BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Ruang Probabilitas

Definisi 2.1.1. Misal $\mathcal{F}$ koleksi subhimpunan dari Ω. $\mathcal{F}$ disebut aljabar-σ jika:

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$
2. Jika $A \in \mathcal{F}$ maka $A^c \in \mathcal{F}$
3. Jika $(A_n) \in \mathcal{F}$ maka $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n) \in \mathcal{F}$

Definisi 2.1.2. Diberikan $\mathcal{F}$ aljabar-σ pada Ω. Fungsi $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ disebut ukuran jika memenuhi:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(A) \geq 0$ untuk setiap $A \in \mathcal{F}$
3. Jika $A_j \in \mathcal{F}$ merupakan barisan himpunan yang saling lepas, maka
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Definisi 2.1.3. Diberikan $\mathcal{F}$ aljabar-σ pada Ω. Fungsi $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ disebut ukuran probabilitas jika memenuhi:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ dan $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Jika $A_j \in \mathcal{F}$ merupakan barisan himpunan yang saling lepas, maka
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$$

Definisi 2.1.4. Diberikan Ω himpunan tak kosong, $\mathcal{F}$ aljabar-σ pada Ω, dan $\mathbb{P}$ ukuran probabilitas pada $\mathcal{F}$.

1. $(\Omega, \mathcal{F})$ disebut ruang terukur

2. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ disebut ruang probabilitas

Ruang probabilitas ialah ruang ukuran $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dimana $\mu(\Omega) = 1$

Definisi 2.1.5. Diberikan ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Suatu kejadian $F \in \mathcal{F}$ dikatakan hampir pasti (*almost surely*) bila

$$\mathbb{P}(F) = 1$$

Definisi 2.1.6. ($\sigma(\mathcal{C})$, aljabar-σ yang dibangkitkan oleh $\mathcal{C}$) Misal $\mathcal{C}$ adalah kelas dari sub-himpunan dari Ω. Pengertian aljabar-σ yang dibangkitkan oleh $\mathcal{C}$ dan dinyatakan dengan $\sigma(\mathcal{C})$ adalah aljabar-σ terkecil pada Ω dengan $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$.

Definisi 2.1.7. (aljabar-σ Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) Misal $\mathbb{R}$ adalah himpunan seluruh riil. Aljabar-σ Borel pada $\mathbb{R}$ adalah aljabar-σ yang dibangkitkan oleh famili selang terbuka pada $\mathbb{R}$ dan dinyatakan dengan $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ atau

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\text{selang-selang buka di } \mathbb{R})$$

Catatan: Setiap himpunan yang merupakan unsur dari $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ akan disebut himpunan Borel.

2.1.1 Variabel Acak

Definisi 2.1.8. Misal $(\Omega, \mathcal{F})$ ruang terukur. Misal f fungsi bernilai riil yang didefinisikan pada Ω. Fungsi f disebut fungsi terukur relatif tehadap $\mathcal{F}$ jika $\{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\} \in \mathcal{F}$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$

Misal $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ adalah suatu ruang probabilitas. Maka $X : \Omega \to \mathbb{R}$ adalah variabel acak jika X terukur relatif terhadap $\mathcal{F}$. Fungsi distribusi kumulatif atau fungsi distribusi F untuk variabel acak X, adalah

$$F(b) = \mathbb{P}\{X \leq b\}, \ -\infty < b < \infty$$

Variabel acak X diskrit apabila banyaknya nilai x dari variabel acak X dapat dicacah. Fungsi massa peluang $p(x)$ untuk variabel acak diskrit X adalah

$$p(x) = \mathbb{P}\{X = x\} \geq 0$$

dengan

$$\sum_x p(x) = 1$$

Definisi 2.1.9. Himpunan pasangan terurut $(x, p(x))$ merupakan suatu fungsi peluang, fungsi massa peluang, atau distribusi peluang peubah acak diskrit X bila, untuk setiap kemungkinan hasil X

1. $p(x) \geq 0$
2. $\sum_x p(x) = 1$
3. $\mathbb{P}(X = x) = p(x)$

Variabel acak X merupakan variabel acak kontinu apabila terdapat fungsi non-negatif f yang terdefinisi pada semua bilangan riil $x \in (-\infty, \infty)$, dengan fungsi kepadatan peluang:

$$\mathbb{P}\{X \in B\} = \int_B f(x)dx$$

untuk setiap $B \in \mathbb{R}$.

Peluang X terdapat di B diperoleh dengan mengintegralkan fungsi kepadatan peluang terhadap himpunan B, yaitu:

$$1 = \mathbb{P}\{X \in (-\infty, \infty)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

sehingga apabila $B = [a, b]$ maka

$$\mathbb{P}\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx$$

Definisi 2.1.10. Fungsi $f(x)$ adalah fungsi kepadatan peubah acak kontinu X, yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$, bila

1. $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

Definisi 2.1.11. (Fungsi Konveks) Misal $f(x)$ fungsi bernilai riil yang terdefinisi pada interval $I = [a, b]$. Fungsi f disebut konveks jika untuk setiap $x_1, x_2, \in [a, b]$ dan $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Teorema 2.1.1. Misalkan I interval terbuka dan $f : I \to \mathbb{R}$ mempunyai turunan kedua pada I. Maka, f konveks pada I jika dan hanya jika $f''(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in I$.

Bukti. Misalkan f konveks pada I. Untuk setiap $c \in I$,

$$f''(c) = \lim_{h\to} 0 \frac{f(c + h) - 2f(c) + f(c - h)}{h^2}$$

Pilih h cukup kecil sedemikian sehingga $c - h$ dan $c + h$ terdapat di I. Maka, $c = \frac{1}{2}[(c + h) + (c - h)]$, sehingga

$$f(c) = f\left(\frac{1}{2}(c + h) + \frac{1}{2}(c - h)\right) \leq \frac{1}{2}f(c + h) + \frac{1}{2}f(c - h).$$

Akibatnya, $f(c+h)-2f(c)+f(c-h) \geq 0$. Karena $h^2 > 0$ untuk setiap $h \neq 0$, dapat disimpulkan bahwa $f''(c) \geq 0$.

