BAB III

PEMBAHASAN

Strategi investasi jangka panjang berkaitan dengan masalah kontrol optimal dengan tujuan untuk memaksimalkan fungsi utilitas. Kontrol optimal yang didapat merupakan suatu proporsi kekayaan investor yang diinvestasikan pada aset berisiko.

3.1 Fungsi Utilitas Dengan Dua Parameter

Fungsi utilitas banyak digunakan pada permasalahan di bidang ekonomi keuangan, karena fungsi utilitas mengukur 'nilai' dari kekayaan seorang investor. Pada kasus ini digunakan fungsi utilitas cekung karena mencerminkan sikap penghindaran risiko.

Diasumsikan fungsi utilitas seorang investor adalah

$$u_\gamma(x) = \gamma^{-1}x^\gamma$$

dimana x merupakan kekayaan dan

$$\begin{aligned} R_r(x) &= -x\frac{u''(x)}{u'(x)} \\ &= -x\frac{(\gamma-1)x^{\gamma-2}}{x^{\gamma-1}} \\ &= 1-\gamma \end{aligned}$$

merupakan tingkat penghindaran risiko, dimana x dan $1-\gamma$ adalah bilangan riil positif.

Dalam permasalahan ini, investor yang menghindari risiko menetapkan suatu nilai, K, agar investasinya tidak jatuh di bawah nilai tersebut. K disebut sebagai *floor* pada strategi CPPI, yaitu sebagai parameter tambahan. Sehingga fungsi utilitas menjadi:

$$u_{\gamma,K}(x) = \gamma^{-1}(x+K)^{\gamma} \tag{3.1}$$

dimana $x > -K$ dan $1-\gamma > 0$. Sehingga penghindaran risiko relatif nya menjadi

$$\begin{aligned} R_r(x) &= -x\frac{u''(x)}{u'(x)} \\ &= -x\frac{(\gamma-1)(x+K)^{\gamma-2}}{(x+K)^{\gamma-1}} \\ &= (1-\gamma)\frac{x}{x+K} \end{aligned}$$

3.2 Optimasi Investasi Dengan Hamilton-Jacobi-Bellman

Tujuan dari optimasi investasi ini adalah untuk mendapatkan kontrol optimal atau dalam masalah ini adalah proporsi kekayaan yang akan diinvestasikan pada aset berisiko dengan investor yang menghindari risiko. Sehingga masalah kontrol dinotasikan dengan fungsi nilai $J : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$

$$J(t,x,\pi) = E[\Phi(X(T))] = E[\frac{1}{\gamma}(X(T)+K)^{\gamma}] \tag{3.2}$$

$$V(t,x) = \sup_{\pi\in\mathcal{U}} J(t,x,\pi) \tag{3.3}$$

dimana $\frac{1}{\gamma}(X(T)+K)^{\gamma}$ merupakan *terminal function* (fungsi akhir) dengan persamaan Hamilton Jacobi Bellman

$$V_t(x,t) = -\sup_{\pi}\{f(t,x(t),\pi(t)) + V_x(t,x)k(t,x(t),\pi(t)\}.$$

harus memenuhi kondisi $V(T,x) = \frac{1}{\gamma}(X(T)+K)^{\gamma}$ agar dikatakan optimal, $\mathcal{U}$ adalah himpunan *admissible control* (kontrol yang diperkenankan). Persamaan kekayaan X diberikan sebagai berikut

$$dX(t) = ((r + \alpha\pi(t))X(t) + c(t))dt + \sigma\pi(t)X(t)dW(t) \tag{3.4}$$

dimana r merupakan suku bunga, α merupakan *expected return* pada aset berisiko, $c(t)$ adalah fungsi konsumsi terhadap waktu, σ adalah volatilitas dari saham, dan π adalah proporsi kekayaan yang diinvestasikan pada aset berisiko.

Sehingga menurut persamaan (2.19) dengan persamaan kekayaan (3.4), maka persamaan HJB menjadi

$$V_t = -\sup_{\pi}\left[V_x\left((r+\pi\alpha)x + c\right) + \frac{1}{2}V_{xx}\pi^2\sigma^2x^2\right] \tag{3.5}$$

Dengan menurunkan persamaan (3.5) terhadap π, maka diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= -V_x\alpha x - V_{xx}\pi^*\sigma^2x^2 \\ \pi^* &= -\frac{\alpha}{\sigma^2x}\frac{V_x}{V_{xx}} \end{aligned}$$

dan subtitusi π^* pada V_t

$$\begin{aligned} V_t &= -\left[V_x\left((r + \left(-\frac{\alpha}{\sigma^x}\frac{V_x}{V_{xx}}\right)\alpha)x + c\right) + \frac{1}{2}V_{xx}\left(-\frac{\alpha}{\sigma^x}\frac{V_x}{V_{xx}}\right)^2\sigma^2x^2\right] \\ V_t &= -(rx + c(t))V_x + \frac{\alpha^2}{\sigma^2}\frac{V_x^2}{V_{xx}} - \frac{\alpha^2}{\sigma^2}\frac{V_x^2}{V_{xx}} \\ V_t &= -(rx + c(t))V_x + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\frac{V_x^2}{V_{xx}} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dengan diketahui kondisi akhir adalah sebagai berikut

$$V(T,x) = \frac{1}{\gamma}(x+K)^{\gamma}, \tag{3.7}$$

sehingga dapat diduga sebuah solusi dengan bentuk sebagai berikut

$$V(t,x) = \frac{1}{\gamma}p(t)^{1-\gamma}\left(x + q(t)\right)^{\gamma}, \tag{3.8}$$

sehingga untuk memenuhi Persamaan (3.7), maka $p(T) = 1$ dan $q(T) = K$.

