BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Ruang Probabilitas

Dalam teori peluang, ruang probabilitas merupakan suatu gagasan matematika yang memodelkan proses atau suatu percobaan pada dunia nyata yang terdiri dari kejadian-kejadian yang terjadi secara acak.

Definisi 2.1.1. Misal Ω himpunan sebarang tak kosong dan $\mathcal{F}$ subhimpunan Ω. $\mathcal{F}$ dikatakan aljabar-σ jika:

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$
2. Jika $A \in \mathcal{F}$, maka $A^c \in \mathcal{F}$
3. Jika $(A_n) \in \mathcal{F}$, maka $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n) \in \mathcal{F}$.

Definisi 2.1.2. Diberikan $\mathcal{F}$ aljabar-σ pada Ω. Fungsi $\lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ disebut ukuran jika memenuhi:

1. $\lambda(\emptyset) = 0$
2. $\lambda(A) \geq 0$ untuk setiap $A \in \mathcal{F}$
3. Jika $(A_n) \in \mathcal{F}$ merupakan barisan himpunan yang saling lepas, yaitu $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, maka

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$$

.

Definisi 2.1.3. Diberikan $\mathcal{F}$ aljabar-σ pada Ω. Fungsi $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ disebut ukuran probabilitas jika memenuhi:

1. $P(\emptyset) = 0$ dan $P(\Omega) = 1$
2. Jika $(A_n) \in \mathcal{F}$ merupakan himpunan yang saling lepas, yaitu $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, maka
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$
.

Definisi 2.1.4. Diberikan Ω himpunan tak kosong, $\mathcal{F}$ aljabar-σ pada Ω, dan P ukuran probabilitas pada $\mathcal{F}$, maka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ disebut ruang probabilitas.

Definisi 2.1.5. Diberikan $f : \Omega \to \mathbb{R}$. $\mathcal{F}$ aljabar-σ atas Ω. Fungsi f dikatakan terukur $\mathcal{F}$ jika untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, himpunan $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}$.

Definisi 2.1.6. Misalkan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan riil, Aljabar Borel pada $\mathbb{R}$ adalah aljabar-σ terkecil yang memuat semua interval buka pada $\mathbb{R}$.

Definisi 2.1.7. Misalkan f merupakan fungsi dari ruang terukur $(\Omega, \mathcal{F})$ pada bilangan riil. Fungsi f dikatakan terukur jika untuk setiap himpunan Borel $B \in \mathcal{B}$, himpunan $\{x, f(x) \in B\} \in \mathcal{F}$.

Contoh 2.1.1. Hasil yang mungkin dari pelemparan sebuah koin adalah gambar (G) atau angka (A): $\Omega = \{G, A\}$. Aljabar-σ $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ terdiri dari $2^2 = 4$ kejadian, yaitu: $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{G\}, \{A\}, \Omega\}$. Jika kesempatan untuk mendapatkan gambar atau angka adalah $50 : 50$, maka ukuran probabilitasnya adalah: $P(\emptyset) = 0; P(\{G\}) = 0,5; P(\{A\}) = 0,5; P(\Omega) = 1$.

2.2 Variabel Acak

Variabel acak merupakan suatu fungsi yang memetakan bilangan riil dengan setiap elemen pada ruang sampel. (Walpole, 1993)

Definisi 2.2.1. Diberikan ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Fungsi terukur $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ disebut variabel acak jika untuk setiap $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ berlaku $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Definisi 2.2.2. Untuk setiap variabel acak X, fungsi F disebut fungsi distribusi, didefinisikan sebagai

$$F(x) = P\{X \leq x\}, (-\infty < x < \infty). \tag{2.1}$$

Variabel acak X dikatakan diskrit jika fungsi distribusinya bisa dinyatakan sebagai

$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} P(X = y). \tag{2.2}$$

Variabel acak X dikatakan kontinu jika fungsi distribusinya bisa dinyatakan sebagai

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy, x \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

untuk suatu fungsi $f : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty)$ yang terintegralkan. Fungsi f ini dinamakan fungsi kepadatan peluang. Dalam kasus kontinu

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$$

.

2.2.1 Nilai Ekspektasi

Nilai ekspektasi (*mean*) dari variabel acak X dinotasikan dengan $E(X)$ yang didefinisikan sebagai

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x xf(x), & \text{jika } X \text{ diskrit;} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, & \text{jika } X \text{ kontinu} \end{cases}$$

Teorema 2.2.1. Jika $P[X \leq Y] = 1$ maka $E(X) \leq E(Y)$.

Bukti. Jika $P[Y \geq 0] = 1$, maka $P[Y < 0] = 0$, sehingga

$$E(Y) = \int_0^{\infty} ydF_Y(y) \geq 0. \tag{2.4}$$

Secara umum,

$$E(Y - X) \geq 0 \tag{2.5}$$

sedemikian sehingga

$$E(Y) \geq E(X).$$

□

Teorema 2.2.2. $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$, dimana a dan b adalah konstanta.

Bukti. Jika X variabel acak kontinu, maka:

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x)dx \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

□

2.3 Fungsi Utilitas

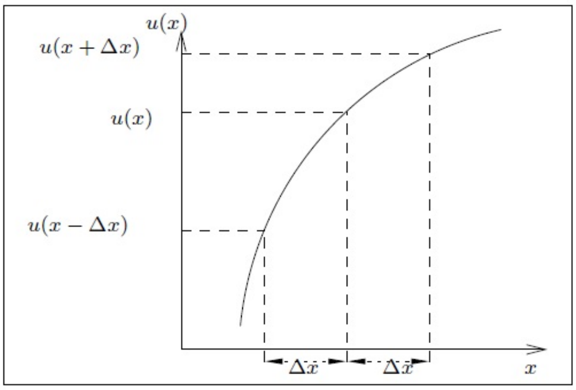
Secara matematis, diperlukan fungsi untuk memetakan antara ukuran fisik uang dan nilai yang dirasakan dari uang. Fungsi seperti ini disebut fungsi utilitas, dan dalam konteks untuk menjadi suatu variabel acak pada ruang probabilitas, fungsi tersebut harus terukur pada ruang tersebut, sehingga fungsi utilitas merupakan suatu variabel acak.

