Di berbagai penggunaan fasilitas umum seperti kereta api, *teller bank*, dan terminal akan menemui fenomena mengantri pada pengguna fasilitas. Tujuan penggunaan teori antrian adalah untuk merancang fasilitas pelayanan, dalam mengatasi permintaan pelayanan yang berfluktuasi secara acak dan menjaga keseimbangan antara biaya (waktu menganggur) pelayanan dan biaya (waktu) yang diperlukan selama antrian.

2.1.1 Karakteristik Sistem Antrian

Sistem antrian terdiri dari beberapa komponen diantaranya bentuk kedatangan pelanggan, bentuk pelayanan, jumlah pelayanan, kapasitas sistem, disiplin antrian, struktur dasar model antrian dan formula *Little*.

1. Bentuk Kedatangan Pelanggan

   Merupakan suatu pola distribusi kedatangan pelanggan ke dalam suatu sistem antrian yang menentukan pola besarnya kedatangan pelanggan. Distribusi yang terbentuk berdasarkan proses yang terjadi antar waktu kedatangan pelanggan yang satu dengan pelanggan lainnya. Umumnya kedatangan pelanggan dalam sistem berdistribusi Poisson, dimana kedatangan pelanggan bersifat acak dan mempunyai rata-rata kedatangan sebesar λ.

2. Bentuk Pelayanan

   Ditentukan oleh waktu pelayanan pelanggan dalam sistem antrian. Bentuk pelayanan pelanggan biasanya dilakukan melalui saluran pelayanan/ *channel*/ *server* yang berjumlah satu atau lebih. Bentuk pelayanan dapat konstan dari waktu ke waktu. Jumlah pelanggan yang dapat dilayani dalam satuan waktu disebut rerata pelayanan (*mean rate server*) dengan simbol (μ), sedangkan rerata waktu yang dipergunakan untuk melayani setiap pelanggan adalah $1/\mu$. Umumnya bentuk pola pelayanan pada suatu sistem antrian berdistribusi Eksponensial.

3. Jumlah Pelayanan

   Pelanggan yang akan dilayani pada tempat pelayanan yang terdiri dari satu atau lebih fasilitas pelayanan. Jika semua fasilitas pelayanan menawarkan suatu pelayan yang sama, maka mekanisme pelayanan ini dinamakan pelayanan sejajar atau paralel. Jika mekanisme tersebut terdiri dari serangkaian antrian, maka mekanisme pelayanan yang dihasilkan disebut antrian serial. Jika mekanisme tersebut terjadi bersama sama, maka akan menghasilkan mekanisme pelayanan yang disebut dengan antrian jaringan.

4. Kapasitas Sistem

   Merupakan jumlah maksimum pelanggan, mencakup yang sedang dilayani dan yang sedang berada dalam antrian yang dapat ditampung oleh fasilitas pelayanan pada saat yang sama. Sebuah sistem yang tidak membatasi jumlah pelanggan di dalam fasilitas pelayanannya dikatakan memiliki kapasitas tak terhingga, sedangkan suatu sistem yang membatasi jumlah pelanggan yang ada di dalam fasilitas pelayanannya dikatakan memiliki kapasitas yang terbatas.

5. Disiplin Antrian

   Aturan yang mengatur pelayanan kepada para pelanggan sejak pelanggan itu datang sampai pelanggan itu meninggalkan tempat pelayanan. Aturan kedatangan menurut urutan kedatangan pelanggan terbagi atas.

   (a) *First In First Out* (FIFO) Merupakan suatu peraturan dimana yang akan dilayani terlebih dahulu adalah pelanggan yang datang terlebih dahulu. FIFO sering disebut juga FCFS *(First Come First Served)* Contoh bentuk ini dapat dilihat pada antrian di loket-loket penjualan karcis kereta api.

   (b) *Last In First Out* (LIFO) Merupakan antrian dimana yang datang paling akhir adalah yang dilayani paling awal atau paling dahulu. LIFO sering disebut juga LCFS *(Last Come First Served)*. Contoh bentuk ini dapat dilihat pada sistem bongkar muat barang dalam truk, dimana barang yang masuk terakhir justru akan keluar terlebih dahulu.

(c) *Service In Random Order* (SIRO) Merupakan antrian dimana pelayanan dilakukan secara acak. SIRO sering disebut juga RSS *(Random Selection For Service)*. Contoh bentuk ini ada pada arisan, dimana pelayanan dilakukan berdasarkan undian (acak).

(d) *Priority Service* (PRI) Merupakan antrian dimana pelayanan dilakukan berdasarkan urutan prioritas. Contoh bentuk ini ada dalam suatu pesta atau acara dimana tamu-tamu yang dikategorikan VIP akan dilayani terlebih dahulu.

6. Struktur dasar model antrian

Menurut sifat-sifat pelayanan dari suatu fasilitas pelayanan, proses antrian pada umumnya dikelompokan kedalam empat struktur dasar model antrian.

(a) *Single Channel Single Phase* : Suatu bentuk antrian yang hanya terdapat satu antrian dan satu pelayanan.

(b) *Single Channel Multi Phase* : Suatu bentuk antrian yang hanya terdapat satu antrian dan terdapat dua atau lebih pelayanan.

(c) *Multi Channel Single Phase* : Suatu bentuk antrian yang memiliki dua atau lebih antrian dan satu pelayanan.

(d) *Multi Channel Multi Phase* : Suatu bentuk antrian yang memiliki dua atau lebih antrian maupun pelayanan.

Suatu proses antrian dinyatakan oleh sederet simbol A/B/C;D/E/F. Notasi ini diperkenalkan oleh D.G. Kendall yang kemudian dikenal sebagai notasi

Kendall dengan A dan B masing-masing menyatakan distribusi antar kedatangan dan waktu pelayanan, C menyatakan banyaknya saluran pelayanan, D menyatakan disiplin pelayanan, E jumlah maksimum yang diperkenankan berada dalam sistem (dalam pelayanan ditambah garis tunggu) dan F menyatakan besarnya populasi *input*. Apabila E dan F adalah nilai yang tidak ditentukan, maka diasumsikan tidak ada pembatasan kapasitas dan sumber masukan. Simbol- simbol yang biasa digunakan untuk A dan B.

(a) M : Markovian (Poisson) untuk distribusi kedatangaan dan waktu pelayanan Markovian (distribusi Eksponensial)

(b) E_k : Distribusi K-Erlang atau Gamma

(c) G : Distribusi *General* (distribusi sebarang)

(d) D : Distribusi Deterministik (distribusinya telah ditentukan sebelumnya).

Beberapa contoh model antrian dengan disiplin antrian FIFO serta tidak ada pembatasan kapasitas dan sumber *input*.

(a) M/M/1 : Kedatangan mengikuti proses Poisson, waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial, terdiri dari 1 *server*.

(b) M/G/C : Pola kedatangan berdistribusi Poisson, waktu pelayanan berdistribusi *General*, dan terdiri dari c *server*.

(c) M/D/1 : Pola kedatangan mengikuti proses Poisson, tetapi waktu pelayanan berdistribusi Deterministik.

Hal-hal penting yang diukur dari suatu sistem antrian.

- Distribusi probabilitas dari jumlah pelanggan dalam sistem.

- Pemanfaatan *server*.
- Sistem *Input*.
- Waktu menunggu dari pelanggan.

Pengukuran yang biasa digunakan untuk menggambarkan situasi antrian.

- L_s : rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem.
- L_q : rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian.
- W_s : rata-rata waktu menunggu dalam sistem.
- W_q : rata-rata waktu menunggu dalam antrian.
- c : rata-rata jumlah *server* yang sibuk.

Pengukuran beberapa unsur diatas, dilakukan melalui *probability steady state* (P_i).

$$P_i = \lim_{t \to \infty} P\{X(t) = i\} \tag{2.1}$$

dimana: $X(t)$ adalah jumlah pelanggan dalam sistem pada waktu t dengan diasumsikan nilai limitnya ada dan $i \geq 0$. P_i adalah limit dari nilai probabilitas tepat ada i pelanggan dalam sistem setelah pengoperasian dalam waktu yang sangat lama.

Secara spesifik dengan *probability steady state* dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} L_s &= \sum_{i=1}^{\infty} ip_i \\ L_q &= \sum_{i=c+1}^{\infty} (i-c)p_i \end{aligned}$$

dimana: i merupakan banyaknya pelanggan yang ada dalam sistem dan p_i merupakan *probability steady-state* i pelanggan dalam sistem.

Waktu-waktu antar kedatangan dan waktu-waktu pelayanan diasumsikan variabel acak, independen, berdistribusi identik dan kedua distribusi tersebut diasumsikan saling bebas. Rerata tingkat kedatangan adalah rerata banyaknya kedatangan per unit waktu, dinyatakan dengan λ, sedangkan tingkat pelayanan rata-rata adalah rerata banyaknya unit yang dilayani per unit waktu, dinyatakan dengan μ.

7. Formula *Little*

   Merupakan formula yang menjelaskan hubungan antara rata-rata jumlah pelanggan (L_s dan L_q) dan rata-rata waktu menunggu (W_s dan W_q), sebagai berikut:

$$L_s = \lambda_{eff} W_s$$
$$L_q = \lambda_{eff} W_q$$

   λ_{eff} merupakan tingkat kedatangan efektif dalam sistem yang sama dengan λ, yakni tingkat kedatangan semua pelanggan dapat masuk ke dalam sistem. Formula di atas berlaku untuk sistem antrian yang di dalamnya terdapat antrian dan pelayanan pelanggan, dengan tingkat kedatangan pelanggan kurang dari tingkat kepergian pelanggan.

Suatu sistem antrian pada umumnya memuat karakteristik sistem antrian sebagai di atas. Namun kenyataannya, sering kali adanya suatu tambahan kondisi khusus di dalam sistem antrian sehingga mempengaruhi pengukuran sistem antrian, sebagaimana adanya suatu *vacation* (istirahat pelayan melayani pelanggan pada jam pelayanan).

2.2 Antrian dengan *Vacation*

Pelaku utama dalam sistem antrian adalah pelanggan (*customer*) dan pelayan (*server*). Sistem antrian dengan *vacation* merupakan suatu karakteristik antrian dengan faktanya bahwa waktu kosong (*idle time*) pada pelayanan yang mungkin diperlukan untuk melakukan pekerjaan tambahan lain. Sistem antrian dengan *vacation* berlaku selama waktu periode dalam sistem tidak tersedia untuk kedatangan selanjutnya. Namun, adanya suatu *vacation* dalam antrian tidak selalu menunggu kondisi antrian kosong, tetapi juga dapat terjadi sewaktu-waktu meskipun masih terdapat pelanggan yang mengantri (Doshi, 1986:35). Contoh *vacation* dalam antrian misalnya.

1. *Teller bank* yang melayani nasabah, namun kemudian mesin yang digunakan rusak, sehingga pelayan perlu memperbaiki mesin tersebut, maka nasabah harus menunggu mesin tersebut hingga dapat beroperasi kembali.

2. *Teller bank* yang melayani nasabah untuk transfer uang dalam jumlah banyak membutuhkan waktu lebih banyak dalam prosesnya, maka terjadi pemberhentian atau penundaan pelayanan nasabah umum.