Sebaliknya, misalkan $f''(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in I$. Untuk membuktikan bahwa f konveks pada I, ambil $x_1, x_2 \in I$ dan $0 < t < 1$, dan misalkan $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$. Berdasarkan teorema Taylor (lihat Purcell halaman 57), terdapat ξ_1 di antara x_0 dan x_1 sedemikian sehingga

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} f''(\xi_1)$$

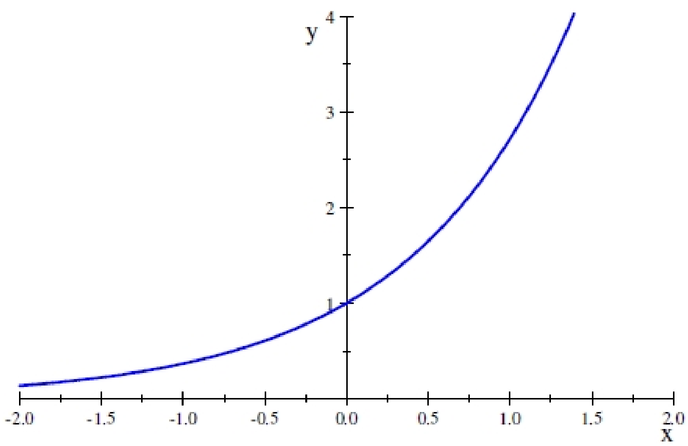
dan juga terdapat ξ_2 di antara x_0 dan x_2 sedemikian sehingga

$$f(x_2) = f(x_0) + (x_2 - x_0)f'(x_0) + \frac{(x_2 - x_0)^2}{2} f''(\xi_2).$$

Perhatikan bahwa $(1-t)(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0) = (1-t)x_1 + tx_2 - x_0 = 0$ dan $E := (1-t)\frac{(x_1-x_0)^2}{2} f''(\xi_1) + t\frac{(x_2-x_0)^2}{2} f''(\xi_2) \geq 0$. Akibatnya,

$$(1-t)f(x_1) + tf(x_2) = f(x_0) + E \geq f(x_0) = f((1-t)x_1 + tx_2)$$

$\square$



Gambar 2.1: Fungsi Konveks $y = e^x$

Teorema 2.1.2. (Pertidaksamaan Jensen) Misal $f(x)$ merupakan fungsi konveks yang terdefinisi pada interval I. Jika $x_1, x_2, \cdots, x_N \in I$ dan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$

≥ 0 dengan $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f(x_i)$$

Bukti. Jika $f(x)$ adalah fungsi konveks dan $X \in \{x_i : 1, 2, \cdots, N\}$ adalah variabel acak dengan peluang $\mathbb{P}(x_i)$ dimana $\sum \mathbb{P}(x_i) = 1$, maka

$$\begin{aligned} f(E(X)) &\leq E(f(x)) \\ f\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \mathbb{P}(x_i)\right) &\leq \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\mathbb{P}(x_i) \end{aligned}$$

dengan menggunakan induksi, misalkan $N = 1$ maka

$$f(x_1\mathbb{P}(x_1)) \leq f(x_1)\mathbb{P}(x_1)$$

benar. Apabila $N = 2$ maka

$$f(x_1\mathbb{P}(x_1) + (x-2)\mathbb{P}(x_2)) \leq f(x_1)\mathbb{P}(x_1) + f(x_2)\mathbb{P}(x_2)$$

benar menurut definisi fungsi konveks. Anggap bahwa teorema berlaku untuk $N = k - 1$. Misalkan $\mathbb{P}^{'}(x_i) = \mathbb{P}(x_i)/(1 - \mathbb{P}(x_k))$ untuk $i = 1, 2, \cdots, k-1$, maka

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\mathbb{P}(x_i) &= \sum_{i=1}^{k-1} f(x_i)\mathbb{P}(x_i) + f(x_k)\mathbb{P}(x_k) \\ &= (1 - \mathbb{P}(x_k)) \sum_{i=1}^{k-1} f(x_i)\mathbb{P}^{'}(x_i) + f(x_k)\mathbb{P}(x_k) \\ &\geq (1 - \mathbb{P}(x_k)) f\left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i \mathbb{P}^{'}(x_i)\right) + f(x_k)\mathbb{P}(x_k) \\ &\geq f\left((1 - \mathbb{P}(x_k)) \sum_{i=1}^{k-1} x_i \mathbb{P}^{'}(x_i) + x_k \mathbb{P}(x_k)\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i \mathbb{P}(x_i) + x_k \mathbb{P}(x_k)\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{k} x_i P(x_i)\right) \end{aligned}$$

$\square$

Definisi 2.1.12. (Fungsi Karakteristik) Misalkan E adalah sebuah himpunan terukur dan $A \subseteq E$. Fungsi karakteristik untuk himpunan A yaitu $\chi_A : E \to \{0,1\}$ yang didefinisikan dengan,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \in A \\ 0 & \text{jika } x \notin A \end{cases}$$

Definisi 2.1.13. (Fungsi Sederhana) Misalkan E adalah sebuah himpunan terukur, A_k dengan $k = 1, 2, 3, \cdots, m$ adalah subset-subset dari E yang saling lepas dengan $\bigcup_{k=1}^{m} A_k = E$ dan misalkan a_k adalah bilangan riil berbeda yang berhingga banyaknya. Sebuah fungsi sederhana $s : E \to (-\infty, \infty)$ didefinisikan dengan

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{A_k}$$

Contoh 2.1.1. Misalkan diberikan interval tertutup dan terbatas $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Untuk $j = 1, 2, 3, \cdots, n$, misalkan $I_j = [x_{j-1}, x_j)$ sedemikian sehingga $\cup_{j=1}^{n} I_j = [a, b]$ dan misalkan juga c_j adalah suatu bilangan real tak negatif. Jika X_{I_j} adalah fungsi karakteristik untuk masing-masing interval I_j maka hasil jumlah

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{I_j}(x)$$

adalah sebuah fungsi tangga yang juga merupakan fungsi sederhana karena masing-masing subinterval I_j adalah terukur. Selanjutnya, ambil dua buah interval $[0, 1]$ dan $(1, 2]$, jika

$$s(x) = 2\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) + 3\chi_{\mathbb{Q}\cap(1,2]}(x),$$

maka s adalah sebuah fungsi sederhana sebab interval $[0, 1]$ dan $(1, 2)]$ terukur dan s hanya memiliki berhingga buah nilai yang berbeda, namun s bukan merupakan fungsi tangga.

Teorema 2.1.3. Misalkan $f : E \to [0, \infty]$ adalah sebuah fungsi terukur. Terdapat barisan fungsi sederhana (s_n) yang terukur pada E sedemikian sehingga

1. $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$.
2. $(s_n(x)) \to f(x)$ ketika $n \to \infty$, untuk setiap $x \in E$.

Bukti. Misalkan diberikan sebuah fungsi terukur $f : E \to [0, \infty]$, akan ditunjukkan bahwa terdapat barisan dari fungsi-fungsi sederhana yang memenuhi kondisi di atas. Untuk $n \in \mathbb{N}$ dan $1 \leq i \leq n2^n$, partisikan $[0, \infty]$ ke dalam subinterval-subinterval yang tidak saling tumpang tindih $I_{n,i}$ oleh

$$I_{n,i} = \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$$

Kemudian definisikan juga

$$E_{n,i} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right) \text{ dan } F_n = f^{-1}([n, \infty)).$$

Definisikan fungsi sederhana s_n pada E dengan

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}$$

Sehingga s_n adalah fungsi sederhana yang terukur untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, karena $E_{n,i}$ dan F_n masing-masing adalah himpunan terukur. Sedangkan ambil sebarang $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n \leq m$, perhatikan bahwa,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n} \leq \sum_{i=1}^{2^m} \chi_{m,i} + m\chi_{F_m} = s_m$$

sehingga (s_n) monoton naik. Selanjutnya jika $f(x) < \infty$, yaitu misalkan $f(x) \leq K$ di mana K adalah konstanta riil positif. Karena $f(x) \leq K$, terdapat bilangan asli terkecil n_0 di mana $K < n_0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in E$ berlaku