Namun, sifat dasar dari fungsi utilitas menyatakan bahwa fungsi utilitas adalah fungsi naik, semua orang akan menghargai lebih banyak uang dibanding yang sedikit, sehingga $u'(x) \geq 0$. Sifat ini dinamakan *non-satiation.* Sifat *non-satiation* (ketidakbosanan) menyatakan bahwa utilitas meningkat seiring dengan kekayaan, investor tidak pernah merasa puas, investor akan selalu lebih menyukai yang 'lebih banyak' dibanding yang 'sedikit'. Sedangkan sifat *risk aversion* (menghindari risiko) menyatakan bahwa fungsi utilitas cekung, yaitu $u''(x) \leq 0$ atau dengan kata lain, bahwa utilitas marjinal kekayaan menurun seiring kekayaan meningkat.

Contoh 2.3.1. Seorang pengemis akan menganggap Rp$1000,00$ sangat bernilai, karena dengan pertambahan Rp1000,00 bisa jadi melipatgandakan kekayaan yang ia miliki. Namun, bagi seorang jutawan, pertambahan atau kerugian Rp1000,00 tidak memiliki nilai yang berarti dari sudut pandang mereka. Hal ini dikenal sebagai penurunan utilitas marjinal, yaitu $u''(x) \leq 0$.

Pada gambar diatas utilitas marjinal atau peningkatan utilitas menurun seiring kekayaan meningkat dan jelas bahwa jika $u''(x) \leq 0$ maka $u(x + \Delta x) - u(x) \leq u(x) - u(x - \Delta x)$, sehingga tiap unit pertambahan kekayaan meningkatkan utilitas dengan jumlah yang lebih kecil, utilitas marjinal $u(x + \Delta x) - u(x)$ menurun.

Ada beberapa aksioma yang mendasari teori utilitas, yaitu:



Gambar 2.1: Grafik fungsi utilitas

1. ***Independence*** (kebebasan) mengasumsikan bahwa dua undian dicampur dengan satu undian yang tidak relevan akan mempertahankan urutan yang sama dari preferensi ketika dua undian tersebut disajikan secara independen dari undian yang tidak relevan tersebut.

   Misalkan ada tiga undian A, B dan C dengan $A \succeq B$, dan $t \in [0,1]$ adalah probabilitas dari pilihan ketiga ditunjukkan jika $tA + (1-t)C \succeq tB + (1-t)C$, maka C sebagai pilihan ketiga adalah tidak relevan dan urutan preferensi A dan B adalah tetap, secara independen dari kehadiran C

2. ***Completeness*** (kelengkapan) mengasumsikan bahwa setiap individu selalu dapat memilih diantara dua alternatif.

   $$A \succeq B \text{ atau } B \succeq A$$

3. ***Transitivity*** (transitivitas) mengasumsikan bahwa individu memutuskan berdasarkan aksioma kelengkapan, individu juga memutuskan secara konsisten.

   $$\text{Jika } A \succeq B \text{ dan } B \succeq C, \text{ maka } A \succeq C$$

4. ***Continuity*** (kekontinuan) mengasumsikan bahwa ketika seseorang lebih menyukai A dibanding B maka keadaan yang mendekati A juga pasti lebih disukai dibanding B

Jika $A \succeq B \succeq C$, maka ada probabilitas p sehingga B sama baiknya dengan $pA + (1-p)C$.

2.3.1 Pertidaksamaan Jensen

Pertidaksamaan Jensen menyatakan bahwa, jika suatu fungsi utilitas adalah cekung, maka nilai ekspektasi nya akan kurang dari fungsi utilitas dari suatu nilai ekspektasi. Pertidaksamaan Jensen mengakibatkan seorang investor yang menghindari risiko tidak akan pernah menerima *fair game*. Karena setiap jumlah uang yang akan dimenangkan akan selalu lebih kecil daripada jumlah uang yang dibayar untuk bertaruh atau bisa hilang karna kalah bermain.

Definisi 2.3.1. (Fungsi Cekung) Fungsi $u : I \to \mathbb{R}$ disebut cekung (sempurna) jika untuk semua $x, y \in I$, $x \neq y$, dan semua $\alpha \in (0,1)$ mempunyai

$$u((1-\alpha)x + \alpha y)) \geq (1-\alpha)u(x) + \alpha u(y) \tag{2.6}$$

dan u dikatakan cembung (sempurna) jika $-u$ cekung (sempurna).