Sistem antrian dengan *vacation* mempunyai dua laju pelayanan yaitu laju pelayanan waktu sibuk (μ_b) dan laju pelayanan waktu libur (μ_v). Laju pelayanan waktu sibuk adalah banyaknya pelanggan yang dilayani dalam satu satuan waktu saat sistem normal (*busy period*). Sedangkan laju pelayanan waktu libur adalah banyaknya pelanggan yang dilayani dalam satu satuan waktu saat sistem *vacation* (waktu senggang pelayanan tidak melayani pelanggan di jam-jam pelayanan).

Beberapa jenis perbedaan pada model *vacation* yaitu.

1. *Single Vacation* : Pelayan mengambil tepat satu *vacation* dengan segera ketika sistem kosong
2. *Multiple Vacation* : Pelayan mengambil *vacation* setiap sistem kosong
3. *Single Treshold* : Pelayan memulai dengan pelayanan sempurna ketika ditemukan ukuran sistem melebihi batas ambang pintu (*treshold*)
4. *Vacation with Treshold* : Pelayan secara kontinu mengambil *Multiple Vacation* setelah sistem kosong sampai ditemukan ukuran sistem melebihi batas ambang pintu.

Keberadaan *vacation* dalam sistem antrian memiliki suatu distribusi tertentu untuk menentukan kapan terjadinya suatu *vacation.* Proses pemodelan kedatangan dan pelayanan pelanggan yang menjadi unsur penting pengukuran sistem, juga dijelaskan dalam suatu distribusi tertentu guna memudahkan analisis secara matematis.

2.3 Distribusi dalam Proses Antrian

Proses stokastik merupakan suatu barisan kejadian yang memenuhi hukum-hukum peluang (*Oxford Dictionary*, 1993). Proses stokastik banyak digunakan untuk memodelkan evolusi suatu sistem yang mengandung suatu ketidakpastian atau sistem yang dijalankan pada suatu lingkungan yang tak dapat diduga. Sebuah proses stokastik $X(t)$, $t \in T$ adalah sebuah koleksi dari variabel acak, yakni untuk setiap t di dalam himpunan indeks T dan $X(t)$ merupakan sebuah variabel acak. Pandang t sebagai waktu dan $X(t)$ sebagai suatu *state* dari proses pada waktu t. Jika himpunan indeks T *countable* maka $X(t)$, $t \in T$ merupakan proses stokastik diskrit dan jika T kontinu maka $X(t)$, $t \in T$ merupakan proses stokastik kontinu, dimana sebarang realisasi dari $X(t)$, $t \in T$ dinamakan *sample path.*

Salah satu model stokastik adalah antrian. Hal ini dikarenakan unsur-unsur dalam sistem antrian, seperti kedatangan pelanggan merupakan kejadian yang tidak pasti, yang dimodelkan dalam suatu variabel acak dengan distribusi probabilitas tertentu. Asumsi yang biasa digunakan pada distribusi kedatangan dan kepergian pelanggan pada interval waktu $(0, t)$ adalah distribusi Poisson. Distribusi Poisson adalah distribusi diskrit dengan rata-rata sama dengan varians, sedangkan distribusi waktu pelayanan dan waktu antar kedatangan diasumsikan berdistribusi Eksponensial. Distribusi Eksponensial adalah distribusi kontinu.

2.3.1 Distribusi Poisson

Variabel acak dengan parameter λ memiliki distribusi peluang

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, x = 0, 1, 2, ...$$

dan fungsi massa peluang

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

dengan menggunakan fungsi pembangkit momen

$$\begin{aligned} M(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^{tx} e^{-\lambda} \lambda^x)}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \\ &= exp\{\lambda(e^t - 1)\} \end{aligned}$$

sehingga turunan pertama dan kedua fungsi pembangkit momen untuk distribusi Poisson adalah

$$\begin{aligned} M'(t) &= \lambda e^t exp\{\lambda(e^t - 1)\}, \\ M''(t) &= (\lambda e^t)^2 exp\{\lambda(e^t - 1)\} + \lambda e^t exp\{\lambda(e^t - 1)\} \end{aligned}$$

jadi dapat diperoleh

$$\begin{aligned} E[X] &= M'(0) = \lambda \\ E[X^2] &= M''(0) = \lambda^2 + \lambda \\ Var(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda \end{aligned}$$

2.3.2 Distribusi Eksponensial

Suatu variabel acak kontinu X berdistribusi eksponensial dengan parameter λ, $\lambda > 0$ memiliki distribusi peluang

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

dan fungsi distribusi kumulatif

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

Selanjutnya dapat ditentukan nilai $E[X]$, sebagai berikut

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx \end{aligned}$$

dengan mengintegralkan persamaan di atas dengan memisalkan $u = x$, $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$, dapat diperoleh

$$\begin{aligned} E[X] &= -xe^{-\lambda x}|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditentukan varians dengan terlebih dahulu ditentukan fungsi pembangkit momen pada distribusi eksponensial, sebagai berikut.

$$\begin{aligned} M(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t} \text{untuk } t < \lambda \end{aligned}$$

lalu mencari $E[X^2]$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{d^2}{dt^2} M(t)|_{t=0} \\ &= \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}|_{t=0} \\ &= \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Sehingga varians pada distribusi eksponensial dapat diperoleh.

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Kedatangan pelanggan yang umumnya berdistribusi Poisson memenuhi definisi Proses Poisson, dimana Proses Poisson akan menjelaskan pemodelan kedatangan pelanggan besera batasannya ke dalam sistem.

2.4 Proses Poisson

Definisi 2.4.1. Misalkan $N(t)$ banyak kejadian pada interval $[0, t]$. Proses $N(t)$, $t \geq 0$ adalah proses membilang (*counting process*) jika memenuhi beberapa syarat berikut.

1. $N(0) = 0$
2. $N(t)$, bernilai bilangan bulat tidak negatif
3. Jika $s < t$ maka $N(s) \leq N(t)$

4. $N(s) - N(t)$, banyaknya kejadian yang terjadi pada interval waktu $(s, t]$

Definisi 2.4.2. Suatu proses menghitung yang terjadi dalam selang waktu $[0, t]$ yaitu $N(t)$, $t \geq 0$ dikatakan Proses Poisson dengan laju (parameter) $\lambda > 0$ jika memenuhi syarat berikut.

- $N(t), t \geq 0$ memiliki sifat kenaikan independen *(independent increments)*, yakni banyaknya kejadian yang terjadi didalam interval yang saling asing adalah independen.

- Proses yang terjadi mempunyai kenaikan bebas stasioner, yakni distribusi banyaknya kejadian yang terjadi pada sebarang interval waktu hanya bergantung pada panjangnya interval waktu tersebut. Dengan kata lain, jika

$$P\{N(t_2) - N(t_1) = n\}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

  maka

$$P\{N(t_2 + s) - N(t_1 + s) = n\}, \qquad \forall t_1 < t_2 \text{ dan } s > 0$$

- Probabilitas satu kejadian terjadi antara selang waktu t dan $t + h$

$$P\{N(t + h) - N(t) = 1\} = \lambda h + o(h) \tag{2.2}$$

  dengan h adalah elemen kenaikan (*increment element*) dan o(h) didefinisikan sebagai suatu fungsi f sedemikian sehingga

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

- Probabilitas lebih dari satu kejadian terjadi antara selang waktu t dan $t+h$

$$P\{X(t+h)-X(t)\geq 2\}=o(h) \tag{2.3}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.2) dan (2.3) maka probabilitas tidak ada satu kejadian yang terjadi antara selang waktu t dan $t+h$ yaitu

$$\begin{aligned}
P\{X(t+h)-X(t)=0\} &= 1-P\{X(t+h)-X(t)=1\} \\
&\quad -P\{X(t+h)-x(t)\geq 2\} \\
&= 1-\{\lambda h+o(h)\}-o(h) \\
&= 1-\lambda h-o(h)-o(h) \\
&= 1-\lambda h-o(h)
\end{aligned}$$

Teorema 2.4.1. Jika $\{X(t), t\geq 0\}$ adalah proses Poisson dengan rate $\lambda > 0$, maka $X(t)$ adalah berdistribusi Poisson dengan parameter λt.

$$P\{X(t)=n\}=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \qquad n=0,1,....$$

Bukti. Misalkan

$$P_n(t)=P\{X(t)=n\} \qquad t>0$$

adalah probabilitas terjadinya n kejadian pada sebarang interval waktu t dan $t+h$

dengan n bilangan bulat ≥ 0. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
P_n(t+h) &= P\{n \text{ kejadian pada interval } t \text{ dan } 0 \text{ kejadian pada interval } h\} \\
&\quad +P\{n-1 \text{ kejadian pada interval } t \text{ dan } 1 \text{ kejadian pada interval } h\} \\
&\quad +P\{n-2 \text{ kejadian pada interval } t \text{ dan } 2 \text{ kejadian pada interval } h\} \\
&\quad +....+P\{0 \text{ kejadian pada interval } t \text{ dan n kejadian pada interval } h\}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan definisi (2.4.2) di atas, persamaan tersebut secara umum diperoleh

$$p_0(t+h) = p_n(t)\{1-\lambda h + o(h)\} + p_{n-1}(t)\{\lambda h + o(h)\} + o(h) \tag{2.4}$$

Dengan mengambil $n = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned}
p_0(t+h) &= p_0(t)\{1-\lambda h + o(h)\} \\
&= p_0(t) - \lambda h p_0(t) + o(h)
\end{aligned}$$

sehingga

$$p_0(t+h) - p_0(t) = -\lambda h p_0(t) + o(h)$$

atau

$$\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h}$$

untuk $n \geq 1$ berlaku

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

Jika $h \to \infty$, dari kedua persamaan di atas diperoleh formula

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \end{aligned}$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan differensial tingkat satu yang mempunyai penyelesaian

$$\begin{aligned} p_0(t) &= e^{-\lambda t} \\ p_1(t) &= \lambda t e^{-\lambda t} \\ p_2(t) &= \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t} \\ &\vdots \end{aligned}$$

dan secara umum diperoleh

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Akan dibuktikan persamaan (2.3) berlaku untuk $n+1$. Perhatikan bahwa

$$\frac{dp_{n+1}(t)}{dt} + \lambda p_{n+1}(t) = \lambda p_n(t)$$

Persamaan ini mempunyai penyelesaian

$$\begin{aligned} P_{n+1}(t) &= Ce^{-\int \lambda dt} + e^{-\int \lambda dt} \int e^{\int \lambda dt} \frac{\lambda^{n+1} t^n}{n!} e^{-\lambda t} dt \\ &= Ce^{\lambda t} + e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)n!} \end{aligned}$$

Kondisi $P_{n+1}(0) = 0$ Menghasilkan C=0, sehingga

$$P_{n+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n+1} e^{-\lambda t}}{(n+1)!}$$

$\square$

Teorema 2.4.2. Misalkan X_1, X_2,... adalah variabel acak waktu antara kejadian dari proses Poisson. Maka X_1, X_2,... merupakan variabel acak yang saling independen dan berdistribusi Eksponensial dengan parameter λ.