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n_0 2^{n_0}} E_{n_0 i}.$$

Maka untuk setiap $x \in E$ dan $n \in \mathbb{N}$ di mana $n \geq n_0$, terdapat $i \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \Leftrightarrow 0 \leq f(x) - \frac{i-1}{2^n} < \frac{1}{2^n}.$$

Misalkan diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat $n_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|f(x) - s_n(x)| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq n_1 \geq n_0$ dan untuk setiap $x \in E$. Jika $f(x) = \infty$, maka definisikan $s_n(x) = n$, sehingga $\lim_{n\to\infty}(s_n(x)) = \infty$. $\square$

Definisi 2.1.14. (Independen) Misal $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ adalah ruang ukuran maka:

1. Koleksi aljabar-σ $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ dikatakan independen apabila $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2, ..., A_n \in \mathcal{F}_n$, maka

$$\mathbb{P}(\cap_{j=1}^n A_j) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)$$

2. Koleksi variabel acak $\{X_j : 1 \leq j \leq n\}$ dikatakan independen jika untuk setiap himpunan Borel $\{B_j : 1 \leq j \leq n\}$ di $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, ..., X_n \in B_n\} = \mathbb{P}\{\cap_{j=1}^n (X_j \in B_j)\} = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}\{X_j \in B_j\}$$

3. Koleksi dari subhimpunan terukur $A_1, A_2, ..., A_n$ dalam suatu aljabar-σ $\mathcal{F}$ adalah independen jika untuk setiap subhimpunan $I \subset \{1, 2, ..., n\}$

$$\mathbb{P}\left\{\bigcap_{j\in I}(A_j)\right\} = \prod_{j\in I} \mathbb{P}\{A_j\}$$

2.2 Proses Stokastik

Proses stokastik adalah suatu keluarga variabel acak $\{X(t)\}$ dengan $t \in T$ dan $T \subset \mathbb{R}$. Bila $T = \{1, 2, ...\}$ maka $\{X(t)\}$ adalah proses stokastik dalam waktu diskrit, sementara apabila $T = [0, \infty)$ maka $\{X(t)\}$ adalah proses stokastik dalam waktu kontinu.

Proses stokastik kontinu $\{X(t), t \in T\}$ memiliki sifat *independent increment* jika variabel-variabel acak $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1)$, $\cdots$, $X(t_n) - X(t_{n-1})$ independen untuk setiap $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ dan memiliki sifat *stationary increment* jika $X(t+s) - X(t)$ mempunyai distribusi yang sama untuk semua t.

2.2.1 Proses Poisson

Proses Counting

Definisi 2.2.1. (Proses *Counting*) Proses stokastik $N(t), t \geq 0$ dinamakan proses *counting* jika $N(t)$ menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi sampai waktu t dan memenuhi:

(i) $N(t) \geq 0$;

(ii) $N(t)$ adalah bilangan bulat;

(iii) Jika $s < t$, maka $N(s) \leq N(t)$;

(iv) Jika $s < t, N(t) - N(s)$ menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi pada interval $(s, t]$

Contoh 2.2.1. Jika dimisalkan $N(t)$ sebagai jumlah pelanggan yang memasuki suatu toko pada atau sebelum waktu t, maka $\{N(t), t \geq 0\}$ adalah proses *counting* terhadap kejadian pelanggan memasuki toko. Apabila dimisalkan $N(t)$ sebagai jumlah pelanggan yang berada di dalam toko pada waktu t, maka $\{N(t), t \geq 0\}$ bukan proses *counting*.

Proses Poisson

Definisi 2.2.2. Suatu proses *counting* $N(t), t \geq 0$ merupakan proses Poisson dengan *rate* $\lambda, \lambda > 0$, jika

(i) $N(0) = 0$;

(ii) Proses $\{N(t), t \geq 0\}$ memenuhi inkremen bebas (*independent increment*);

(iii) Banyaknya kejadian pada sebarang interval waktu dengan panjang t adalah terdistribusi Poisson dengan *mean* λt. Sehingga, untuk semua $s, t \geq 0$

$$\mathbb{P}\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, ... \tag{2.1}$$

2.2.2 Rantai Markov Waktu Diskrit (Homogen)

Barisan variabel acak disebut membentuk rantai Markov apabila, setiap kali sistem berada pada *state* i, maka terdapat peluang, dinotasikan dengan P_{ij}, bahwa selanjutnya sistem akan berada di *state* j. Sehingga, untuk semua $i_0, \cdots, i_{n-1}, i, j$,

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0] = P_{ij} \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) dapat diinterpretasikan bahwa probabilitas bersyarat sebarang *state* X_{n+1} diberikan *state* yang lampau $X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}$ dan *state* sekarang X_n, independen dari *state* yang lampau dan hanya bergantung pada *state* sekarang.

Nilai P_{ij}, $0 \leq i \leq M$, $0 \leq j \leq N$, disebut probabilitas transisi dari rantai Markov, menyatakan bahwa proses yang sekarang berada di *state* i akan berpindah ke *state* j pada waktu berikutnya. Probabilitas transisi P_{ij} bernilai non-negatif dan proses selalu berpindah dari satu *state* ke *state* lain sehingga

$$P_{ij} \geq 0 \qquad \sum_{j=0}^{M} P_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, \cdots, M.$$

Kondisi pada persamaan (2.2) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} & E[f(X_{n+1}=j)|X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, \cdots, X_1=i_1, I_0=i_0] \\ = \; & E[f(X_{n+1}=j)|X_n=i] = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} f(j) \end{aligned}$$

Rantai Markov dapat direpresentasikan dalam suatu matriks peluang transisi atau matriks stokastik

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0M} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{M0} & P_{M1} & \cdots & P_{MM} \end{pmatrix}$$

Contoh 2.2.2. Misalnya diketahui X_k merupakan keadaan mesin pada hari ke-k. Definisikan:

$$X_k = \begin{cases} 0 & ; \text{ mesin dalam keadaan rusak} \\ 1 & ; \text{ mesin dalam keadaan baik} \end{cases}$$

Sehingga diketahui bahwa $S = \{0, 1\}$ untuk setiap X_k. Pada suatu hari, mesin dapat dalam keadaan rusak atau baik. Seandainya pada hari ke-k diketahui rusak, maka peluang pada hari itu mesin dapat diperbaiki (sehingga pada hari berikutnya mesin dalam keadaan baik) adalah misal p, atau $\mathbb{P}(X_{k+1} = 1|X_k = 0) = p$. Sedangkan jika pada hari ke-k mesin diketahui baik, maka peluang hari berikutnya dalam keadaan rusak adalah misal q, atau $\mathbb{P}(X_{k+1} = 0|X_k = 1) = q$. Sehingga matriks peluang transisinya adalah

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Peluang Keadaan Tetap *(Steady-state)*