Teorema 2.3.1. Jika u adalah fungsi cekung terdiferensialkan kontinu dari suatu variabel single pada interval I, maka untuk semua x dan y di I,

$$u(x) + (y-x)u'(x) \geq u(y). \tag{2.7}$$

Bukti. Karena u adalah fungsi cekung, maka

$$u((1-\alpha)x + \alpha y)) \geq (1-\alpha)u(x) + \alpha u(y)$$

dengan menyusun ulang persamaan (2.7), didapat

$$
\begin{aligned}
\leftrightarrow \quad u(x+\alpha(y-x))-u(x) &\geq \alpha(u(y)-u(x)) \\
\leftrightarrow \quad \frac{u(x+\alpha(y-x))-u(x)}{\alpha} &\geq u(y)-u(x) \\
\leftrightarrow \quad (y-x)\lim_{\alpha\to 0}\frac{u(x+\alpha(y-x))-u(x)}{\alpha(y-x)} &\geq u(y)-u(x) \\
\leftrightarrow \quad (y-x)u'(x) &\geq u(y)-u(x) \\
\leftrightarrow \quad u(x)+(y-x)u'(x) &\geq u(y)
\end{aligned}
$$

□

Teorema 2.3.2. (Pertidaksamaan Jensen). Pertidaksamaan Jensen menyatakan jika u adalah fungsi cekung, maka

$$E[u(X)] \leq u(E[X]). \tag{2.8}$$

Bukti. Misal f fungsi terdiferensialkan dan cekung, maka menurut teorema di atas

$$u(x)+(y-x)u'(x) \geq u(y).$$

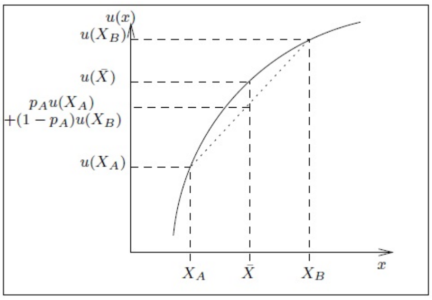
Misalkan $y = X$ dan $x = E[X]$, sehingga

$$
\begin{aligned}
u(E[X])+(X-E[X])u'(E[X]) &\geq u(X) \\
u(E[X])+E[(X-E[X])]u'(E[X]) &\geq E[u(X)] \\
u(E[X]) &\geq E[u(X)]
\end{aligned}
$$

□

2.3.2 Penghindaran Risiko

Misalkan nilai harapan utilitas dapat memaksimalkan investor yang mempunyai kesempatan untuk berpatisipasi dalam investasi berisiko. Investasi akan menawarkan keuntungan X_A dengan probabilitas p_A atau $X_B > X_A$ dengan probabilitas $(1-p_A)$. Untuk berpatisipasi dalam investasi ini, investor harus membayar $\bar{X} = p_A X_A + (1 - p_A) X_B$, yaitu kesempatan investasi adalah adil. Jika fungsi utilitas cekung, gambar di bawah merupakan grafik fungsi utilitas terhdap keuntungan investasi yang menunjukkan bahwa utilitas $\bar{X}$ lebih besar dari nilai harapan investasi, $p_A u(X_A) + (1 - p_A) u(X_B)$



Gambar 2.2: Grafik fungsi utilitas

Ini berarti bahwa investor akan lebih memilih untuk menyimpan $\bar{X}$ dibanding ekspektasi *pay-off* investasi. Hasil ini sebagai akibat dari Pertidaksamaan Jensen.

Pertidaksamaan Jensen menjelaskan bahwa jika utilitas cekung, ekpektasi utilitas kurang dari utilitas dari nilai ekspektasi. Jika berjudi itu adil, yaitu biaya yang berpartisipasi dalam berjudi sama dengan hasil yang diharapkan, utilitas yang terkait dengan biaya ini lebih besar dari dari ekspektasi utilitas kemenangan. Oleh karena itu kerugian utilitas lebih besar dari ekspektasi keuntungan utilitas yang dilengkapi dengan kemungkinan menang.

Kecekungan fungsi utilitas dari gambar di atas menentukan bagaimana perilaku seseorang dalam menghadapi ketidakpastian, yang dikenal dengan *risk aversion* atau penghindaran risiko. Ada dua cara untuk mengukur tingkat penghindaran risiko, yaitu penghindaran risiko absolut atau *absolute risk aversion* (ARA)

$$R_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \tag{2.9}$$

dan penghindaran risiko relatif atau *relative risk aversion (RRA)*

$$R_r(x) = -x\frac{u''(x)}{u'(x)} \tag{2.10}$$

ARA mengukur penghindaran risiko dengan kerugian secara absolut sedangkan RRA mengukur penghindaran risiko dengan kerugian relatif terhadapa kekayaan seseorang.

Alokasi kekayaan seseorang pada aset berisiko tergantung pada karekteristik penghindaran risiko dari fungsi utilitasnya dengan cara berikut.

1. Jika seseorang memiliki *Increasing Absolute Risk Aversion* (IARA), maka seiring kekayaan meningkat mereka akan mendapat beberapa rupiah lebih sedikit pada aset berisiko.

2. Jika seseorang memiliki *Constant Absolute Risk Aversion* (CARA), seiring dengan peningkatan kekayaan mereka akan mendapat jumlah rupiah yang sama pada aset berisiko.

3. Jika seseorang memiliki *Decreasing Absolute Risk Aversion* (DARA), maka seiring kekayaan meningkat mereka akan mendapat beberapa rupiah lebih banyak pada aset berisiko.

4. Jika seseorang memiliki *Increasing Relative Risk Aversion* (IRRA), maka peningkatan kekayaan menyebabkan penurunan proporsi kekayaan yang diinvestasikan pada aset berisiko.

5. Jika seseorang memiliki *Constant Relative Risk Aversion* (CRRA), maka peningkatan kekayaan tidak mempengaruhi proporsi kekayaan yang diinvestasikan pada aset berisiko, dengan kata lain proporsinya tetap sama.

6. Jika seseorang memiliki *Decreasing Relative Risk Aversion* (DRRA), maka peningkatan kekayaan menyebabkan peningkatan proporsi kekayaan yang diinvestasikan pada aset berisiko.