Bukti. Jika X_1, X_2,... adalah waktu-waktu antara kejadian dari proses Poisson dengan parameter λ dan jika X_1 menyatakan waktu kejadian yang pertama dengan $X_1 > t$ maka tidak ada kejadian dari proses Poisson yang terjadi pada interval $[0, t]$, dengan demikian

$$\begin{aligned} P\{X_1 > t\} &= P\{0 \text{ kejadian di } [0,t]\} \\ &= P\{N(t) = 0\} \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

sehingga

$$F_{X1} = P\{X_1 \leq t\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Jadi X_1 berdistribusi Eksponensial dengan parameter λ (mean $\frac{1}{\lambda}$). Selanjutnya distribusi X_2 dengan diberikan $X_1 = s$, adalah:

$$\begin{aligned} P\{X_2 > t|X_1 = s\} &= P\{0 \text{ kejadian di } (s, s+t]|X_1 = s\} \\ &= P\{0 \text{ kejadian di } (s, s+t]\} \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan di atas, dapat disimpulkan bahwa X_2 juga merupakan variabel acak Eksponensial dengan parameter λ dan juga independen terhadap X_1. Dengan demikian hal yang sama juga berlaku untuk $X_3, X_4, ...$ dan seterusnya, sehingga dapat disimpulkan bahwa $X_1, X_2, ...$ saling independen dan semuanya berdistribusi Eksponensial dengan parameter λ.

$\square$

Dalam proses antrian kejadian kedatangan dan kepergian pelanggan dalam suatu fasilitas dapat dianggap sebagai suatu transisi perubahan *state* yang dikenal dengan Rantai Markov.

2.5 Rantai Markov Kontinu

Definisi 2.5.1. Variabel acak $\{X(t), t \geq 0\}$ adalah rantai Markov jika $s, t \geq 0$ dan $i, j, X(u)$ merupakan bilangan bulat nonnegatif, $0 \leq u < s$ maka $P\{X(t+s) = j|X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s\} = P\{X(t+s) = j|X(s) = i\}$

Rantai Markov Kontinu adalah proses stokastik yang memenuhi *Markovian Property* yakni kondisi masa depan $X(t+s)$ dengan diberikan kondisi saat ini $X(s)$ dan masa lampau $X(u)$, $0 \leq u < s$ hanya ditentukan oleh masa kini $X(s)$, sebagaimana tambahan jika $P\{X(t+s) = j|X(s) = i\}$ maka independen terhadap s. Rantai Markov Kontinu bersifat stasioner (probabilitas transisi yang homogen). Proses stokastik pada Rantai Markov Kontinu mempunyai beberapa kriteria yakni

1. Jumlah waktu yang dihabiskan di suatu kondisi sebelum melakukan transisi ke kondisi berbeda berdistribusi Eksponensial dengan rerata $\frac{1}{v_i}$
2. Ketika proses meninggalkan kondisi i, dengan kondisi selanjutnya di j dengan probabilitas P_{ij} maka P_{ij} harus memenuhi

$$P_{ii} = 0 \text{ untuk setiap i}$$
$$\sum_j P_{ij} = 1 \text{ untuk setiap i}$$

2.5.1 Fungsi Probabilitas Transisi

Definisi 2.5.2. Misalkan $P_{ij}(t) = P\{X(t+s) = j|X(s) = i\}$ merupakan probabilitas dari suatu proses saat ini di i yang akan berpindah ke kondisi j saat t waktu kemudian. Persamaan tersebut disebut fungsi Probabilitas transisi pada Rantai Markov Kontinu.

Secara eksplisit $P_{ij}(t)$ dapat ditentukan pada kasus kelahiran murni. Misalkan X_k adalah waktu yang dihabiskan pada proses k sebelum beralih ke kondisi $k+1$, $k \geq 1$. Apabila disebutkan kondisi saat ini adalah i, dengan $j > i$, maka X_i adalah waktu yang dihabiskan pada kondisi i sebelum berpindah ke kondisi $i+1$ dan X_{i+1} adalah waku yang dihabiskan sebelum berpindah ke $i+2$ dan seterusnya. Secara umum dapat dituliskan $\sum_{k=i}^{j=1} X_k$ adalah waktu yang diambil (dipakai) sehingga proses memasuki kondisi j.

2.5.2 Persamaan Differensial Fungsi Probabilitas Transisi

Definisi 2.5.3. Misalkan

$$q_{ij} = \upsilon_i P_{ij}$$

dengan P_{ij} probabilitas dari kondisi i ke j. υ_i adalah *rate* saat transisi dari kondisi i. q_{ij} adalah *instantaneous transition rate*, maka:

$$\upsilon_i = \sum_j \upsilon_i P_{ij} = \sum_j q_{ij}$$

dan

$$P_{ij} = \frac{q_{ij}}{\upsilon_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}$$

Melalui definisi 2.5.3, dapat diperoleh beberapa persamaan berikut

1. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1-P_{ii}(h)}{h} = \upsilon_i$

2. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{P_{ii}(h)}{h} = q_{ij}; i \neq j$

3. $P_{ij}(t+s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s)$ (Persamaan Chapman Kolmogorov)

Melalui perhitungan selisih fungsi Probabilitas Transisi, dapat diperoleh Persamaan Differensisal Fungsi Probabilitas Transisi

$$\begin{aligned}
P_{ij}(h+t) - P_{ij}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(h)P_{kj}(t) - P_{ij}(t) \\
P_{ij}(h+t) - P_{ij}(t) &= \sum_{k\neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t) - [1 - P_{ii}(h)]P_{ij}(t) \\
\lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h+t) - P_{ij}(t)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left\{ \sum_{k\neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t) - [1 - P_{ii}(h)]P_{ij}(t) \right\} \\
\frac{d}{dt} P_{ij}(t) &= \sum_{k\neq i} q_{ik}P_{kj}(t) - \upsilon_i P_{ij}(t)
\end{aligned}$$

2.5.3 *Embedded Markov Chain*

Definisi 2.5.4. Nilai $X(t)$ sesaat setelah transisi dari waktu t_n (dengan t_n^+) atau nilai $X(t)$ di (t_n, t_{n+1}). Jika suatu transisi terjadi dari proses i ke j dengan $j \neq i$ maka:

$$
\begin{aligned}
V_{ij}(h) &= P[X(h) = j | X(h) \neq i, X(0) = i] \\
&= \frac{P[\{X(h) = j\} \cap \{X(h) \neq i\} | X(0) = i]}{P[X(h) \neq i | X(0) = i]} \\
&= \frac{P_{ij}(h)}{1 - P_{ii}(h)}
\end{aligned}
$$

Untuk $h \to 0$ maka nilai $\lim_{h \to 0} V_{ij}(h)$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} V_{ij}(h) &= \lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(h)/h}{(1 - P_{ii}(h))/h} \\
&= \begin{cases} q_{ij}/\upsilon_{ij}, \forall i \neq j \\ 0, \forall i = j \end{cases}
\end{aligned}
$$

V_{ij} adalah probabilitas transisi dari *Embedded Markov Chain* (Rantai Markov Lompat). Pemodelan sistem dengan *Embedded Markov Chain* akan dijabarkan dalam fungsi pembangkit peluang guna memudahkan penurunan secara matematis pada model antrian.

2.6 Fungsi Pembangkit Peluang

Definisi 2.6.1. Misalkan X variabel acak diskrit bernilai bilangan bulat non-negatif. Maka fungsi Pembangkit Peluang dari X adalah

$$P_x(z) = E(z^x) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x P(X = x) \qquad \forall z \epsilon \mathbb{R}$$

dengan syarat $|P_x(z)| \leq 1, \forall |z| \leq 1,\ P_x(0) = p(0), P_x(1) = 1, P_x'(1) = E(x)$

Contoh fungsi Pembangkit Peluang pada distribusi Poisson
Variabel acak X berdistribusi Poisson (Λ), sehingga $P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-}\lambda$ dengan $(x = 0, 1, 2, ...)$ maka

$$\begin{aligned}
P_x(s) &= \sum_{x=0}^{\infty} z^x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda z} \qquad ; \forall z \epsilon \mathbb{R} \\
&= e^{\lambda(z-1)} \qquad ; \forall z \epsilon \mathbb{R}
\end{aligned}$$

2.6.1 Penjumlahan pada Fungsi Pembangkit Peluang

Penjumlahan dua variabel diskrit X dan Y dengan X dan Y saling independen dapat dituliskan dalam bentuk fungsi Pembangkit Peluang sebagai berikut

$$\begin{aligned}
W &= X + Y \\
P_w(z) &= P_x(z) + P_y(z)
\end{aligned}$$

Apabila probabilitas X adalah q dan probabilitas Y adalah $(1-q)$ maka bentuk Fungsi Pembangkit Peluangnya dapat dituliskan sebagai

$$P_w(z) = qP_x(z) + (1-q)P_y(z)$$

Bentuk fungsi pembangkit peluang dari suatu fungsi distribusi tertentu, dapat digunakan untuk mencari nilai probabilitas dari suatu variabel acak. Hal ini dijelaskan lebih lanjut dalam subbab berikutnya.

2.6.2 Mencari Probabilitas dengan Fungsi Pembangkit Peluang

Fungsi Pembangkit Peluang yang merupakan deret pangkat, dapat diperluas dan diturunkan sehingga dapat membantu menentukan probabilitas dari suatu variabel acak, dengan formula:

$$P_r = P(X=r) = (\frac{1}{r'})P_x^{(n)}(0) = \frac{d^r}{d_z r}P_x(z)|_{z=0}$$

Contoh: Distribusi Poisson

$$P(X=r) = \frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda} \qquad ; r = 0, 1, 2, ...$$

maka

$$\begin{aligned} P_x(z) &= (\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}.z^0 + \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}.z^1 + \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}.z^2 + ...) \\ &= (\frac{(\lambda.z)^0}{0!} + \frac{(\lambda.z)^1}{1!} + \frac{(\lambda.z)^2}{2!} + ...)e^{-\lambda} \\ &= e^{(\lambda z)}e^{-\lambda} \end{aligned}$$

jika diturunkan

$$\begin{aligned} P'_x(z) &= \lambda e^{(\lambda z)}.e^{-\lambda} \\ P''_x(z) &= \lambda^2 e^{(\lambda z)}.e^{-\lambda} \\ r = 1 \rightarrow P_1 &= (\frac{1}{1!})P'_{(X)}(0) = \lambda e^{1-\lambda} \\ r = 2 \rightarrow P_2 &= (\frac{1}{2!})P''_{(X)}(0) = \frac{1}{2}\lambda^2 e^{1-\lambda} \end{aligned}$$

Selain fungsi pembangkit peluang, diperlukan suatu transformasi untuk menyederhanakan integral dari fungsi eksponen yang banyak digunakan dalam memodelkan probabilitas dalam sistem antrian, oleh karena itu Transformasi Laplace Stieltjes digunakan dalam proses penurunan matematisnya.

2.7 Transformasi Laplace Stieltjes

Definisi 2.7.1. $f(x)$ merupakan fungsi dari x untuk $x > 0$. Maka transformasi Laplace dari $f(x)$ dinotasikan dengan

$$\hat{F}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

dimana diasumsikan bahwa parameter s adalah riil

Definisi 2.7.2. Transformasi Laplace Stieljes $\hat{F}(s)$ pada variabel acak X tidak negatif dengan distribusi $F(x)$ adalah

$$F^*(s) = E(e^{-sx}) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x), \qquad s \geq 0$$

Saat variabel acak X memiliki fungsi kepadatan $f(x)$ maka transformasi dapat disederhanakan menjadi

$$F^*(s) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} f(x)dx, \qquad s \geq 0$$

dimana $|F^*(s)| \leq 1, \forall s \geq 0$

Contoh pada distribusi Eksponensial yang memiliki variabel acak X bentuk transformasi dapat diberikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
F^*(s) &= E(e^{sX}) \\
&= \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \mu e^{-\mu x} dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} \mu e^{-(\mu+s)x} dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_{x=0}^{b} \mu e^{-(\mu+s)x} dx \\
&= \lim_{b\to\infty} (-\frac{\mu}{\mu+s}(e^{-(\mu+s)x})|_0^b) dx \\
&= (0 + \frac{\mu}{\mu+s}) \\
&= \frac{\mu}{\mu+s}
\end{aligned}$$

untuk menyatakan agar syarat transformasi Laplace dari suatu fungsi ada, diperlukan beberapa definisi berikut

Definisi 2.7.3. Suatu fungsi f dikatakan kontinu secara sebagian dalam suatu interval $0 \leq x \leq \beta$ apabila intervalnya dapat dibagi menjadi sejumlah berhingga subinterval, dimana di dalam subintervalnya tersebut fungsi dari f kontinu serta memiliki limit kiri dan limit kanan yang berhingga.