Misalkan matriks probabilitas transisi $P = |P_{ij}|$ pada *states* hingga $0, 1, \cdots,$ N memiliki sifat bahwa ketika dinaikkan ke suatu pangkat k, matriks P^k memiliki elemen yang semuanya bernilai positif. Matriks probabilitas transisi seperti itu disebut *regular*. Fakta paling penting mengenai rantai Markov *regular* adalah terdapatnya distribusi probabilitas terbatas atau *limiting probability distribution* $\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_N)$, dimana $\pi_j > 0$ untuk $j = 0, 1, \cdots, N$ dan $\sum_j \pi_j = 1$, dan distribusi ini tidak bergantung pada keadaan awal. Untuk matriks probabilitas transisi *regular* $P = |P_{ij}|$ memiliki konvergensi

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j > 0 \quad \text{untuk } j = 0, 1, \cdots, N.$$

atau, dalam bentuk rantai Markov $\{X_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = j | X_0 = i\} = \pi_j > 0 \quad \text{untuk } j = 0, 1, \cdots, N.$$

Konvergensi tersebut mengartikan bahwa, pada jangka panjang atau *long run* ($n \to \infty$), probabilitas dalam menemukan rantai Markov di *state* j adalah π_j, tidak masalah pada *state* apa rantai tersebut mulai pada waktu 0.

Teorema 2.2.1. Misal P adalah matriks probabilitas transisi pada *states* $0, 1, \cdots, N$. Maka distribusi terbatas (*limiting distributions*) $\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_N)$ adalah solusi nonnegatif yang unik dari persamaan

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{N} \pi_k P_{kj}, \quad j = 0, 1, \cdots, N, \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1. \tag{2.4}$$

Bukti. Karena rantai Markov *regular*, maka terdapat distribusi terbatas *(limiting distributions)*, $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$, dimana $\sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1$. Matriks P^n akan ditulis sebagai perkalian matriks $P^{n-1}P$ dalam bentuk

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{N} P_{ik}^{(n-1)} P_{kj}, \quad j = 0, \cdots, N, \tag{2.5}$$

lalu misalkan $n \to \infty$. Maka $P_{ij}^{(n)} \to \pi_j$, dan $P_{ik}^{(n-1)} \to \pi_k$, sehingga (2.5) berubah menjadi $\pi_j = \sum_{k=0}^{N} \pi_k P_{kj}$ seperti pada klaim.

Selanjutnnya akan ditunjukkan bahwa solusinya adalah unik. Misalkan $x_0, x_1, \cdots, x_N$, dimana

$$x_j = \sum_{k=0}^{N} x_k P_{kj}, \quad j = 0, \cdots, N \tag{2.6}$$

dan

$$\sum_{k=0}^{N} x_k = 1. \tag{2.7}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $x_j = \pi_j$. Pertama-tama, kalikan (2.6) sebelah kanan dengan P_{jl}, kemudian jumlahkan j sehingga

$$\sum_{j=0}^{N} x_j P_{jl} = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} x_k P_{kj} P_{jl} = \sum_{k=0}^{N} x_k P_{kl}^{(2)}. \tag{2.8}$$

Namun pada (2.6) diketahui bahwa $x_l = \sum_{k=0}^{N} x_j P_{jl}$, sehingga (2.8) menjadi

$$x_l = \sum_{k=0}^{N} x_k P_{kl}^{(2)} \quad \text{untuk } l = 0, \cdots, N.$$

Dengan mengulang argumen tersebut sebanyak n kali maka didapatkan

$$x_l = \sum_{k=0}^{N} x_k P_{kl}^{(n)} \quad \text{untuk } l = 0, \cdots, N.$$

Selanjutnya misalkan $n \to \infty$ sehingga $P_{kl}^{(n)} \to \pi_l$, maka

$$x_l = \sum_{k=0}^{N} x_k \pi_l, \quad l = 0, \cdots N.$$

Namun pada (2.7) diketahui bahwa $\sum_k x_k = 1$, sehingga $x_l = \pi_l$. □

2.2.3 Martingales

Definisi 2.2.3. (Filtrasi) Bila $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \cdots$ adalah keluarga subaljabar-σ dari $\mathcal{F}$ dengan sifat $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_3 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}$ maka keluarga tersebut dinamakan filtrasi.

Definisi 2.2.4. (Proses Teradaptasi) Proses stokastik $\{X(t)\}$ teradaptasi (*adapted*) oleh filtrasi $\{\mathcal{F}(t)\}$ bila $X(t)$ adalah $\mathcal{F}(t)$-terukur untuk semua $t \in T$.

Definisi 2.2.5. (Martingales) Proses stokastik $\{X(t)\}$ disebut Martingales bila memenuhi sifat berikut

1. $E(|X(t)|) < \infty$ untuk semua $t \in T$
2. $\{X(t)\}$ teradaptasi oleh filtrasi $\{\mathcal{F}(t)\}$
3. $E(X(t+1)|\mathcal{F}(t)) = X(t)$ hampir pasti.

Catatan:

1. Bila proses stokastik $\{X(t)\}$ memenuhi (1) dan (2) akan tetapi $E(X(t+1)|\mathcal{F}(t)) \leq X(t)$ maka $\{X(t)\}$ disebut **supermartingales**.
2. Bila proses stokastik $\{X(t)\}$ memenuhi (1) dan (2) akan tetapi $E(X(t+1)|\mathcal{F}(t)) \geq X(t)$ maka $\{X(t)\}$ disebut **submartingales**.

Contoh 2.2.3. Misal $X_1, X_2, \cdots$, adalah variabel acak saling bebas dengan $E[X_i] = 0, \ \ i = 1, 2, 3, \cdots$. Definisikan

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \ n = 1, 2, \cdots$$

Misal $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ merupakan aljabar-σ yang dibangkitkan oleh $X_1, X_2, \cdots$ (dengan $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$). Maka S_n adalah Martingale karena

$$\begin{aligned}
E[S_{n+1}|X_1, \cdots, X_n] &= E[X_{n+1} + S_n|X_1, \cdots, X_n] \\
&= E[X_{n+1}|X_1, \cdots, X_n] + S_n, \quad S_n \in \sigma(X_1, \cdots, X_n) \\
&= E[X_{n+1}] + S_n, \quad \mathcal{F}_n \text{ dan } X_{n+1} \text{ saling bebas} \\
&= S_n
\end{aligned}$$

Definisi 2.2.6. (*Stopping Time*) Suatu pemetaan $T : \Omega \to \{1, 2, \cdots \infty\}$ disebut *stopping time* jika

$$\{T = n\} = \{\omega \in \Omega : T(\omega) = n\} \in F_n$$

untuk semua $n \leq \infty$. T hampir pasti hingga jika $\mathbb{P}(\{T = \infty\}) = 0$

Contoh 2.2.4. Misal $X = \{X_t : t \geq 0\}$ suatu proses stokastik dan misal τ suatu waktu acak yang independen terhadap X, maka τ adalah *stopping time*, dimana $\{\tau = t\}$ tidak bergantung sama sekali pada X. Misalnya : sebelum berjudi, seorang penjudi memutuskan akan berhenti berjudi setelah 10 kali berjudi atau $\mathbb{P}(\tau = 10) = 1$. Contoh lainnya ialah misal setiap hari setelah melihat harga saham, seorang pengusaha akan menjentikkan sebuah koin. Pengusaha tersebut memutuskan untuk menjual sahamnya saat pertama kali koinnya menunjukkan kepala. Dalam hal ini, τ independen terhadap harga saham.