2.3.3 *Constant Relative Risk Aversion* (CRRA)

Fungsi Utilitas *Constant Relative Risk Aversion* (CRRA) atau penghindaraan resiko relatif konstan didefinisikan sebagai

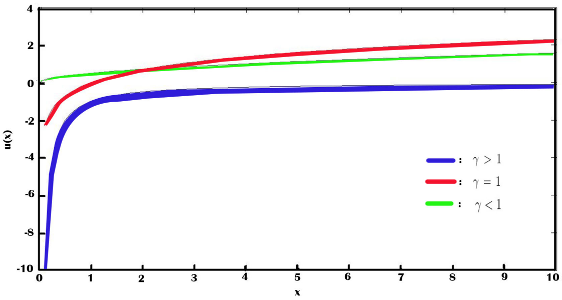
$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma}, & \text{jika} \;\; \gamma > 0, \gamma \neq 1; \\ \ln x, & \text{jika} \;\; \gamma = 1 \end{cases}$$

Parameter γ mengukur derajat dari RRA. Berikut adalah klasifikasi dari derajat penghindaran risiko:

1. $\gamma = 0,5$; hampir tidak menghindari risiko.
2. $\gamma = 1,0$; menghindari risiko secara normal.
3. $\gamma = 2,0$; lebih menghindari risiko.
4. $\gamma = 3,0$; sangat menghindari risiko.
5. $\gamma = 4,0$; menghindari risiko secara ekstrim.

Gambar di bawah menunjukkan bagaimana fungsi CRRA tergantung pada koefisien penghindaran risiko relatif γ.

Pada gambar di atas terlihat bahwa dengan tingkat kekayaan yang sama, semakin tinggi tingkat penghindaraan risiko seseorang, maka semakin kecil tingkat kepuasan seseorang terhadap kekayaan yang dimiliki.



Gambar 2.3: Fungsi CRRA dengan koefisien pengindaran risiko yang berbeda

2.4 Strategi *Constant Proportion Portfolio Insurance* (CPPI)

CPPI adalah sebuah metode asuransi portofolio di mana investor menetapkan *floor* pada nilai rupiah portofolio, maka alokasi struktur aset berada di sekitar keputusan itu. *Floor* merupakan nilai terkecil portofolio yang dapat diterima oleh seorang investor, di mana investor tersebut tidak menginginkan portofolionya jatuh di bawah *floor* tersebut. Kelas aset yang digunakan dalam CPPI adalah aset berisiko (biasanya ekuitas atau reksa dana), dan aset tanpa risiko baik kas, atau setara obligasi. Persentase dialokasikan untuk masing-masing tergantung pada nilai *cushion*, yang didefinisikan sebagai (nilai portofolio saat ini), dan koefisien *multiplier*, di mana jumlah yang lebih tinggi menunjukkan strategi yang lebih agresif.

$$(Multiplier)\times \text{ (nilai } \textit{cushion} \text{ dalam rupiah)}$$

Contoh 2.4.1. Misalkan harga sebuah portfolio adalah Rp$100.000,00$, dan investor memutuskan Rp$90.000,00$ sebagai *absolute floor*. Jika portofolio jatuh sampai Rp$90.000,00$, investor akan memindahkan semua aset ke kas untuk mempertahankan modal.

Nilai multiplier didasarkan pada profil risiko investor, dan biasanya diperoleh dari menginvestigasi berapa jumlah maksimum kerugian yang mungkin terjadi pada investasi berisiko. *Multiplier* akan menjadi kebalikan dari persentase itu. Jadi, jika seseorang memutuskan bahwa 20% adalah maksimum kerugian yang mungkin terjadi, nilai multiplier akan menjadi $\frac{1}{20\%}$, atau 5.

Berdasarkan informasi yang diberikan, investor akan mengalokasikan

$$5 \times (\text{Rp}100.000,00 - \text{Rp}90.000,00) = \text{Rp}50.000,00$$

untuk aset berisiko, dengan sisanya masuk ke kas atau aset tanpa risiko.

2.5 Proses Stokastik

Misalkan T himpunan indeks dan $S(t)$ untuk setiap $t \in T$ variabel acak. Koleksi variabel acak $S(t)$ disebut proses stokastik. Jadi untuk setiap $t \in T$ adalah waktu, $S(t)$ merupakan kejadian (*state*) dari proses pada waktu t. Jika himpunan indeks T terhitung maka $S(t), t \in T$ merupakan proses stokastik diskret dan jika T tak terhitung maka $S(t), t \in T$ merupakan proses stokastik kontinu.

Proses stokastik $S(t)$, dengan $t \in T$ kontinu dikatakan mempunyai sifat *independent increment* jika untuk semua $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, variabel-variabel acak $S(t_1) - S(t_0), S(t_2) - S(t_1), \cdots, S(t_n) - S(t_{n-1})$ independen dan dikatakan mempunyai sifat *stationary increment* jika $S(t+s) - S(t)$ mempunyai distribusi yang sama untuk semua t.

2.5.1 Gerak Brown

Gerak Brown ditemukan pertama kali oleh ahli Botani Robert Brown pada tahun 1827. Selanjutnya gerak Brown juga dipakai oleh Albert Einstein untuk menjelaskan beberapa fenomena fisika. Definisi formal secara matematis dari gerak Brown diberikan oleh Norbert Wiener sehingga seringkali gerak Brown disebut juga sebagai proses Wiener. Gerak Brown selanjutnya menjadi objek kajian yang berkembang pesat di dalam matematika dari aspek teori maupun aplikasinya. Salah satu aplikasi yang paling terkenal adalah gerak Brown dipakai sebagai model untuk dinamika acak dari fluktuasi pada pasar saham, yang kemudian melahirkan teori integral stokastik dan persamaan diferensial stokastik.