Definisi 2.7.4. Jika terdapat konstanta-konstanta yang real $N > 0$ dan $\gamma > 0$ sehingga untuk semua $x > M$ berlaku

$$|e^{-\gamma x}f(x)| < N \text{ atau } |f(s)| < Ne^{\gamma s}$$

maka dikatakan bahwa $f(x)$ merupakan suatu fungsi Eksponensial yang berorde γ, untuk $x \to \infty$.

Teorema 2.7.1. Jika $f(x)$ merupakan fungsi kontinu secara sebagian-sebagian dalam interval waktu berhingga $0 \leq x \leq M$ dan Eksponensial yang berorde γ untuk $x > N$, maka transformasi Laplace $f(x)$ adalah $\hat{F}(s)$; $\forall s > \gamma$.

Bukti. Untuk setiap bilangan M positif diperoleh

$$\int_{s=0}^{\infty} e^{-sx}f(x)dx = \int_{s=0}^{M} e^{-sx}f(x)dx + \int_{M}^{\infty} e^{-sx}f(x)dx$$

Karena $f(x)$ merupakan suau fungsi kontinu secara sebagian-sebagian dalam setiap interval waktu berhingga $0 \leq x \leq N$ maka integral pertama di ruas kanan ada dan integral kedua di ruas kanan juga ada. Fungsi $f(x)$ merupakan fungsi eksponensial yang berorde γ, $x > N$ maka untuk dapat melihatnya harus diperhatikan

$$\begin{aligned}
|\int_{M}^{\infty} e^{-sx}f(x)dx| \leq \int_{M}^{\infty} |e^{-sx}f(x)|dx &\leq \int_{0}^{\infty} e^{-sx}|f(x)|dx \\
&\leq \int_{0}^{\infty} e^{-sx}Ne^{\gamma x}dx \\
&= N\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{(-s+\gamma)}xdx \\
&= N\lim_{b\to\infty}(\frac{1}{-s+\gamma}e^{(-s+\gamma)x}|_{0}^{b}) \\
&= \frac{N}{s-\gamma}
\end{aligned}$$

sehingga transformasi Laplace ada untuk semua $s > \gamma$ $\square$

Teorema 2.7.2. Jika $P_{i,n}(x)$ kontinu untuk $0 \leq x \leq N$ dan menyebar eksponensial $x > N$ ketika $P'_{i,n}(x)$ adalah kontinu untuk $0 \leq x \leq N$ maka $\hat{P'}_{i,n}(s) = s\hat{P'}_{i,n}(s) - \hat{P}_{i,n}(0)$

Bukti. Dengan mengintegralkan diperoleh

$$\begin{aligned}
\hat{P'}_{i,n}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\frac{d}{dx}P_{i,n}(x)dx \\
&= \lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{-sx}\frac{d}{dx}P_{i,n}(x)dx \\
&= \lim_{r\to\infty} e^{-sx}P_{i,n}(x)|_0^r + s\int_0^r e^{-sx}dP_{i,n}(x) \\
&= \lim_{r\to\infty} e^{-sx}P_{i,n}(r) - P_{i,n}(0) + s\int_0^r e^{-sx}dP_{i,n}(x) \\
&= s\int_0^\infty e^{-sx}dP_{i,n}(x) - P_{i,n}(0) = s\hat{P'}_{i,n}(s) - P_{i,n}(0)
\end{aligned}$$

□

2.8 Model M/G/1 dengan *Working Vacation*

Merupakan model antrian dengan kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson dengan *rate* λ, distribusi pelayanan *General* dan satu saluran pelayanan pelanggan. *Working Vacation* pada model ini merupakan kondisi pelayan yang akan berhenti melayani pelanggan selama periode tertentu, namun tidak menutup kemungkinan pelayan tersebut untuk melakukan aktivitas pelayanan pada saat itu, dengan kata lain pelanggan akan dilayani pada kecepatan yang lebih rendah dari biasanya. Pelayan yang tidak dapat melayani kemungkinan sedang dalam proses perbaikan ataupun sedang melayani pelanggan sekunder. *Working Vacation* termasuk salah satu contoh *Multiple Vacation* yakni Pelayan mengambil *vacation* setiap sistem kosong. Antrian M/G/1 dengan *Working Vacation* mempunyai dua laju pelayanan, yaitu laju pelayanan waktu sibuk (μ_b) dan laju pelayanan waktu libur (μ_v). Beberapa notasi yang akan digunakan dalam memodelkan antrian ini.

1. Fungsi Distribusi Peluang pada waktu pelayanan normal saat periode sibuk

   $S_b(x) = 1 - \exp\{-\int_0^x \mu_1(t)dt\}$ rerata $1/\mu_b$, dengan $x \in \mathbb{R}$

   dan

   $S_b^*(r) = \int_0^\infty e^{-rx} dS_b(x)$, $b^{(x)} = \int_0^\infty x^k dS_b(x)$

2. Fungsi Distribusi Peluang pada waktu pelayanan selama periode *vacation*

   $S_v(x) = 1 - \exp\{-\int_0^x \mu_0(t)dt\}$ rerata $1/\mu_v$, dengan $x \in \mathbb{R}$

   dan

   $S_v^*(r) = \int_0^\infty e^{-rx} dS_v(x)$, $b^{(x)} = \int_0^\infty x^k dS_v(x)$

3. Waktu *vacation* berdistribusi exponensial dengan *rate* θ, apabila ada pelanggan datang ke dalam sistem saat periode *vacation*, maka pelanggan akan dilayani. Namun apabila ada pelanggan lain datang kembali, pelanggan akan tetap dilayani dengan kondisi pelayanan kembali normal dan pekerjaan saat *vacation* ditunda.

Kondisi *stable* model antrian M/G/1 dengan *Working Vacation* harus memenuhi syarat cukup dan syarat perlu yakni dengan memberikan nilai utilitas

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu_b} < 1 \tag{2.5}$$

Pada kondisi tersebut kecepatan rata-rata kedatangan pelanggan kedalam sistem lebih kecil daripada kecepatan rata-rata pelayanan, sehingga pelanggan yang datang tidak melebihi kapasitas sistem antrian.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Formulasi Model Antrian M/G/1 dengan *Working Vacation*

Model antrian M/G/1 dengan *Working Vacation* merupakan model antrian dengan kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson dengan *rate* λ, distribusi pelayanan General dan satu saluran pelayanan pelanggan. *Working vacation* pada model ini merupakan kondisi pelayan yang akan berhenti melayani pelanggan selama periode tertentu, namun tidak menutup kemungkinan pelayan tersebut untuk melakukan aktivitas pelayanan pada saat itu, dengan kata lain pelanggan akan dilayani pada kecepatan yang lebih rendah dari biasanya. Pelayan yang tidak dapat melayani kemungkinan sedang dalam proses perbaikan ataupun sedang melayani pelanggan sekunder. *Working Vacation* termasuk salah satu contoh *Multiple Vacation* yakni Pelayan mengambil *vacation* setiap sistem kosong.

Model antrian ini akan dianalisis untuk mendapatkan distribusi panjang antrian dalam sistem antrian dan waktu tunggu dalam sistem antrian. Sebagai langkah awal, akan dibentuk persamaan model antrian M/G/1 dengan *Working Vacation* saat *steady state*. Selanjutnya dapat diturunkan persamaan differensial fungsi probabilitas transisi untuk menjadi dasar dalam analisis model antrian tersebut.

3.1.1 Asumsi Model Antrian M/G/1 dengan *Working Vacation*

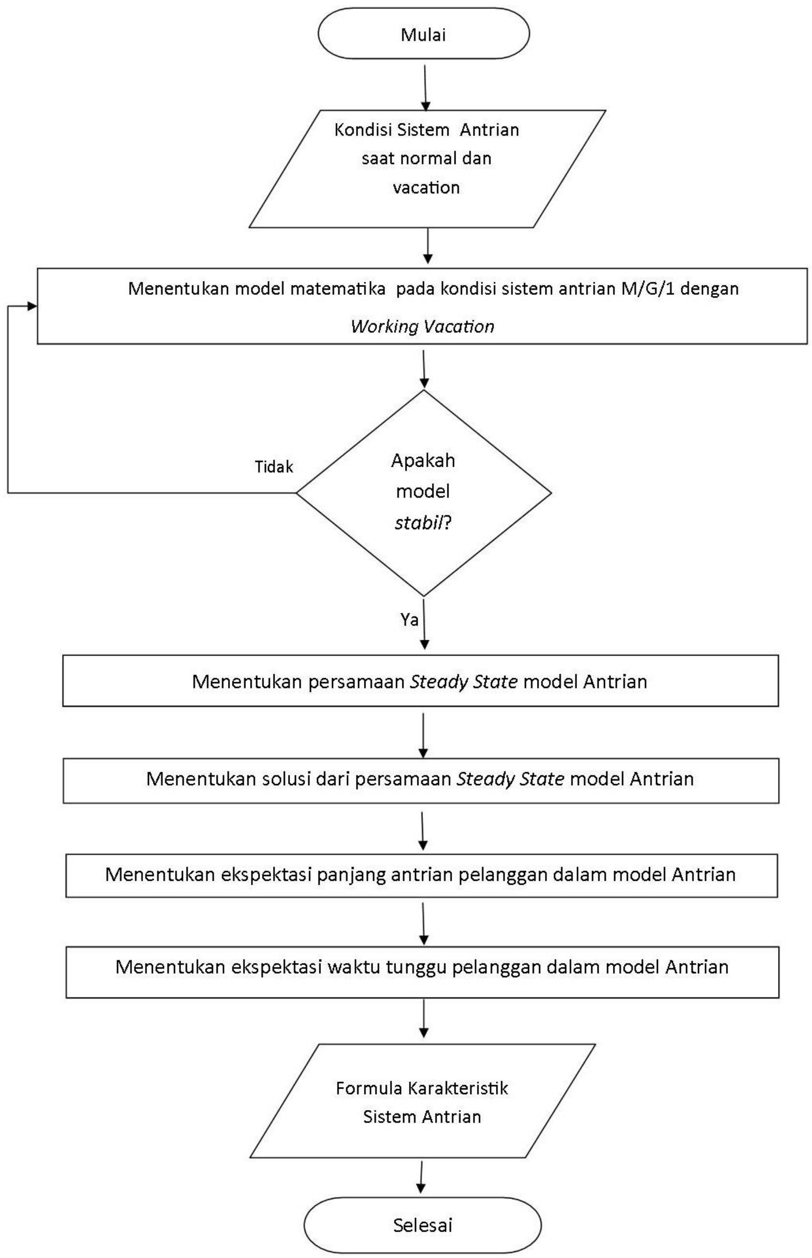
Persamaan model antrian M/G/1 dengan *Working Vacation* akan dibentuk berdasarkan kemungkinan-kemungkinan kondisi antrian yang terjadi dalam sistem. Asumsi kondisi-kondisi antrian dalam sistem sebagai berikut.