Misal suatu proses acak $X = \{X_n\}$ dan misalkan T suatu *stopping time*. Untuk setiap bilangan bulat positif dan untuk setiap $\omega \in \Omega$, definisikan

$$T \wedge n(\omega) = \min\{T(\omega), n\}.$$

sehingga dapat didefinisikan *stopped process*.

Definisi 2.2.7. *Stopped process* $X^T = \{X_n^T\}$ ialah

$$X_n^T(\omega) = X_{T\wedge n(\omega)}(\omega)$$

Teorema 2.2.2. (Martingale *Optional Stopping Theorem*) Misal $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ adalah ruang probabilitas, $\mathcal{F} = \{F_n\}$ adalah filtrasi pada Ω, dan $X = \{X_n\}$ adalah Martingale terhadap filtrasi $\mathcal{F}$. Misal T adalah *stopping time*. Andaikan bahwa salah satu dari kondisi di bawah ini berlaku:

1. Terdapat suatu bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $T(\omega) \leq N$ untuk semua $\omega \in \Omega$

2. Terdapat suatu bilangan riil positif K sedemikian sehingga

   $$|X_n(\omega)| < K$$

   untuk semua n dan semua $\omega \in \Omega$, dan T hampir pasti hingga.

3. $E(T) < \infty$ dan terdapat suatu bilangan riil positif K sedemikian sehingga

$$|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| < K$$

untuk semua n dan semua $\omega \in \Omega$

maka X_T terintegral dan

$$E(X_T) = E(X_0)$$

Bukti. Ingat bahwa T hampir pasti hingga sehingga X_T hampir pasti dan $X_{T\wedge n} \to X_T$ hampir pasti. Lebih jauh lagi, $X_{T\wedge n}$ terintegral untuk semua n dan $E(X_{T\wedge n}) = E(X_0)$.

Misal (1) berlaku. Maka untuk $n \geq N$, $T(\omega) \wedge n = T(\omega)$ untuk semua $\omega \in \Omega$. Oleh karena itu, $X_{T\wedge n} = X_T$ untuk $n \geq N$, dan X_T terintegral dengan

$$E(X_T) = E(X_{T\wedge N}) = E(X_0)$$

Sekarang misalkan (2) berlaku. Maka karena X_n terbatas maka

$$|X_{T\wedge n}(\omega)| < K$$

untuk semua n dan semua $\omega \in \Omega$ dan

$$X_{T\wedge n}(\omega) = X_0(\omega) + \sum_{k=1}^{T\wedge n(\omega)} X_k(\omega) - X_{k-1}(\omega)$$

untuk semua ω, sehingga apabila (3) berlaku

$$|X_{T\wedge n}(\omega)| \leq |X_0(\omega)| + \sum_{k=1}^{T\wedge n(\omega)} |X_k(\omega) - X_{k-1}(\omega)| \leq |X_0(\omega)| + KT(\omega).$$

X_0 terintegral dan $E(KT) = KE(T) < \infty$. Sehingga pada kasus (2) dan (3) terdapat $|X_{T\wedge n}|$ terbatas oleh suatu variabel acak yang terintegral, sehingga dengan menggunakan Teorema Dominasi Konvergen (lihat Capinski halaman 105):

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_{T\wedge n}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega X_T(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

yang ekuivalen dengan

$$\lim_{n\to\infty} E(X_{T\wedge n}) = E(X_T).$$

Karena $E(X_{T\wedge n}) = E(X_0)$ untuk semua n, maka $E(X_T) = E(X_0)$ □

2.3 Asuransi Kerugian

Asuransi merupakan suatu bentuk manajemen risiko dimana tertangung mengalihkan potensi kerugian kepada entitas lain dengan kompensasi moneter sebagai imbalannya. Asuransi diperlukan untuk melindungi diri terhadap kerugian keuangan yang signifikan. Asuransi memungkinkan individu, bisnis, dan entitas lain untuk melakukan proteksi terhadap potensi kerugian dan kesulitan finansial pada tingkat yang masih terjangkau.

Definisi 2.3.1. Menurut pasal 246 Kitab Undang-undang Hukum Perniagaan, asuransi atau pertanggungan adalah perjanjian, di mana penanggung mengikat diri terhadap tertanggung dengan memperoleh premi, untuk mendapatkan kepadanya ganti rugi karena suatu kehilangan, kerusakan, atau tidak mendapat keuntungan yang diharapkan, yang mungkin akan dapat diderita karena suatu peristiwa yang tidak pasti.

Perjanjian yang dibuat oleh perusahaan asuransi dengan peserta asuransi disebut polis asuransi. Perusahaan asuransi (penanggung) adalah suatu lembaga pengambil alih atau penerima risiko. Peserta asuransi (tertanggung) ialah individu atau organisasi yang melimpahkan risiko mereka kepada perusahaan asuransi, yang disebut sebagai pemegang polis. Dalam polis asuransi, terdapat perjanjian bahwa perusahaan asuransi akan memberikan jaminan yang besarnya sama atau kurang dari kerugian finansial yang dialami oleh pemegang polis, yang disebut sebagai klaim. Sebagai balasannya, pemegang polis akan membayar sejumlah uang kepada perusahaan asuransi, yang disebut sebagai premi. Selain premi, pemegang polis juga membayar suatu *loading* yang merupakan jumlah uang yang ditambahkan pada tarif premi dasar untuk menutupi biaya-biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan asuransi dalam mengamankan dan memelihara bisnis, atau jumlah presentase yang ditambahkan pada premi neto sebagai beban biaya. Premi dan *loading* yang dibayar oleh pemegang polis akan menjadi salah satu sumber pendapatan perusahaan asuransi.

Terdapat dua bentuk asuransi, yaitu asuransi jiwa dan asuransi kerugian namun yang akan dibahas dalam karya tulis ini adalah asuransi kerugian. Asuransi kerugian adalah asuransi selain asuransi jiwa. Asuransi kerugian bertanggung jawab untuk menetapkan kebijakan, regulasi dan pengawasan pada semua lini asuransi kecuali asuransi jiwa. Asuransi kerugian memberikan jasa dalam penanggulangan risiko atas kerugian, kehilangan manfaat, dan tanggung jawab hukum kepada pihak ketiga, yang timbul dari peristiwa yang tidak pasti. Asuransi kerugian meliputi antara lain asuransi properti, asuransi kendaraan bermotor, asuransi keuangan, dan asuransi kesehatan. Asuransi kesehatan termasuk asuransi asuransi perawatan jangka panjang, asuransi untuk menutupi biaya pengobatan, implan, kecelakaan individu, dan lain-lain.