Definisi 2.5.1. Proses stokastik $(W(t), t \geq 0)$ dinamakan proses gerak Brown (proses Wiener) jika

1. $W(0) = 0$;
2. $(W(t), t \geq 0)$ mempunyai sifat *stationary increment* dan *independent increment*;
3. untuk setiap $t \geq 0, W(t)$ berdistribusi normal dengan *mean* 0 dan variansi $\sigma^2 t$.

Definisi 2.5.2. Gerak Brown dengan *mean* μt dan variansi $\sigma^2 t$ disebut gerak Brown dengan *drift* μ dan parameter variansi σ^2.

Lebih lanjut, untuk $\sigma = 1$, $W(t)$ disebut gerak Brown standar.

Teorema 2.5.1. Jika $\{W(t), t \geq 0\}$ merupakan gerak Brown standar dan

$$x(t) = \mu t + \sigma W(t)$$

maka $\{x(t), t \geq 0\}$ merupakan gerak Brown dengan *drift.*

Bukti.

1. Untuk $t = 0$, $x(0) = \mu(0) + \sigma W(0) = 0 + 0 = 0$
2. Akan ditunjukan bahwa $x(t+h) - x(t)$ bersifat *stationary increment* dan *independent increment*

(a) Akan ditunjukkan bahwa $x(t+h)-x(t)$ bersifat *independent increments* untuk setiap $n > 0$ dan $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
x(t_n) - x(t_{n-1}) &= \mu(t_n - t_{n-1}) + \sigma(W(t_n) - W(t_{n-1})) \\
x(t_{n-1}) - x(t_{n-2}) &= \mu(t_{n-1} - t_{n-2}) + \sigma(W(t_{n-1}) - W(t_{n-2})) \\
&\vdots \\
x(t_2) - x(t_1) &= \mu(t_2 - t_1) + \sigma(W(t_2) - W(t_1)) \\
x(t_1) &= \mu(t_1) + \sigma W(t_1)
\end{aligned}$$

Karena untuk semua $n \geq 0$ dan $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $W(t_n) - W(t_{n-1}), \ldots, W(t_2) - W(t_1), W(t_1)$ saling independen, maka

$$x(t_n) - x(t_{n-1}), \ldots, x(t_2) - x(t_1), x(t_1)$$

juga saling independen. Jadi proses $\{x(t), t \geq 0\}$ bersifat *independent increments*.

(b) Akan ditunjukkan bahwa $x(t+h) - x(t)$ bersifat *stationary increments*. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
x(t+h) - x(t) &= \mu(t+h) + \sigma W(t+h) - (\mu(t) + \sigma W(t)) \\
&= \mu(t+h) + \sigma W(t+h) - \mu(t) - \sigma W(t) \\
&= \mu(t+h) - \mu(t) + \sigma W(t+h) - \sigma W(t) \\
&= \mu(t) + \mu(h) - \mu(t) + \sigma(W(t+h) - W(t)) \\
&= \mu(h) + \sigma(W(t+h) - W(t))
\end{aligned}$$

Karena $(W(t+h) - W(t)$ tidak bergantung pada t maka $x(t+h) - x(t)$ juga tidak bergantung pada t. Jadi $x(t+h) - x(t)$ bersifat *stationary increments*.

3. Apabila suatu variabel acak Y memiliki *mean* 0 dan variansi 1 maka $\mu + \sigma Y$ berdistribusi normal dengan *mean* μ dan variansi σ^2. Karena $\{W(t), t \geq 0\}$ merupakan gerak Brown standar, maka $W(t)$ berdistribusi normal dengan *mean* 0 dan variansi t sehingga $x(t) = \mu t + \sigma W(t)$ juga berdistribusi normal dengan *mean* μt dan variansi $\sigma^2 t$.

$\square$

2.5.2 Formula Itô

Definisi 2.5.3. Sebuah proses Itô adalah proses stokastik yang memenuhi persamaan

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t b(s, X_s) dW_s, \;\; s < t, \tag{2.11}$$

dimana W_s gerak Brown (proses Wiener), $a(s, X_s)$ merupakan suku deterministik yang melambangkan koefisien *drift* dan $b(s, X_s)$ merupakan suku stokastik yang melambangkan koefisien *diffusion*.

Persamaan (2.11) dapat ditulis dalam persamaan diferensial stokastik

$$dX_t = a(x, X_t) dt + b(x, X_t) dW_t \tag{2.12}$$

Tabel 2.1: Tabel Itô

$\times$	dW_t	dt
dW_t	dt	0
dt	0	0

2.6 Persamaan Hamilton-Jacobi-Bellman

Pemrograman dinamis adalah pendekatan yang kuat untuk memecahkan masalah kontrol optimal. Suatu metode ditemukan oleh R. Bellman di awal

1950-an, dan ide dasarnya adalah untuk mempertimbangkan keluarga masalah kontrol optimal dengan waktu awal dan *states* yang berbeda, untuk membangun hubungan antara masalah ini dikenal dengan persamaan Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Jika persamaan HJB dipecahkan (baik analitis atau numerik), maka salah satu dapat memperoleh kontrol umpan balik yang optimal dengan mengambil *maximizer* atau *minimizer* terlibat dalam persamaan HJB (yaitu yang disebut teknik verifikasi).