1. Pada waktu pelayan melakukan *vacation*, tidak ada pelanggan dalam sistem.
2. Pada waktu pelayan melakukan *vacation*, ada n pelanggan dalam sistem.
3. Pada waktu pelayan tidak melakukan *vacation* (kondisi sibuk), ada n pelanggan dalam sistem.
4. Kedatangan pelanggan ke dalam sistem antrian memenuhi definisi Proses Poisson.
5. Terjadinya *vacation* bersifat *memoryless*.

Pemisalan kondisi dalam sistem saat *vacation* atau sibuk, dituliskan dengan variabel berikut.

1. $L(t)$ adalah banyaknya pelanggan dalam sistem pada waktu t.
2. $J(t) = 0$ adalah kondisi pelayan dalam *working vacation* pada periode t dan $J(t) = 1$ adalah kondisi pelayanan dalam pelayanan normal pada periode t.
3. $\xi_0(t)$ adalah waktu selesainya pelayanan pelanggan saat sistem *working vacation* pada periode t, $\xi_1(t)$ adalah waktu selesainya pelayanan pelanggan saat sistem normal pada periode t.
4. Nilai $\{L(t), J(t), \xi_0(t), \xi_1(t) : t \geq 0\}$ adalah proses Markov dengan $\Omega = \{(0,0)\} \cup \{(n,0,x); n \geq 1, x \geq 0\} \cup \{(n,1,x); n \geq 1, x \geq 0\}$.

3.1.2 Diagram Alir Penelitian



Gambar 3.1: Diagram Alir penyelesaian Masalah

Berdasarkan gambar 3.1 dapat dijelaskan alur penelitian sebagai berikut.

1. Menentukan model matematika pada kondisi sistem antrian yang terbagi atas kondisi normal dan *vacation*. Model yang dibentuk adalah model pada probabilitas tiap-tiap kemungkinan kondisi yang terjadi pada sistem. Pembentukan model dengan penerapan *Embedded Markov Chain* dilakukan untuk memudahkan analisis karena model yang dibentuk kombinasi dari variabel acak diskrit dan kontinu serta pelayanan yang berdistribusi *General*.

2. Pengecekan sistem *stable*, melalui pembuktian bahwa utilitas memenuhi Persamaan 2.5.

3. Jika belum *stable*, maka model matematika perlu diperbaiki, jika sudah *stable* dapat dilanjutkan ke langkah berikutnya.

4. Menentukan persamaan *steady state* model antrian beserta persamaan differensial batasannya. Hal ini dilakukan untuk mendapatkan fungsi pembangkit peluang yang diperoleh melalui penyusunan persamaan differensial fungsi probabilitas transisi. Batasan pada sistem juga dilakukan berupa probabilitas dari banyaknya pelanggan yang akan datang untuk memastikan nilai utilitas kurang dari 1.

5. Menyelesaikan persamaan *steady state* dengan konsep probabilitas dan aljabar serta persamaan differensial.

6. Menentukan ekspektasi panjang antrian pelanggan dalam sistem dengan menggunakan konsep turunan.

7. Menentukan ekspektasi waktu tunggu pelanggan melalui formula *Little*.

8. Diperoleh formula karakteristik model antrian M/G/1 dengan *working vacation* yang dapat diaplikasikan pada suatu kasus model antrian.

3.1.3 Pengecekan Kestabilan Sistem

Penentuan probabilitas kemungkinan kedatangan pelanggan:

1. a_k $(k \geq 0)$, probabilitas ada k kedatangan pelanggan selama S_b

2. b_k probabilitas ada k kedatangan pelanggan selama S_v dengan waktu *vacation* $(V) > S_v$

3. v_k probabilitas ada k kedatangan pelanggan selama V dengan waktu *vacation* (V) $\leq S_v$

4. c_k probabilitas ada k kedatangan pelanggan selama V+S_b dengan waktu vacation (V) $< S_v$

Sebagaimana disebutkan dalam Subbab 2.8, kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson, maka fungsi probabilitas kedatangan pelanggan didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dS_b(x) \\
b_k &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dS_b(x) \\
v_k &= \int_0^\infty \int_0^x \theta e^{-\theta u} \frac{(\lambda u)^k}{k!} e^{-\lambda u} du dS_v(x) \\
c_k &= \int_0^\infty \theta e^{-(\lambda+\theta)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} [1 - S_v(x)] dx
\end{aligned}$$

Selanjutnya persamaan diatas dilakukan transformasi z untuk diubah dalam bentuk fungsi pembangkit peluang dan diperoleh transformasi Laplacenya:

$$\begin{aligned}
A(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)x} dS_b(x) = \tilde{S}_b(\lambda(1-z)) \\
B(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \int_0^{\infty} e^{-(\theta+\lambda(1-z))x} dS_v(x) = \tilde{S}_v(\theta+\lambda(1-z)) \\
V(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k = \int_0^{\infty} \int_0^{x} \theta e^{-(\theta+\lambda(1-z)u} du dS_v \\
&= \frac{\theta}{\theta+\lambda(1-z)} \int_0^{\infty} [1 - e^{-(\theta+\lambda(1-z))x}] dS_v(x) \\
&= \frac{\theta}{\theta+\lambda(1-z)} [1 - \tilde{S}_v(\theta+\lambda(1-z))] = \frac{\theta}{\theta+\lambda(1-z)} [1 - B(z)]
\end{aligned}$$

Selanjutnya dari a_k, b_k, v_k, dan c_k akan dibuat matriks probabilitas transisi (Matrik Block Jacobi) $X_n = (L_n, J_n)$, sebagai berikut

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 + b_1 & c_1 + b_2 & c_2 + b_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, pembuktian kestabilan sistem melalui teorema berikut

Teorema 3.1.1. Rantai Markov $\tilde{A}$ *positive recurrent* jika dan hanya jika ρ (nilai utilitas sistem) $=\frac{\lambda}{\mu_b} < 1$

Bukti. Pembuktian dilakukan melalui dua tahap:

1. Akan dibuktikan bahwa jika Rantai Markov $\tilde{A}$ *positive recurrent* maka $\rho < \frac{\lambda}{\mu_b} < 1$. pada matriks A_i terlihat bahwa *state* saling *communicate* dan bersi-

fat *irreducible*. Selain itu juga terlihat bahwa *state* saling aperiodik, sehingga dapat dikatakan proses bersifat ergodik, karena ergodik maka bersifat *positif recurrent* maka $\rho < \frac{\lambda}{\mu_b} < 1$.

2. Akan dibuktikan bahwa nilai utilitas $(\rho) < 1$ maka Rantai Markov $\tilde{A}$ *positive recurrent*. Nilai utilitas (ρ) merupakan bentuk $A'(1)$ dari $A(1)$. Dimana $A(1) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1$ dan $a_0 > \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n$. Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} A'(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n \\ &= 1 - a_0 + c \end{aligned}$$

dimana $\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n = c < a_0$ dan bentuk ini ekuivalen dengan $1 > \sum_{n=1}^{\infty} n a_n$, sehingga $A'(1)$ bersifat *positif recurrent*.

Maka dapat disimpulkan bahwa sistem stabil. $\square$

3.1.4 Persamaan *Steady State* Model Antrian M/G/1 dengan *Working Vacation*

Kondisi pada waktu t dituliskan sesuai definisi berikut.

Definisi 3.1.1. Fungsi probabilitas transisi pada sistem yaitu.

$P_{0,0}(t) = P\{L(t) = 0, J(t) = 0\}$

$P_{n,0}(t,x)dx = P\{L(t) = n, J(t) = 0, x \leq \xi_0(t) < x + dx\}, n \geq 1,$

$P_{n,1}(t,x)dx = P\{L(t) = n, J(t) = 1, x \leq \xi_1(t) < x + dx\}, n \geq 1.$

Definisi 3.1.2. Suatu $P_{n,0}(x)$ dan $P_{n,1}(x)$ dinotasikan sebagai peluang banyaknya n pelanggan dalam sistem pada waktu x, dengan domain $P_{n,0}(x)$ dan $P_{n,1}(x)$ adalah suatu aljabar event $\mathfrak{A} \in \Omega$ (Ruang sampel) sehingga:

- $P_{n,0}(x) \geq 1 \qquad \forall A \in \mathfrak{A}$
- $P_{n,1}(x) \geq 1 \qquad \forall A \in \mathfrak{A}$
- $P(\Omega)= 1$
- Jika $A_1, A_2, ...$ adalah barisan yang saling asing dari kejadian dalam $\mathfrak{A}$ (yaitu $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j; i, j = 1, 2, ...$) atau jika $A_1 \cup A_2 \cup .... = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$ maka $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Definisi 3.1.3. $P_{n,0}$ dan $P_{n,1}$ dinotasikan sebagai probabilitas stasioner *(steady state)* dalam sistem sehingga

$$\begin{aligned} P_{n,0}(x) &= \lim_{t\to\infty} P_{n,0}(t,x) \\ P_{n,0} &= \lim_{t\to\infty} P_{n,0}(t) \\ P_{n,1}(x) &= \lim_{t\to\infty} P_{n,1}(t,x) \\ P_{n,1} &= \lim_{t\to\infty} P_{n,1}(t) \end{aligned}$$

Probabilitas *steady state* akan digunakan untuk menentukan persamaan differensial dalam sistem antrian, namun perlu ditentukan terlebih dahulu batasan probabilitas sistem saat t=0 sebagai berikut (Zhang & Hou, 2010: 2979).

$$P_{1,0}(0) = \lambda P_{0,0} = \int_0^{\infty} P_{1,0}(x)\mu_0(x)dx + \int_0^{\infty} P_{1,1}(x)\mu_1(x)dx \quad (3.1)$$

$$P_{n,1}(0) = \int_0^{\infty} \theta P_{n,0}(x)dx + \int_0^{\infty} P_{n+1,0}(x)\mu_0(x)dx + \int_0^{\infty} P_{n+1,1}(x)\mu_1(x)dx \quad (3.2)$$

$$P_{n,0}(0) = 0, n \geq 2 \quad (3.3)$$

Selanjutnya ditentukan bentuk persamaan differensial pada kemungkinan-kemungkinan kondisi sistem antrian sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}P_{n,1}(x) &= -[\lambda+\mu_1(x)]P_{n,1}(x)+(1-\delta_{1n})\lambda P_{n-1,1}(x), n\geq 1, & (3.4)\\ \frac{d}{dx}P_{n,0}(x) &= -[\lambda+\theta+\mu_0(x)]P_{n,0}(x)+(1-\delta_{1n})\lambda P_{n-1,0}(x), n\geq 1. & (3.5)\end{aligned}$$

dimana $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ dan normalisasi kondisi

$$P_{0,0} + \left[\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} P_{n,0}(x)dx + \int_0^{\infty} P_{n,1}(x)dx\right] = 1$$

3.1.5 Solusi *Steady State* Model Antrian M/G/1 dengan *Working Vacation*

Solusi pada *Steady State* diperlukan untuk mendapatkan formula probabilitas panjang antrian dalam sistem yang bersifat tetap untuk waktu yang lama (waktu menuju tak hingga). Solusi *Steady State* pada model ini adalah formula distribusi panjang antrian dalam sistem, yang merupakan penjumlahan dari peluang banyaknya pelanggan dalam sistem saat kondisi normal dan kondisi *vacation*.