2.4 Proses Risiko

Dalam proses risiko, surplus suatu perusahaan asuransi pada waktu $t > 0$ ditentukan oleh tiga kuantitas: jumlah surplus pada waktu 0, jumlah pendapatan premi yang diterima sampai waktu t, dan jumlah klaim yang dibayarkan sampai waktu t. Dari ketiga kuantitas tersebut, klaim merupakan satu-satunya yang bersifat acak. Sehingga pertama-tama akan dijelaskan mengenai proses klaim agregat yang dinotasikan dengan $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Misalkan $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ adalah proses *counting* untuk jumlah klaim. Sehingga untuk $t > 0$, variabel acak $N(t)$ menunjukkan jumlah klaim yang terjadi pada interval waktu $(0, t]$. Pada proses risiko klasik, diasumsikan bahwa $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ adalah proses Poisson.

Barisan $\{Y_i, i = 1, 2, 3, \cdots\}$ mewakili jumlah klaim ke-i, dimana Y_i merupakan variabel acak independen dan terdistribusi secara identik. Barisan Y_i mempunyai *mean* m dan variansi s^2. Sehingga, jumlah klaim agregat sampai waktu t, dinotasikan dengan $S(t)$, adalah

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

dimana apabila $S(t) = 0$ maka $N(t) = 0$. Selanjutnya, dapat dideskripsikan suatu proses surplus, dinotasikan dengan $\{U(t)\}_{t\geq 0}$, sebagai

$$U(t) = u + Z(t) = u + ct - S(t), \;\; t \geq 0 \tag{2.9}$$

dimana $Z(t) = ct - S(t)$ adalah proses dasar dari model risiko dan ct adalah jumlah total premi perusahaan asuransi hingga waktu t.

Berdasarkan deskripsi terhadap $S(t)$, maka diketahui bahwa Y_i iid dengan $E(Y_i) = m$ dan telah diketahui sebelumnya bahwa $E(N(t)) = \lambda t$. Sehingga ekspektasi cadangan risiko pada $(0, t]$ adalah $E(Z(t))$, yaitu

$$\begin{aligned}
E(Z(t)) &= E(ct - S(t)) = ct - E(S(t)) \\
&= ct - \sum_{k=0}^{\infty} E(S(t)|N(t) = k)\mathbb{P}(N(t) = k) \\
&= ct - \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i|N(t) = k\right)\mathbb{P}(N(t) = k) \\
&= ct - \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right)\mathbb{P}(N(t) = k) \\
&= ct - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=i}^{k} E(Y_i)\mathbb{P}(N(t) = k)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ct - \sum_{k=0}^{\infty} km\mathbb{P}(N(t) = k) \\
&= ct - m\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(N(t) = k) \\
&= ct - mE(N(t)) \\
&= ct - m\lambda t \\
&= t(c - m\lambda)
\end{aligned}
$$

Sehingga dapat didefinisikan suatu *loading* θ, yaitu:

$$\theta = \frac{c - m\lambda}{m\lambda} = \frac{c}{m\lambda} - 1 \tag{2.10}$$

dimana $c = (1+\theta)m\lambda$.

2.5 Definisi Peluang Kebangkrutan

Kebangkrutan terjadi pada waktu t jika $U(t;u) \leq 0$ untuk pertama kalinya pada waktu t, $t \geq 1$. Sehingga apabila diberikan surplus awal u, $T(u)$ merupakan waktu kebangkrutan, dimana

$$T(u) = \min\{t > 0 : U(t;u) \leq 0\}. \tag{2.11}$$

Selanjutnya, peluang kebangkrutan pada waktu tak hingga, atau disebut juga sebagai peluang kebangkrutan *ultimate* adalah

$$\psi(u) = \mathbb{P}(U(t) < 0 \text{ untuk } t > 0) \tag{2.12}$$

Artinya, $\psi(u)$ adalah peluang bahwa surplus penanggung (perusahaan asuransi) berada di bawah nol pada suatu waktu di masa depan, yaitu saat klaim lebih besar daripada total surplus awal ditambah pemasukan premi. Peluang kebangkrutan pada (2.12) merupakan peluang kebangkrutan pada waktu kontinu. Sementara peluang kebangkrutan pada waktu diskrit adalah

$$\psi_m(u) = \mathbb{P}(U(t) < 0,\ \ t = m, 2m, 3m, \cdots). \tag{2.13}$$

Dengan demikian, berdasarkan definisi tersebut kebangkrutan terjadi hanya jika surplus kurang dari nol pada titik waktu m, $2m$, $3m$, $\cdots$. Jika kebangkrutan terjadi dibawah definisi waktu diskrit, maka kebangkrutan juga pasti akan terjadi dibawah definisi waktu kontinu. Namun, kebalikannya tidak berlaku. Misal pada proses surplus, dimana n adalah bilangan bulat, $U(nm) > 0$ dan $U((n+1)m) > 0$ dimana $U(\tau) < 0$ untuk $\tau \in (nm, (n+1)m)$. Bila $U(t) > 0$ untuk semua t yang berada diluar interval $(nm, (n+1)m)$, maka kebangkrutan terjadi dibawah definisi waktu kontinu, tapi tidak terjadi dibawah definisi waktu diskrit. Dengan demikian, $\psi_m(u) < \psi(u)$. Namun, semakin kecil nilai m, sehingga tingkat surplus dapat diperiksa sesering mungkin, maka $\psi_m(u)$ dapat dijadikan sebagai pendekatan untuk mencari $\psi(u)$. Selanjutnya, didefinsikan peluang kebangkrutan pada waktu hingga $\psi(u,t)$, yaitu

$$\psi(u,t) = \mathbb{P}(U(s) < 0, \quad 0 < s \leq t).$$

Dengan demikian, $\psi(u,t)$ adalah peluang bahwa surplus perusahaan asuransi bernilai negatif pada interval waktu hingga $(0,t]$. Peluang kebangkrutan waktu diskrit dalam waktu hingga juga dapat didefinisikan sebagai

$$\psi_m(u,t) = \mathbb{P}(U(s) < 0, \;\; s = m, 2m, 3m, \cdots, t)$$

dimana t adalah bilangan bulat kelipatan m. Argumen sebelumnya yang menjelaskan mengapa $\psi_r(u) < \psi(u)$, juga dapat diaplikasikan pada waktu hingga, sehingga $\psi_m(u,t) < \psi(u,t)$, dan semakin kecil nilai m, maka $\psi_m(u,t)$ dapat digunakan sebagai pendekatan untuk mencari $\psi(u,t)$.

Contoh 2.5.1. Misalkan variabel klaim Y memiliki distribusi sebagai berikut: $f_Y(0) = 0,5; f_Y(1) = f_Y(2) = 0,2; f_Y(3) = 0,1$. Peluang kebangkrutan pada waktu t, diberikan surplus awal u, untuk $u \geq 0$ dapat dilihat pada tabel 2.1.