Jadi, fungsi untuk suatu kasus program dinamis waktu kontinu diberikan sebagai berikut:

$$J(t,x,\pi(.)) = E(\int_t^T f(s,x(s)ds,\pi(s))ds + h(T,x)) \tag{2.13}$$

dimana f adalah *running function*, h adalah *terminal function*, x merupakan tingkat kekayaan, dan π merupakan kontrol pada sistem.

Program dinamis merupakan sebuah ide yang dapat digunakan untuk meminimalkan/memaksimalkan $J(t,x,\pi(.))$ yang dalam hal ini adalah memaksimalkan fungsinya yaitu

$$J^*(t,x(t)) = \max J(t,x,\pi(.)) \tag{2.14}$$

dimana t berada pada interval $[t_0;t_1)$ dan $x(.)$ memiliki kondisi awal $x(t) = x$. Nilai fungsi (t,x) didefinisikan sebagai suatu kebijakan optimalitas

Diberikan suatu kebijakan optimalitas $V(t,x) := \sup J(t,x,\pi)$, sehingga persamaannya menjadi

$$V(t,x) := \sup\left(E\left[\int_t^T f(s,x(s)ds,\pi(s))ds + h(T,x)\right]\right). \tag{2.15}$$

Dengan kondisi akhir $V(T,x) = h(T,x)$, maka persamaan di atas menjadi

$$V(t,x) := \sup\left(E\left[\int_t^T f(s,x(s)ds,\pi(s))ds + V(T,x)\right]\right). \tag{2.16}$$

Misalkan $T = t+dt$ sehingga dapat diperoleh deret Taylor untuk $V(T,x) = V(t+dt, X_{t+dt})$ dengan $X_t = x > 0$ pada saat $t > 0$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
V(t+dt, X_{t+dt}) &= V(t,X_t) + \frac{\partial}{\partial t}V(t,X_t)dt + \frac{\partial}{\partial X_t}V(t,X_t)dX_t \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}V(t,X_t)dt^2 + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial X_t}V(t,X_t)dtdX_t \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X_t^2}V(t,X_t)dX_t^2.
\end{aligned}$$

Dengan mensubtitusi persamaan (2.12) ke persamaan di atas dan mengabaikan suku dengan orde lebih tinggi maka diperoleh

$$\begin{aligned}
V(t+dt, X_{t+dt}) &= V(t,X_t) + \frac{\partial}{\partial t}V(t,X_t)dt \\
&+ \frac{\partial}{\partial X_t}V(t,X_t)[a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dW_t] \\
&+ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial X_t}V(t,X_t)dt[a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dW_t] \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X_t^2}V(t,X_t)[a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dW_t]^2.
\end{aligned}$$

Karena menurut Tabel (2.1) $dt^2 = 0$, $dtdW_t = dW_tdt = 0$, dan $dW_t^2 = dt$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
V(t+dt, X_{t+dt}) &= V(t,X_t) + \frac{\partial}{\partial t}V(t,X_t)dt \\
&+ a(t,X_t)\frac{\partial}{\partial X_t}V(t,X_t)dt + b(t,X_t)\frac{\partial}{\partial X_t}V(t,X_t)dW_t \\
&+ \frac{1}{2}\left(b(t,X_t)\right)^2\frac{\partial^2}{\partial X_t^2}V(t,X_t)dt.
\end{aligned}$$

Ketika $X_t = x > 0$ dan $t > 0$, maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
V(t+dt, X_{t+dt}) &= V(t,x) + \frac{\partial}{\partial t}V(t,x)dt \\
&+ a(t,x)\frac{\partial}{\partial x}V(t,x)dt + b(t,x)\frac{\partial}{\partial x}V(t,x)dW_t \\
&+ \frac{1}{2}\left(b(t,x)\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}V(t,x)dt.
\end{aligned}$$

Karena $V(T,x) = V(t+dt, X_{t+dt})$ sehingga jika persamaan di atas disubtitusikan ke Persamaan (2.16), maka diperoleh

$$\begin{aligned} V(t,x) = &\sup(E[\int_t^T f(s,x(s),\pi(s))ds + V(t,x) + \frac{\partial}{\partial t}V(t,x)dt \\ &+ a(t,x,\pi)\frac{\partial}{\partial x}V(t,x)dt + b(t,x,\pi)\frac{\partial}{\partial x}V(t,x)dW_t \\ &+ \frac{1}{2}\left(b(t,x,\pi)\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}V(t,x)dt]). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Selanjutnya, untuk mendapatkan nilai V_t maka ada beberapa teorema dan proposisi yang mendasarinya.

Proposisi 2.6.1. Jika $f(x), g(x) : \pi \to \mathbb{R}$ fungsi terbatas, maka

$$\sup_\pi[(f+g)(x)] \leq \sup_\pi f(x) + \sup_\pi g(x)$$

Bukti. Asumsikan $\sup[(f+g)(x)] > \sup f(x) + \sup g(x)$. Jika untuk semua $x \in X$, $(f+g)(x) \leq \sup f(X) + \sup g(X)$ maka $\sup f(X) + \sup g(X)$ adalah batas untuk $\sup[(f+g)(X)]$. Namun, karena $\sup f(X) + \sup g(X) < \sup[(f+g)(X)]$, batas atas terkecil untuk $(f+g)(X)$, ini adalah hal yang tidak mungkin. Maka ada $x \in X$ sedemikian sehingga

$$(f+g)(x) > \sup f(X) + \sup g(X).$$

Akan tetapi, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, dimana $g(x) \leq \sup g(X)$ dan $f(x) \leq \sup f(X)$. Maka,

$$(f+g)(x) \leq \sup f(X) + \sup g(X).$$

Tapi juga telah ditunjukkan bahwa

$$(f+g)(x) \leq \sup f(X) + \sup g(X)$$

yang tidak mungkin, sehingga didapatkan kontradiksi dengan asumsi. □

Teorema 2.6.1. Teorema Nilai Rata-rata. Jika f adalah fungsi kontinu pada interval tutup $[t, T]$, maka ada setidaknya satu c, $t \leq c \leq T$, sehinga

$$f(c)(T-t) = \int_t^T f(x)dx$$

.