$$P_{n,0}(x) \text{ dan } P_{n,1}(x)$$

Untuk mendapatkan formula tersebut harus diselesaikan Persamaan Differensial 3.1 dan 3.2, pertama tuliskan $P_{n,0}(x)$ dan $P_{n,1}(x)$ dalam bentuk PGF:

$$\begin{aligned} P_0(x,z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n P_{n,0}(x),\\ P_1(x,z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n P_{n,1}(x)\end{aligned}$$

Dengan mengalikan Persamaan 3.4 dan 3.5 dengan z^n dan menjumlahkan sebanyak n diperoleh,

$$\frac{d}{dx}P_1(x,z) = -[\lambda(1-z)+\mu_1(x)]P_1(x,z); \tag{3.6}$$

$$\frac{d}{dx}P_0(x,z) = -[\lambda(1-z)+\theta+\mu_0(x)]P_0(x,z); \tag{3.7}$$

Selesaikan Persamaan 3.6 dan 3.7 di atas sehingga

$$P_1(x,z) = P_1(0,z)e^{-\lambda(1-z)x}[1-S_b(x)]$$

$$P_0(x,z) = P_0(0,z)e^{-\lambda(1-z)x}[1-S_v(x)]$$

Maka bentuk terakhir diatas dapat dituliskan;

$$P_{n,1}(x) = \sum_{n=1}^{n} P_{i,1}(0)\frac{(\lambda x)^{n-i}}{(n-i)!}e^{\lambda x}[1-S_b(x)], n \geq 1, \tag{3.8}$$

$$P_{n,0}(x) = \sum_{n=1}^{n} P_{i,0}(0)\frac{(\lambda x)^{n-i}}{(n-i)!}e^{(\lambda+\theta)x}[1-S_v(x)], n \geq 1, \tag{3.9}$$

Namun dikarenakan sesuai dengan Persamaan 3.3 dimana $P_{n,0}(0) = 0$, untuk $n \geq 2$, maka

$$P_{n,0}(x) = P_{1,0}(0)\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{(\lambda+\theta)x}[1-S_v(x)], n \geq 1. \tag{3.10}$$

Berdasarkan bentuk Persamaan 3.1 dan 3.2 dapat disimpulkan $PA = P$, dengan P merupakan probabilitas banyaknya pelanggan, dan A merupakan matriks Jacobi dalam Subbab 3.1.3. Konstruksi bentuk lain dari P, yakni $P = \alpha\pi = \alpha(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, ...)$ dengan $\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}\pi_0 + \frac{1-S_v^*(\theta)}{\theta}\pi_0 + (1-\pi_0)\frac{1}{\mu_b}}$, maka selanjutnya substitusi π_0 ke bentuk α menjadi

$$\alpha = \frac{\lambda\{\theta(1-\rho)[1-S_v^*\theta]\}}{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]}$$

Selanjutnya akan diperoleh bentuk $P_{0,0}$

$$\begin{aligned}
\lambda P_{0,0} &= P_{1,0}(0) \\
P_{0,0} &= \frac{P_{1,0}(0)}{\lambda} \\
P_{0,0} &= \frac{\pi_0}{\lambda} \\
P_{0,0} &= \frac{\theta(1-\rho)}{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]}
\end{aligned}$$

dan bentuk $P_{n,0}(x)$, dan $P_{n,1}(x)$

$$\begin{aligned}
P_{n,0}(x) &= P_{i,0}(0)\frac{(\lambda x)^{n-i}}{(n-i)!}e^{(\lambda+\theta)x}[1-S_v(x)] \\
&= \alpha\pi_0\frac{(\lambda x)^{n-i}}{(n-i)!}e^{(\lambda+\theta)x}[1-S_v(x)] \\
P_{n,1}(x) &= \sum_{i=1}^{n} P_{i,1}(0)\frac{(\lambda x)^{n-i}}{(n-i)!}e^{\lambda x}[1-S_b(x)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha\pi_i\frac{(\lambda x)^{n-i}}{(n-i)!}e^{\lambda x}[1-S_b(x)]
\end{aligned}$$

Penentuan bentuk PGF saat kondisi *vacation* yakni:

$$\begin{aligned}
P_0(x,z) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{n,0}(x)z^n = \alpha\pi_0 z e^{-[\lambda(1-z)+\theta]}[1-S_v(x)] \\
&= \frac{\lambda\theta(1-\rho)}{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]}ze^{-[\lambda(1-z)+\theta]}[1-S_v(x)]
\end{aligned}$$

Penentuan bentuk PGF saat kondisi normal yakni:

$$
\begin{aligned}
P_1(x,z) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{n,1}(x)z^n = \alpha[\phi(z)-\pi_0]e^{-\lambda(1-z)x}[1-S_b(x)] \\
&= \frac{\lambda\theta(1-\rho)}{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]} z \frac{zC(z)+B(z)-1}{z-A(z)} \\
&\quad \times e^{-\lambda(1-z)x}[1-S_b(x)]
\end{aligned}
$$

Setelah diperoleh bentuk diatas, maka untuk mendapatkan bentuk probabilitas banyaknya pelanggan yang antri harus dicari bentuk PGF marginal yaitu

$$
\begin{aligned}
P_0(z) &= \frac{\theta(1-\rho)}{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]} \\
&\quad \times \frac{(\lambda+\theta)-\lambda z S_v^*(\lambda(1-z)+\theta)}{\lambda(1-z)+\theta} \\
P_1(z) &= \frac{\theta(1-\rho)}{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]} \\
&\quad \times \frac{(\lambda+\theta)z[1-S_v^*(\lambda(1-z)+\theta)][1-S_b^*(\lambda(1-z))]}{[S_b*(\lambda(1-z))-z][\lambda(1-z)+\theta]}
\end{aligned}
$$

Setelah diperoleh bentuk $P_0(z)$ dan $P_1(z)$, maka PGF banyaknya pelanggan yang mengantri dalam sistem $P(z)$, merupakan penjumlahan dari bentuk PGF sistem saat normal dan saat *vacation*. Hal ini dikarenakan sistem antrian terbagi menjadi dua kondisi tersebut. Penurunan bentuk $P(z)$ diturunkan melalui teorema berikut.

Teorema 3.1.2. Misalkan P_0 dan P_1 variabel acak independen dengan PGF $P_0(z)$ dan $P_1(z)$, dan $P = P_0 + P_1$, maka

$$P(z) = (P_0 + P_1)(z) = P_0(z)P_1(z)$$

Bukti.

$$\begin{aligned} P(z) &= E(z^N) = E(z^{P_0+P_1}) \\ &= E(z^{P_0})E(z^{P_1}) \\ &= P_0(z)P_1(z) \end{aligned}$$

□

Selanjutnya, berdasarkan teorema di atas, diperoleh:

$$\begin{aligned} P(z) &= P_0(z)P_1(z) \\ &= \frac{\theta(1-\rho)}{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]}\frac{(\lambda+\theta)-\lambda z S_v^*(\lambda(1-z)+\theta)}{\lambda(1-z)+\theta} \times \\ &\quad \left[\frac{\theta(1-\rho)}{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]}\frac{(\lambda+\theta)z[1-S_v^*(\lambda(1-z)+\theta)]}{[S_b^*(\lambda(1-z))-z][\lambda(1-z)+\theta]}\right. \\ &\quad \left.\frac{[1-S_b^*(\lambda(1-z))]}{[S_b^*(\lambda(1-z))-z][\lambda(1-z)+\theta]}\right] \\ &= \frac{\theta(1-\rho)}{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]} \times \left[\frac{(\lambda+\theta)(1-z)S_b^*(\lambda(1-z))}{[S_b^*(\lambda(1-z))-z][\lambda(1-z)+\theta]}\right. \\ &\quad \left.\frac{-zS_v^*(\lambda(1-z)+\theta)\{\lambda(1-z)+\theta[1-S_b^*(\lambda(1-z))]\}}{[S_b^*(\lambda(1-z))-z][\lambda(1-z)+\theta]}\right] \end{aligned}$$

3.2 Karakteristik Model Antrian dengan *Working Vacation*

Karakteristik model antrian dengan M/G/1 dengan *Working Vacation* dapat ditentukan setelah PGF dari panjang antrian pelanggan dalam sistem diketahui. Karakteristik yang akan dibahas adalah ekspektasi panjang antrian dalam sistem dan ekspektasi waktu tunggu pelanggan dalam sistem.

3.2.1 Ekspektasi Panjang Antrian dalam Sistem

Sistem antrian M/G/1 dengan *Working vacation* terbagi menjadi dua kondisi yaitu saat *vacation* dan saat normal. Hal tersebut menyebabkan formula $P(z)$ (probabilitas panjang antrian dalam sistem) terbentuk dari $P_0(z)$ dan $P_1(z)$. Penentuan Ekspektasi panjang antrian dalam sistem (banyaknya pelanggan dalam sistem) $E(L)$, merupakan perkiraan nilai banyaknya pelanggan dalam sistem saat kondisi *steady state*. Formula tersebut dibentuk dari $P(z)$ yang diturunkan terhadap z dan dievaluasi bentuk formulanya saat $z = 1$ (menghitung $P'(1)$ dari bentuk $P(z)$), sebagaimana diturunkan sebagai berikut:

$$E(L) = P'(z) \text{ dengan z=1}$$

$$P'(z) = P_0'(z)P_1(z) + P_0(z)P_1'(z)$$

Maka selanjutnya,

$$\begin{aligned} P_0(z)P_1'(z) \quad = \quad & \left[\frac{\theta(1-\rho)}{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]}\right]^2 \times \\ & \left[\frac{(\lambda+\theta)-\lambda z S_v^*(\lambda(1-z)+\theta)}{\lambda(1-z)+\theta}\right] \times \\ & \left[\left[\frac{(\lambda+\theta)[1-(zS_v^*(\lambda(1-z)+\theta)'+S_v^*(\lambda(1-z)+\theta))]}{[S_b^*(\lambda(1-z))-z]^2[\lambda(1-z)+\theta]^2}\right.\right. \\ & \left.\frac{[1-S_b^*(\lambda(1-z))']+(\lambda+\theta)[z-zS_v^*(\lambda(1-z)+\theta)'][-S_b^*(\lambda(1-z))']}{[S_b^*(\lambda(1-z))-z]^2[\lambda(1-z)+\theta]^2}\right] \\ & \left[\frac{[S_b^*(\lambda(1-z)-z)'][\lambda(1-z)+\theta]}{[S_b^*(\lambda(1-z))-z]^2[\lambda(1-z)+\theta]^2}\right] - \\ & \left[\frac{(\lambda+\theta)z[1-S_v^*(\lambda(1-z)+\theta)][1-S_b^*(\lambda(1-z))]}{[S_b^*(\lambda(1-z))-z]^2[\lambda(1-z)+\theta]^2}\right. \\ & \left.\left.\frac{\{[S_b^*(\lambda(1-z))'-1][\lambda(1-z)+\theta]+[S_b^*(\lambda(1-z))'-z][-\lambda]\}}{[S_b^*(\lambda(1-z))-z]^2[\lambda(1-z)+\theta]^2}\right]\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_0'(z)P_1(z) &= \left[\frac{\theta(1-\rho)}{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]}\right]^2 \times \\
&\left[\frac{\theta\lambda z S_v^*(\lambda(1-z)+\theta)'}{(\lambda(1-z)+\theta)^2}\right. \\
&-\frac{\lambda^2 z S_v^*(\lambda(1-z)+\theta)+\theta\lambda S_v^*(\lambda(1-z)+\theta)+\lambda\theta+\lambda^2}{(\lambda(1-z)+\theta)^2} \\
&\left.+\frac{\lambda^2 z(1-z)S_v^*(\lambda(1-z)+\theta)'+\lambda^2(1-z)S_v^*(\lambda(1-z)+\theta)}{(\lambda(1-z)+\theta)^2}\right] \\
&\left[\frac{(\lambda+\theta)z[1-S_v^*(\lambda(1-z)+\theta)][1-S_b^*(\lambda(1-z))]}{[S_b*(\lambda(1-z))-z][\lambda(1-z)+\theta]}\right]
\end{aligned}$$