Tabel 2.1: Peluang Kebangkrutan

Waktu	Surplus Awal u						
t	0	1	2	3	4	5	6
1	0,500	0,300	0,100	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,650	0,410	0,180	0,050	0,010	0,000	0,000
3	0,705	0,472	0,243	0,092	0,030	0,007	0,000

Dimana,

$$\begin{aligned}
\psi(1,0) &= 1 - f_Y(0) = 1 - 0,5 = 0,5 \\
\psi(1,1) &= 1 - (f_Y(0) + f_Y(1)) = 1 - (0,5 + 0,2) = 0,3 \\
\psi(1,2) &= 1 - (f_Y(0) + f_Y(1) + f_Y(2)) = 0,1 \\
\psi(1,3) &= 1 - (f_Y(0) + f_Y(1) + f_Y(2) + f_Y(3) = 0
\end{aligned}$$

Lalu,

$$\psi(2;2) = \psi(1;0) + f_Y(0)\psi(1;1) = 0,5 + (0,5)(0,3) = 0,65$$

Dengan cara yang sama,

$$\begin{aligned}
\psi(2;1) &= \psi(1;1) + f_Y(0)\psi(1;2) + f_Y(1)\psi(1;1) \\
&= 0,3 + (0,5)(0,1) + (0,2)(0,3) = 0,41
\end{aligned}$$

$$\psi(2;2) = \psi(1;2) + f_Y(0)\psi(1;3) + f_Y(1)\psi(1;2) + f_Y(2)\psi(1;1) = 0,18$$

dan seterusnya. Dapat dilihat bahwa semakin besar nilai surplus, maka semakin kecil peluang kebangkrutan.

2.6 Pertidaksamaan Lundberg

Pertidaksamaan Lundberg menunjukkan bahwa peluang kebangkrutan $\psi(u)$ terbatas di atas oleh suatu fungsi eksponensial apabila fungsi pembangkit momen dari variabel acak Y_i ada. Namun sebelumnya, harus dilakukan perhitungan terhadap suatu nilai yang disebut dengan koefisien penyesuaian, dilambangkan dengan r, yang memberikan ukuran risiko bagi proses surplus. Koefisien penyesuaian mempertimbangkan dua faktor dalam proses suplus: klaim agregat dan pendapatan premi.

Definisi 2.6.1. (Koefisien Penyesuaian) Misal $r = \kappa$ merupakan solusi positif terkecil untuk persamaan

$$1 + (1 + \theta)\mu r = M_Y(r) \tag{2.14}$$

dimana $M_Y(r) = E(e^{rY})$ adalah fungsi pembangkit momen dari peubah acak Y (besar klaim). Jika nilai κ ada, maka r merupakan koefisien penyesuaian.

Teorema 2.6.1. Untuk proses risiko klasik, dimisalkan $\psi(u)$ adalah peluang kebangkrutan, dengan u merupakan modal awal, serta r merupakan koefisien penyesuaian, maka untuk $r > 0$, batas atas peluang kebangkrutan dari proses surplus adalah:

$$\psi(u) < e^{-ru}, \quad u \geq 0$$

Bukti. Misal $T_k, k = 0, 1, 2, ...$ menunjukkan waktu saat terjadinya klaim, dimana kebangkrutan akan terjadi pada salah satu dari waktu tersebut. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, maka

$$\psi_n(u) = \mathbb{P}(U(T_k) < 0 \text{ untuk } k \leq n | U(0) = u)$$

dimana $U(T_k) = u + cT_k - S(t)$ dan $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,\ t \geq 0$

1. Untuk $n = 0$, $\psi_0 = 0 \leq e^{-ku}$

2. Untuk $n = 1$, didefinisikan pada T_1 dimana $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ untuk $t \geq 0$ dan $U(T_1) = u + cT_1 - Y_1$. Dengan menggunakan hukum probabilitas

total (lihat Wackerly halaman 70) maka:

$$\begin{aligned}
\psi_1(u) &= \mathbb{P}(U(T_1) < 0 | U(0) = u) \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(U(T_1) < 0 | T_1 = t, U(0) = u) \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(u + ct - Y_1 < 0) \lambda e^{-\lambda t} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(u + ct - Y_1 < 0) &= \mathbb{P}(Y_1 < u + ct) \\
&= \int_{u+ct}^\infty dF(y) \\
&\leq \int_{u+ct}^\infty e^{-k(u+ct-y)} dF(y) \\
&\quad (u + ct - y \leq 0 \text{ maka} \\
&\quad e^{-k(u+ct-y)} \geq 1) \\
&= e^{-k(u+ct)} \int_{u+ct}^\infty e^{ky} dF(y) \\
&\leq e^{-k(u+ct)} \int_0^\infty e^{ky} dF(y) \\
&= e^{-k(u+ct)} M_Y(k)
\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
\psi_1(u) &\leq \int_0^\infty e^{-k(u+ct)} M_Y(k) \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= e^{-ku} M_Y(k) \lambda \int_0^\infty e^{-t(ck+\lambda)} dt \\
&= e^{-ku} \frac{M_Y(k)\lambda}{ck + \lambda} \\
&= e^{-ku} \frac{M_Y(k)\lambda}{(1+\theta)m\lambda k + \lambda} \\
&= e^{-ku} \frac{M_Y(k)\lambda}{\lambda((1+\theta)mk + 1)} \\
&= e^{-ku} \frac{M_Y(k)\lambda}{\lambda M_Y(k)} \\
&= e^{-ku}
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa

$$\psi_1(u) \leq e^{-ku}$$

3. Untuk $n = 2$, maka

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \mathbb{P}(U(T_1) < 0 \text{ atau } U(T_2) < 0 | U(0) = u) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(U(T_1) < 0 \text{ atau } U(T_2) < 0 | U(0) = u, T_1 = t, \\ & \quad Y_1 = y) dF(y)\, \lambda e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

dimana

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(U(T_1) < 0 \text{ atau } U(T_2) < 0 | U(0) = u, T_1 = t, Y_1 = y) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{jika } u + ct - y < 0 \\ \psi_1(u + ct - y) & \text{jika } u + ct - y > 0 \end{cases} \\ &\leq e^{-k(u+ct-y)}\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\psi_2(u) &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-k(u+ct-y)} dF(y)\, \lambda e^{\lambda t} dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-k(u+ct)} M_Y(k)\, \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= e^{-ku}\end{aligned}$$

4. Lalu misalkan diketahui $\psi_n(u) \leq e^{-ku}\ \forall u \geq 0$, maka

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(u) &= \mathbb{P}(U(T_k) < 0 \text{ untuk } k \leq n+1 | U(0) = u) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(U(T_k) < 0 \text{ untuk } k \leq n+1 | U(0) = u, T_1 = t, \\ & \quad Y_1 = y) dF(y)\, \lambda e^{-\lambda t} dt\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(U(T_k) < 0 \text{ untuk } k \leq n = 1 | U(0) = u, T_1 = t, Y_1 = y) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{jika } u + ct - y < 0 \\ \psi_n(u + ct - y) & \text{jika } u + ct - y > 0 \end{cases} \\ &\leq e^{-k(u+ct-y)}\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\psi_n(u) &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-k(u+ct-y)} dF(y)\, \lambda e^{-\lambda t} \\
&\leq \int_0^\infty e^{-k(u+ct)} M_Y(k)\, \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= e^{-ku}
\end{aligned}$$