Bukti. Karena f adalah fungsi kontinu pada interval tutup $[t, T]$, f mempunyai nilai maksimum M dan minimum m pada $[t, T]$ yaitu $m \leq f(x) \leq M$ pada $[t, T]$, maka

$$m(T-t) \leq \int_t^T f(x)dx \leq M(T-t)$$

sehingga

$$\begin{array}{rcccl} m & \leq & \frac{1}{(T-t)} \int_t^T f(x)dx & \leq & M \\ m & \leq & f(c) & \leq & M \end{array}$$

sehingga

$$f(c)(T-t) = \int_t^T f(x)dx$$

. $\square$

Berdasarkan Proporsi (2.6.1), maka dengan mengurangkan kedua ruas dengan $V(t, x)$ hasilnya adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} V(t,x) =& \sup\left(\int_t^T f(s, x(s), \pi(s))ds\right) + \sup(V(t,x)) + \sup\left(\frac{\partial}{\partial t}V(t,x)dt\right) \\ &+ \sup\left(a(t,x,\pi)\frac{\partial}{\partial x}V(t,x)dt\right) + \sup\left(b(t,x,\pi)\frac{\partial}{\partial x}V(t,x)dW_t\right) \\ &+ \sup\left(\frac{1}{2}\left(b(t,x,\pi)\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}V(t,x)dt\right) \\ V(t,x) =& \sup\left(\int_t^T f(s, x(s)ds, \pi(s))ds\right) + V(t,x) + \frac{\partial}{\partial t}V(t,x)dt \\ &+ \sup\left(a(t,x,\pi)\frac{\partial}{\partial x}V(t,x)dt\right) + \sup\left(b(t,x,\pi)\frac{\partial}{\partial x}V(t,x)dW_t\right) \\ &+ \sup\left(\frac{1}{2}\left(b(t,x,\pi)\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}V(t,x)dt\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t}V(t,x)dt =& \sup\left(\int_t^T f(s, x(s)ds, \pi(s))ds\right) + \sup\left(a(t,x,\pi)\frac{\partial}{\partial x}V(t,x)dt\right) \\ &+ \sup\left(b(t,x,\pi)\frac{\partial}{\partial x}V(t,x)dW_t\right) + \sup\left(\frac{1}{2}\left(b(t,x,\pi)\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}V(t,x)dt\right) \\ -V_t dt =& \sup\left(\int_t^T f(s, x(s)ds, \pi(s))ds\right) + \sup\left(a(t,x,\pi)V_x dt\right) \\ &+ \sup\left(b(t,x,\pi)V_x dW_t\right) + \sup\left(\frac{1}{2}\left(b(t,x,\pi)\right)^2 V_{xx} dt\right) \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata $\int_t^T f(x)dx = f(c)(T-t)$, maka $\int_t^T f(s,x(s),\pi(s))ds = f(t,x(t),\pi(t))dt$, dengan $dt = T-t$ sehingga

$$\begin{aligned} -V_t dt = & \sup\left(f(t,x(t)ds,\pi(t))dt\right) + \sup\left(a(t,x,\pi)V_x dt\right) \\ & + \sup\left(b(t,x,\pi)V_x dW_t\right) + \sup\left(\frac{1}{2}\left(b(t,x,\pi)\right)^2 V_{xx} dt\right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Kemudian bagi dengan dt, sehingga

$$V_t = -\sup\left(f(t,x,\pi) + a(t,x,\pi)V_x + \frac{1}{2}(b(t,x\pi))^2 V_{xx}\right) \tag{2.19}$$

dengan demikian Persamaan (2.19) disebut dengan persamaan Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

Contoh 2.6.1.

$$\begin{aligned} \text{Minimalkan} J(x,\pi) := & \frac{1}{2}[x(T)]^2 \\ \dot{x}(t) = & \pi(t) \quad , \quad t \in [0,T] \\ x(0) = & x \\ -1 \leq \pi(t) \leq +1 & \quad , \quad t \in [0,T] \end{aligned}$$

Tujuannya adalah untuk mengetahui apakah kebijakan π optimal. Untuk membuktikannya, maka yang pertama dilakukan adalah mendapatkan nilai J^*. Sehingga penyelesaiannya adalah:

$$\pi^*(t) = -sgn(x(t)) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

dengan

$$x(T) = \begin{cases} x(0) - T & x(0) > T \\ 0 & -T \leq x(0) \leq T \\ x(0) + T & x(0) < -T \end{cases}$$

Persamaan di atas dapat ditulis dengan memasukkan $T - t$, untuk $t < T$ sehingga

$$J(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[x-(T-t)]^2 & x > (T-t) \\ 0 & -(T-t) \le x \le (T-t) \\ \frac{1}{2}[x+(T-t)]^2 & x < -(T-t) \end{cases}$$