Jumlahkan $P_0'(z)P_1(z)$ dan $P_0(z)P_1'(z)$ diatas, lalu substitusi $z=1$ dan sederhanakan hingga diperoleh

$$\begin{aligned}
P'(1) &= \frac{\lambda+\theta}{\theta}+\frac{\lambda^2 b^{(2)}}{2(1-\rho)}-\frac{(1-\rho)(\lambda+\theta)+(\lambda+\rho\theta)\beta}{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]} \\
&-\frac{\theta\lambda^2 S_v^*(\theta)b^{(2)}}{2\{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]\}}
\end{aligned}$$

dimana $\beta=\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}dS_v(x)$. Karena $P'(1)=E(L)$, maka

$$\begin{aligned}
E(L) &= \frac{\lambda+\theta}{\theta}+\frac{\lambda^2 b^{(2)}}{2(1-\rho)}-\frac{(1-\rho)(\lambda+\theta)+(\lambda+\rho\theta)\beta}{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]} \\
&-\frac{\theta\lambda^2 S_v*(\theta)b^{(2)}}{2\{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]\}}
\end{aligned}$$

dimana, $\beta=\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}dS_v(x)$

Setelah formula ekspektasi panjang antrian dalam sistem diperoleh, dapat diturunkan formula ekspektasi waktu pelanggan dalam sistem sebagaimana dijelaskan dalam subbab berikutnya.

3.2.2 Ekspektasi Waktu Tunggu dalam Sistem

Waktu tunggu pelanggan dalam sistem merupakan waktu yang dihabiskan pelanggan sejak kedatangannya ke dalam sistem hingga pergi meninggalkan sistem setelah mendapatkan pelayanan fasilitas. Menurut Formula *Little*, dapat diketahui hubungan antara banyaknya pelanggan dalam sistem dan waktu tunggu pelanggan adalah

$$L_s = \lambda_{eff} W_s$$

dengan $\lambda_{eff} = \lambda$. Maka selanjutnya berdasarkan formula *Little* tersebut, dapat ditentukan:

$$\begin{aligned}
E(W) &= \frac{E(L)}{\lambda E(X)} \\
&= \frac{1}{\lambda E(X)} \times E(L) \\
&= \frac{1}{\lambda E(X)} \times \left[\frac{\lambda+\theta}{\theta} + \frac{\lambda^2 b^{(2)}}{2(1-\rho)} - \frac{(1-\rho)(\lambda+\theta)+(\lambda+\rho\theta)\beta}{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\theta\lambda^2 S_v^* * (\theta) b^{(2)}}{2\{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]\}} \right] \\
&= \frac{\lambda+\theta}{\theta\lambda E(X)} + \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)E(X)} - \frac{(1-\rho)(\lambda+\theta)+(\lambda+\rho\theta)\beta}{\lambda E(X)[\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]]} \\
&\quad - \frac{\theta\lambda^2 S_v^*(\theta) b^{(2)}}{2\lambda E(X)\{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]\}}
\end{aligned}$$

3.3 Contoh kasus Model Antrian M/G/1 dengan *Working Vacation*

Contoh model antrian M/G/1 dengan *Working Vacation* yang akan dibahas yaitu pada antrian bus kampus Universitas Andalas, Padang. Data antrian diambil dari jurnal *Identifikasi Model Antrian Pada Antrian Bus Kampus Universitas Andalas Padang* (Ersyad & Devianto, 2012: 44-51). Data yang diambil pada jurnal tersebut adalah data pada 2 jam pertama dari penelitian sebelumnya. Data antrian selengkapnya pada lampiran. Asumsi model M/G/1 dengan *working vacation* pada contoh kasus:

1. Pelanggan dalam kasus ini adalah bus kampus dan Terminal pasar Baru sebagai *server*.
2. Pelayanan dalam fasilitas tersebut merupakan keberangkatan bus kampus dari terminal.
3. Kondisi *vacation* terjadi saat tidak adanya kedatangan bus ke terminal, maka *server* akan melayani keberangkatan bus lainnya.
4. Saluran keberangkatan berjumlah satu dengan aturan bus yang pertama datang akan diberangkatkan terlebih dahulu.
5. Waktu antar kedatangan bus berdistribusi Eksponensial.
6. Waktu pelayanan berdistribusi tertentu, tidak harus berdistribusi eksponensial.
7. Kedatangan bus ke dalam sistem antrian memenuhi definisi Proses Poisson.
8. Terjadinya *vacation* pada sistem berdistribusi eksponensial.

9. Waktu sibuk merupakan waktu saat bus diberangkatkan dengan laju keberangkatan normal.

10. Waktu *vacation* merupakan waktu saat tidak ada bus kampus yang masuk ke terminal namun pada waktu *vacation* memungkinkan ada bus kampus yang datang.

11. Bus yang pertama kali datang pada waktu *vacation* akan dilayani dengan laju pelayanan *vacation* (lebih rendah daripada laju keberangkatan normal).

3.3.1 Ekspektasi Jumlah Pelanggan dalam Sistem Antrian

Sebelum menghitung nilai ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem antrian, akan ditentukan terlebih dahulu nilai variabel dari sistem tersebut.

1. Banyaknya data (N) = 48 bus

2. Total waktu *vacation* = 62 menit

3. Total waktu pengamatan (t)= 2 jam / 120 menit

4. Laju kedatangan (λ)

$$\lambda = \frac{48}{120} = 0.4 \text{ bus/menit}$$

5. Rata-rata waktu *vacation* (θ)

$$\theta = \frac{62}{2} = 31 \text{ /menit}$$

6. Laju Pelayanan waktu sibuk (μ_b) merupakan jumlah bus yang diberangkatkan di waktu sibuk
$$\mu_b = \frac{46}{58} = 0.8 \approx 1 \text{ bus/menit}$$

7. Laju Pelayanan waktu *vacation* (μ_v) merupakan jumlah bus yang berangkat di waktu *vacation*
$$\mu_v = \frac{2}{62} = 0.03 \approx 0 \text{ bus/menit}$$

8. Utilitas (ρ)
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu_b} = \frac{0.4}{1} = 0.4 < 1 \ (stable)$$

9. Fungsi laju pelayanan vacation ($\mu_0(t)) = 0, t = 120$

10. Fungsi laju pelayanan sibuk ($\mu_1(t)) = \frac{1}{120}t, t = 120$

11. Ekspektasi kedatangan pelanggan dalam sistem (E(X)).
$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} = 1.\frac{12}{48} + 2.\frac{7}{48} + 3.\frac{1}{48} + 4.\frac{1}{48} + 5.\frac{3}{48} = \frac{48}{48} = 1$$

12. Fungsi distribusi pelayanan pada waktu sibuk. ($S_b(x)$)
$$S_b(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu_1(t)dt} = 1 - e^{-\int_0^x \frac{1}{120}tdt} = 1 - e^{-\frac{1}{140}x^2}$$

13. Fungsi distribusi pelayanan pada waktu *vacation*. ($S_v(x)$)
$$S_v(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu_0(t)dt} = 1 - e^{-\int_0^x 0dt} = 1 - 1 = 0$$

14. Transformasi Laplace fungsi distribusi pelayanan pada waktu *vacation*. $S_v^*(\theta)$

$$S_v^*(\theta) = \int_0^\infty e^{-0x} S_v'(x)dx = \int_0^{120} e^{-31x}(0) = 0$$

15. Nilai $\beta = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dS_v(x)$

$$\beta = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dS_v(x) = \int_0^{120} 0.4xe^{-0.4x}(0)dx = 0$$

16. Nilai $b^{(2)} = \int_0^{120} x^2 dS_b(x)$

$$b^{(2)} = \int_0^{120} x^2 dS_b(x) = \int_0^{120} x^3 (\frac{1}{70} e^{-\frac{1}{140}x^2} dx = 140$$

Maka selanjutnya nilai $E(L)$

$$\begin{aligned} E(L) &= \frac{\lambda+\theta}{\theta} + \frac{\lambda^2 b^{(2)}}{2(1-\rho)} - \frac{(1-\rho)(\lambda+\theta) + (\lambda+\rho\theta)\beta}{\theta(1-\rho) + (\lambda+\rho\theta)[1 - S_v * (\theta)]} \\ & -\frac{\theta\lambda^2 S_v * (\theta) b^{(2)}}{2\{\theta(1-\rho) + (\lambda+\rho\theta)[1 - S_v * (\theta)]\}} \\ &= \frac{0.4+31}{31} + \frac{0.4^2 \times 140}{2(1-0.4)} \\ & -\frac{(1-0.4)(0.4+31) + (0.4+0.4\times 31)0}{31(1-0.4) + (0.4+0.4\times 31)[1-0]} \\ & -\frac{31 \times 0.4^2 \times 0 \times 140}{2\{31(1-0.4) + (0.4+0.4\times 31)[1-0]\}} \\ &= 19.67 \approx 20 \text{ unit} \end{aligned}$$

Maka, rata-rata banyaknya bus dalam sistem antrian (bus yang sedang dilayani dan yang sedang mengantri dalam sistem) adalah 20 unit bus.