□

Contoh 2.6.1. Misal $U(t;u)$ merupakan fungsi surplus dengan Y berdistribusi GAMMA $(3; 0,5)$. Fungsi pembangkit momen variabel acak Y adalah

$$M_Y(r) = \frac{1}{(1-\beta r)^\alpha} = \frac{1}{(1-0,5)^3}$$

dengan *mean* $\mu_Y = \alpha\beta = 1,5$. Dari (2.14), koefisien penyesuaian adalah solusi dari r dalam persamaan berikut

$$\frac{1}{(1-0,5r)^3} = 1 + (1+\theta)(1,5)r$$

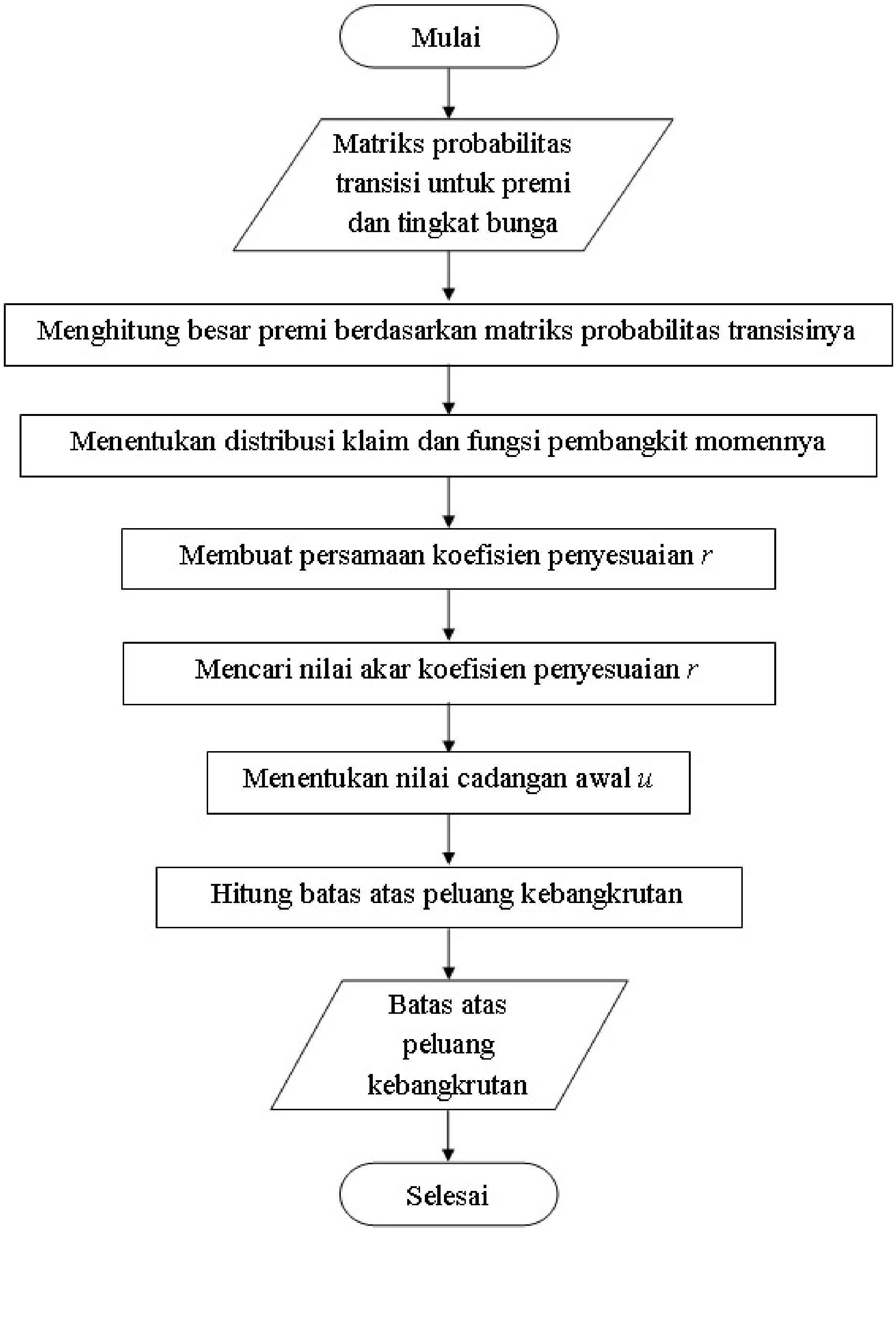
Sehingga, secara numerik, nilai koefisien penyesuaian bila $\theta = 0,1$ adalah $r = 0,0924$. Batas atas peluang kebangkrutan untuk $u = 5$ dan $u = 10$ adalah

$$\psi(u) = e^{-ru} = \begin{cases} 0,6300 & \text{untuk } u = 5 \\ 0,3969 & \text{untuk } u = 10 \end{cases}$$

Ketika *loading* dinaikkan menjadi $0,2$, didapatkan nilai $r = 0,1718$. Sehingga, batas atas peluang kebangkrutan untuk $u = 5$ dan $u = 10$ adalah

$$\psi(u) = e^{-ru} = \begin{cases} 0,4236 & \text{untuk } u = 5 \\ 0,1794 & \text{untuk } u = 10 \end{cases}$$

Dapat dilihat bahwa nilai r naik apabila θ dinaikkan. Lalu, batas atas peluang kebangkrutan akan menurun bila nilai θ dan u semakin besar.



Gambar 2.2: Diagram Alir Batas Atas Peluang Kebangkrutan

Berdasarkan gambar 2.2, dapat dijelaskan alur penelitian sebagai berikut:

1. Premi dan tingkat suku bunga mengikuti rantai Markov homogen, sehingga pertama-tama menentukan matriks probabilitas untuk premi dan tingkat suku bunga.

2. Selanjutnya, mencari solusi persamaan *steady-state* untuk mencari besar rata-rata premi tahunan jangka panjang yang dibayar oleh pemegang polis.

3. Menentukan distribusi kedatangan klaim dan mencari fungsi pembangkit momennya.

4. Selanjutnya, membuat persamaan untuk koefisien penyesuaian r berdasarkan besar premi, tingkat suku bunga awal, dan distribusi kedatangan klaim.

5. Setelah didapatkan persamaan untuk koefisien penyesuaian, maka selanjutnya adalah mencari nilai akar dari persamaan tersebut. Nilai akar yang diambil adalah akar yang bernilai positif terkecil.

6. Lalu, tentukan nilai cadangan awal u. Nilai cadangan awal u dan akar positif terkecil dari koefisien penyesuaian selanjutnya digunakan untuk menghitung batas atas peluang kebangkrutan.