Persamaan di atas dapat diringkas sebagai berikut

$$J^*(x,t) = \max\{0, \frac{1}{2}[|x| - (T-t)]^2\}.$$

Dari persamaan di atas, didapat fungsi nilai $J^*(t,x)$ telah memenuhi $J^*(T,x) = \frac{1}{2}x^2 = h(T,x)$. Selanjutnya turunan dari $J^*(t,x)$ adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^*}{\partial x} &= \frac{\partial[\max\{0, \frac{1}{2}[|x| - (T-t)]^2\}]}{\partial x} \\ &= \frac{|x|}{x}\max\{0, 2.\frac{1}{2}[|x| - (T-t)]\} \\ &= sgn(x)\max\{0, |x| - (T-t)\} \end{aligned}$$

dan

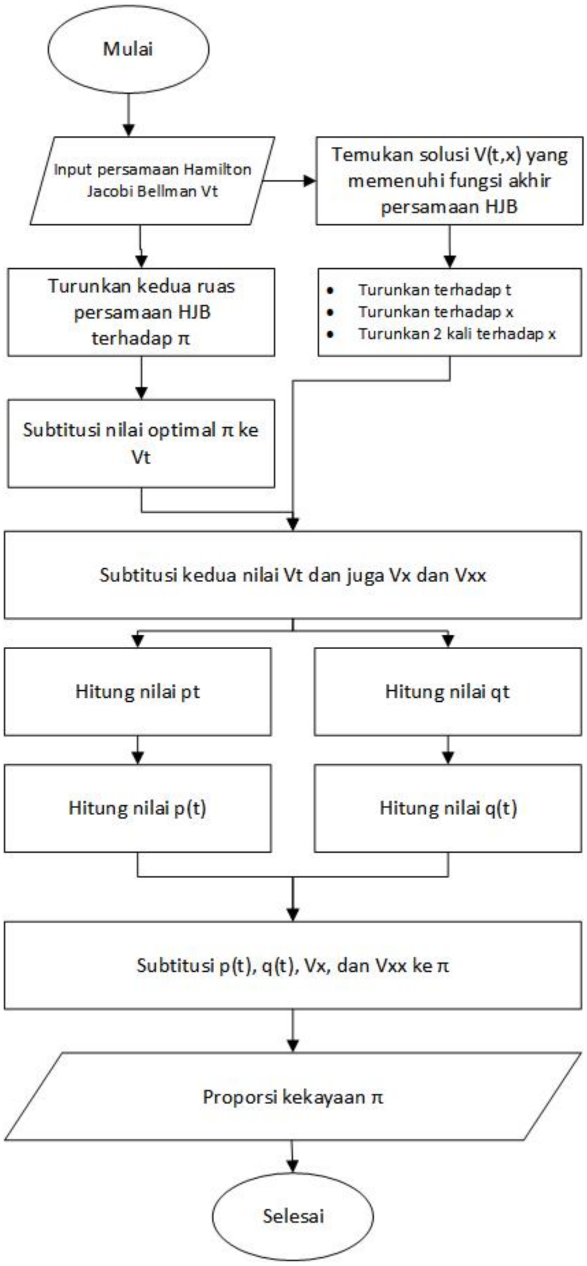
$$\begin{aligned} \frac{\partial J^*}{\partial t} &= \frac{\partial[\max\{0, \frac{1}{2}[|x| - (T-t)]^2\}]}{\partial t} \\ &= \frac{\partial[\max\{0, \frac{1}{2}[x^2 - 2|x|(T-t) + (T-t)^2]\}]}{\partial t} \\ &= \frac{\partial[\max\{0, \frac{1}{2}[x^2 - 2|x|T + 2|x|t + T^2 - 2Tt + t^2]\}]}{\partial t} \\ &= \max\{0, \frac{1}{2}[2|x| - 2T + 2t]\} \\ &= \max\{0, |x| - (T-t)\}. \end{aligned}$$

Subtitusi pada HJB, maka

$$\begin{aligned} 0 &= \inf_{\pi}[0 + sgn(x)\pi\max\{0, |x| - (T-t)\} + \max\{0, |x| - (T-t)\}] \\ &= \inf_{\pi}[(1 + sgn(x)\pi)\max\{0, |x| - (T-t)\}]. \end{aligned}$$

Dengan demikian, jelas persamaan di atas berlaku untuk semua $t \in [0, T]$ dan semua $x \in \mathbb{R}$. Selain itu, minimum dicapai untuk π.

Diagram Alir Menentukan Kontrol Optimal Pada Persamaan Hamilton-Jacobi-Bellman



Gambar 2.4: Diagram Alir

Penjelasan diagram alir berdasarkan Gambar (2.4) di atas adalah sebagai berikut:

- Tahapan pertama, menentukan persamaan HJB berdasarkan persamaan kekayaan, dimana fungsi akhir $V(T, x)$ merupakan suatu fungsi yang akan dimaksimalkan. Sehingga dapat dibentuk solusi untuk $V(t, x)$ yang memenuhi fungsi akhir $V(T, x)$.

- Tahapan kedua, turunkan kedua ruas persamaan HJB terhadap π, sehingga di dapat kontrol optimal π. Disisi lain, turunkan solusi $V(t, x)$ terhadap t sehingga didapat V_t, dan terhadap x sehingga didapat V_x, dan turunkan dua kali terhadap x sehingga didapat V_{xx}.

- Tahapan ketiga, subtitusi kontrol optimal π ke persamaan awal HJB V_t.

- Tahapan keempat, subtitusi kedua nilai V_t dan juga V_x dan V_{xx}.

- Tahapan kelima, kemudian sederhanakan sehingga didapat dinilai p_t dan juga q_t

- Tahapan keenam, kemudian hitung nilai $p(t)$ dan $q(t)$ dengan cara mengintegralkan p_t dan q_t.

- Tahapan akhir,subtitusi nilai p_t, q_t, V_x, dan V_{xx} ke kontrol optimal. Sehingga didapat suatu kontrol optimal.