3.3.2 Ekspektasi Waktu Tunggu dalam Sistem Antrian

$$
\begin{aligned}
E(W) &= \frac{E(L)}{\lambda E(X)} \\
&= \frac{1}{\lambda E(X)} \times E(L) \\
&= \frac{1}{0.4 \times 1} \times 20 \\
&= 50 \approx 50 \text{ menit}
\end{aligned}
$$

Maka, rata-rata waktu tunggu bus (waktu yang dihabiskan 1 unit bus dalam sistem antrian adalah 50 menit)

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Distribusi panjang antrian pelanggan dalam sistem antrian M/G/1 dengan *Working Vacation* (dalam bentuk PGF) adalah

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \frac{\theta(1-\rho)}{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]} \times \\
&\Bigg[\frac{(\lambda+\theta)(1-z)S_b^*(\lambda(1-z))}{[S_b^*(\lambda(1-z))-z][\lambda(1-z)+\theta]} \\
&\frac{-zS_v^*(\lambda(1-z)+\theta)\{\lambda(1-z)+\theta[1-S_b^*(\lambda(1-z))]\}}{[S_b^*(\lambda(1-z))-z][\lambda(1-z)+\theta]}\Bigg]
\end{aligned}
$$

2. Ekspektasi banyaknya pelanggan dalam sistem $E(L)$ (rata rata banyaknya pelanggan yang berada dalam sistem pada kondisi *Steady State*) pada model M/G/1 dengan *Working Vacation* dapat ditentukan melalui formula:

$$
\begin{aligned}
E(L) &= \frac{\lambda+\theta}{\theta}+\frac{\lambda^2 b^{(2)}}{2(1-\rho)}-\frac{(1-\rho)(\lambda+\theta)+(\lambda+\rho\theta)\beta}{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]} \\
&-\frac{\theta\lambda^2 S_v^*(\theta)b^{(2)}}{2\{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]\}}
\end{aligned}
$$

3. Ekspektasi Waktu tunggu pelanggan dalam sistem $E(W)$ (rata rata waktu yang dihabiskan pelanggan selama berada di dalam sistem pada kondisi *Steady State*) pada model M/G/1 dengan *Working Vacation* dapat diten-

tukan melalui formula:

$$
\begin{aligned}
E(W) &= \frac{\lambda+\theta}{\theta\lambda E(X)} + \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)E(X)} \\
&\quad - \frac{(1-\rho)(\lambda+\theta)+(\lambda+\rho\theta)\beta}{\lambda E(X)[\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]]} \\
&\quad - \frac{\theta\lambda^2 S_v^*(\theta)b^{(2)}}{2\lambda E(X)\{\theta(1-\rho)+(\lambda+\rho\theta)[1-S_v^*(\theta)]\}}
\end{aligned}
$$

4.2 Saran

- Menerapkan model *Working Vacation* pada model antrian selain M/M/1 dan M/G/1.
- Melengkapi karakteristik antrian M/G/1 dengan *Working Vacation* dengan analisis banyaknya pelanggan dalam antrian, waktu tunggu pelanggan dalam antrian dan menambahkan model biaya dalam sistem.
- Menerapkan disiplin antrian selain *First In First Out* (FIFO) seperti *Last In First Out* (LIFO), *Service In Random Order* (SIRO) atau *Priority Service* (PRI).

DAFTAR PUSTAKA

Cooper, R.B. 1981. *Introduction to Queueing Theory second edition.* New York: Elsevier North Holland, Inc

Devianto, D. dan Z.A. Ersyad. 2012. Identifikasi Model Antrian Pada Antrian Bus Kampus Universitas Andalas Padang. *Jurnal Matematika UNAND.* 1(2): 44-51

Doshi, B.T. 1986. Queueing Systems with vacation-A survey. *Queueing syst. I.* pp 29-66

Hogg, R.V. dan A.T. Craig. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics.* New Jersey: Prentice Hall

Kurniawati, E.N. dan R. Subekti. 2012. Pemodelan Antrian Multiserver dengan Multitask Server Menggunakan Vacation Queueing Model. *Prosiding : Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNY.* Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY, Yogyakarta, Indonesia. pp 77-88

Li,J, N. Tian, Z.G. Zhang. 2009. Analysis of the M/G/1 queue with exponentially working vacation-a matrix analytic approach. *Queueing syst.* pp 139-166

Nugroho, A. 2009. *Teori Antrian Markovian: Pendekatan Praktis.* Jakarta: Universitas Trisakti

Purnawan, D., P. Hendikawati, M.A. Muslim. 2013. Analisis Model Antrian Perbaikan Sepeda Motor dengan Menggunakan Program Visual Basic. *UNNES Journal of Mathematics*. 2(1): 39-45

Ross, S.M. 2010. *Introduction to Probability Models 10th edition*. USA: Elsevier

Ross, S.M. 2010. *Introduction to Probability Models 2nd edition*. Berkeley: John Wiley & Sons, Inc

Zhang, M. dan Z. Hou. 2010. Performance analysis of M/G/1 queue with working vacation and vacation interruption. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 234: 2977-2985

LEMBAR PENGESAHAN

Dengan ini saya mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta

Nama	:	Indah Hoirunnisah
No. Registrasi	:	3125110094
Program Studi	:	Matematika
Judul	:	Analisis Model Antrian M/G/1 dengan *Working Vacation*

Menyatakan bahwa skripsi ini telah siap diajukan untuk sidang skripsi.

Menyetujui,

Dosen Pembimbing I

Ir. Fariani Hermin, MT
NIP. 19600211 198703 2 001

Dosen Pembimbing II

Vera Maya Santi, M.Si
NIP. 19790531 200501 2 006

Mengetahui,

Koordinator Program Studi Matematika

Dr. Lukita Ambarwati, S.Pd, M.Si.
NIP. 19721026 200112 2 001

LAMPIRAN-LAMPIRAN

1. Antrian Bus Kampus Universitas Andalas di terminal Pasar Baru

Kedatangan Bus ke-	Waktu Kedatangan	Waktu Keberangkatan
1	06:40:00	06:50:00
2	06:45:00	06:48:00
3	06:45:00	06:55:00
4	07:05:00	07:07:00
5	07:05:00	07:10:00
6	07:10:00	07:13:00
7	07:10:00	07:15:00
8	07:15:00	07:16:00
9	07:15:00	07:16:30
10	07:15:00	07:18:00
11	07:15:00	07:20:10
12	07:20:00	07:21:00
13	07:20:00	07:23:00
14	07:20:00	07:25:00
15	07:25:00	07:28:05
16	07:28:00	07:30:07
17	07:30:00	07:32:00
18	07:30:00	07:32:50
19	07:30:00	07:34:00
20	07:30:00	07:35:00
21	07:30:00	07:35:57
22	07:33:00	07:37:10
23	07:35:00	07:38:00
24	07:37:00	07:39:00
25	07:40:00	07:41:00
26	07:40:00	07:42:00
27	07:40:00	07:43:00
28	07:40:00	07:43:50
29	07:40:00	07:44:30
30	07:42:00	07:45:10

Kedatangan Bus ke-	Waktu Kedatangan	Waktu Keberangkatan
31	07:42:00	07:46:00
32	07:45:00	07:46:40
33	07:46:00	07:47:10
34	07:46:00	07:48:00
35	07:47:00	07:49:00
36	07:48:00	07:51:00
37	07:50:00	07:52:00
38	07:50:00	07:53:15
39	07:50:00	07:54:00
40	07:50:00	07:54:30
41	07:50:00	07:55:20
42	07:53:00	07:56:00
43	07:55:00	07:57:00
44	07:56:00	07:57:40
45	07:57:00	07:58:00
46	07:57:00	07:59:00
47	07:58:00	07:59:30
48	07:58:00	08:00:00

Tabel 4.1: Antrian Bus Kampus Universitas Andalas di terminal Pasar Baru Padang (pukul 06.00-08.00 WIB), Jurnal Matematika Universitas Andalas

2. Data waktu terjadinya *vacation*

Vacation ke-	Waktu vacation	Durasi vacation
1	06:00:00 - 06:50:00	50 menit
2	06:55:00 - 07:07:00	12 menit

Tabel 4.2: Waktu *Vacation* Bus Kampus Universitas Andalas di terminal Pasar Baru Padang (pukul 06.00-08.00 WIB), Jurnal Matematika Universitas Andalas

3. Uji Kesesuaian Distribusi Eksponensial pada waktu antar kedatangan Bus Kampus Universitas Andalas

   H_0 = Waktu kedatangan antar bus berdistribusi Eksponensial

   H_1 = Waktu kedatangan antar bus tidak berdistribusi Eksponensial

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Wak-tu_Kedatangan
N		23
Exponential parameter.[a,b]	Mean	0:03:23
Most Extreme Differences	Absolute	.255
	Positive	.185
	Negative	-.255
Kolmogorov-Smirnov Z		1.225
Asymp. Sig. (2-tailed)		.100

a. Test Distribution is Exponential.

b. Calculated from data.

Berdasarkan hasil uji dengan bantuan *software SPSS*, diperoleh taraf signifikansi $> \alpha(0.05)$, maka waktu antar kedatangan bus berdistribusi Eksponensial.

4. Uji Kesesuaian Distribusi Eksponensial pada waktu pelayanan Bus Kampus Universitas Andalas

   H_0 = Waktu pelayanan antar bus berdistribusi Eksponensial

   H_1 = Waktu pelayanan antar bus tidak berdistribusi Eksponensial

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Wak-tu_Pelayanan
N		47
Exponential parameter.[a,b]	Mean	0:01:35
Most Extreme Differences	Absolute	.249
	Positive	.150
	Negative	-.249
Kolmogorov-Smirnov Z		1.709
Asymp. Sig. (2-tailed)		.006

a. Test Distribution is Exponential.

b. Calculated from data.

Berdasarkan hasil uji dengan bantuan *software SPSS*, diperoleh taraf signifikansi $< \alpha(0.05)$, maka waktu pelayanan bus tidak berdistribusi Eksponensial.

5. Uji Kesesuaian Distribusi Eksponensial pada waktu *vacation* Bus Kampus Universitas Andalas

   H_0 = Waktu *vacation* antar bus berdistribusi Eksponensial

   H_1 = Waktu *vacation* antar bus tidak berdistribusi Eksponensial

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Vacation
N		2
Exponential parameter.[a,b]	Mean	0:31:00
Most Extreme Differences	Absolute	.321
	Positive	.199
	Negative	-.321
Kolmogorov-Smirnov Z		.454
Asymp. Sig. (2-tailed)		.986

a. Test Distribution is Exponential.

b. Calculated from data.

Berdasarkan hasil uji dengan bantuan *software SPSS*, diperoleh taraf signifikansi > $\alpha(0.05)$, maka waktu *vacation* bus berdistribusi Eksponensial.

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama	:	Indah Hoirunnisah
No. Registrasi	:	3125110094
Program Studi	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul "**Analisis Model Antrian M/G/1 dengan *Working Vacation***" adalah :

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, 11 Februari 2017

Yang membuat pernyataan

Indah Hoirunnisah

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

INDAH HOIRUNNISAH. Lahir di Jakarta, 01 Agustus 1993. Anak keempat dari pasangan Alm. Bapak Suparman dan Ibu Tiah Binti Muhamad. Saat ini bertempat tinggal di Jalan Manunggal Bhakti, RT 004 RW 011 Nomor 42, Kalisari, Pasar Rebo, Jakarta Timur, 13790.

No. Ponsel	:	085710142636
Email	:	hoirunnisah@gmail.com

Riwayat Pendidikan : Penulis mengawali pendidikan di SDN Kalisari 10 Petang pada tahun 1999 - 2005. Setelah itu, penulis melanjutkan ke SMPN 179 Jakarta hingga tahun 2008. Kemudian kembali melanjutkan ke SMAN 39 Jakarta hingga lulus tahun 2011. Di Tahun yang sama penulis melanjutkan ke Universitas Negeri Jakarta (UNJ), program studi Matematika, melalui jalur SNMPTN Undangan.

Riwayat Organisasi : Selama di bangku perkuliahan, penulis aktif di berbagai organisasi kemahasiswaaan. Dua tahun pertama, penulis aktif di Lembaga Legislatif Mahasiswa Matematika UNJ (LLMJ Matematika UNJ) dan Badan Perwakilan Mahasiswa FMIPA UNJ (BPM FMIPA UNJ). Memasuki tahun ketiga, penulis mulai bergabung di Majelis Tinggi Mahasiswa UNJ (MTM UNJ) sebagai staf Badan Legislasi MTM UNJ hingga 2015.

Riwayat Pekerjaan : Penulis mulai menjadi pengajar matematika sejak tahun 2012. Pada tahun 2016, penulis menjadi guru matematika di SMK Hang Tuah 1 Jakarta.