Dengan menurunkan Persamaan (3.8) terhadap t dan x, maka diperoleh

$$V_t = \frac{1-\gamma}{\gamma} p(t)^{-\gamma} p_t \left(x + q(t)\right)^{\gamma} + \frac{1}{\gamma} p(t)^{1-\gamma} \gamma \left(x + q(t)\right)^{\gamma-1} q - t \quad (3.9)$$

$$V_x = p(t)^{1-\gamma} p_t \left(x + q(t)\right)^{\gamma-1} \quad (3.10)$$

$$V_{xx} = (\gamma - 1) p(t)^{1-\gamma} p_t \left(x + q(t)\right)^{\gamma-2} \quad (3.11)$$

Diidentifikasi bahwa V sebagai fungsi nilai optimal, maka Persamaan (3.5) dapat ditulis ulang menjadi

$$V_t = -r(x + q(t))V_x + rq(t)V_x - c(t)V_x + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\frac{V_x^2}{V_{xx}} \quad (3.12)$$

dengan demikian didapat dua nilai V_t yaitu persamaan (3.9) dan (3.12), dan dengan mensubtitusi persamaan (3.9) ke persamaan (3.12) maka

$$\begin{aligned}
& \frac{1-\gamma}{\gamma} p(t)^{-\gamma} p_t \left(x + q(t)\right)^{\gamma} + \frac{1}{\gamma} p(t)^{1-\gamma} \gamma \left(x + q(t)\right)^{\gamma-1} q_t \\
= \; & -r(x + q(t))V_x + rq(t)V_x - c(t)V_x + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\frac{V_x^2}{V_{xx}}
\end{aligned}$$

sehingga didapat bentuk sederhananya sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \frac{1-\gamma}{\gamma} p(t)^{-\gamma} p_t \left(x + q(t)\right)^{\gamma} + \frac{1}{\gamma} p(t)^{1-\gamma} \gamma \left(x + q(t)\right)^{\gamma-1} q_t \\
= \; & -r(x + q(t)) p(t)^{1-\gamma} p_t \left(x + q(t)\right)^{\gamma-1} + rq(t) p(t)^{1-\gamma} p_t \left(x + q(t)\right)^{\gamma-1} \\
& -c(t) p(t)^{1-\gamma} p_t \left(x + q(t)\right)^{\gamma-1} + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\frac{[p(t)^{1-\gamma} p_t \left(x + q(t)\right)^{\gamma-1}]^2}{(\gamma - 1) p(t)^{1-\gamma} p_t \left(x + q(t)\right)^{\gamma-2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1-\gamma}{\gamma} p(t)^{-\gamma} p_t \left(x + q(t)\right)^{\gamma} + p(t)^{1-\gamma} \left(x + q(t)\right)^{\gamma-1} q_t \\
= \; & -rp(t)^{1-\gamma}(x + q(t))^{\gamma} + (rq(t) - c) p(t)^{1-\gamma}(x + q(t))^{\gamma-1} \\
& + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\frac{p(t)^{2-2\gamma}(x + q(t))^{2\gamma-2}}{(\gamma - 1) p(t)^{1-\gamma}(x + q(t))^{\gamma-2}}.
\end{aligned}$$

Dengan membagi persamaan di atas dengan $(x+q(t))^{\gamma}$, maka

$$\begin{aligned}
\frac{1-\gamma}{\gamma}p(t)^{-\gamma}p_t &= -rp(t)^{1-\gamma}+\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\frac{p(t)^{1-\gamma}}{\gamma-1} \\
\frac{1-\gamma}{\gamma}p(t)^{-\gamma}p_t &= -p(t)^{1-\gamma}\left(r-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\frac{1}{\gamma-1}\right) \\
p_t &= \frac{-p(t)^{1-\gamma}\gamma}{p(t)^{-\gamma}(1-\gamma)}\left(r-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\frac{1}{\gamma-1}\right) \\
p_t &= -p(t)\frac{\gamma}{1-\gamma}\left(r-\frac{1}{2}\frac{1}{(\gamma-1)}\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\right).
\end{aligned}$$

Dengan telah diketahui $p(T)=1$, maka

$$\begin{aligned}
p(t) &= \int_t^T p_t dt \\
&= \int_t^T \left[-p(t)\frac{\gamma}{1-\gamma}\left(r-\frac{1}{2}\frac{1}{(\gamma-1)}\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\right)\right]dt \\
&= \exp\left[\frac{\gamma}{1-\gamma}\left(r-\frac{1}{2}\frac{1}{(\gamma-1)}\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\right)(T-t)\right].
\end{aligned}$$

Begitu juga jika dibagi dengan $(x+q(t))^{\gamma-1}$, maka

$$\begin{aligned}
p(t)^{1-\gamma}q_t &= p(t)^{1-\gamma}(rq(t)-c) \\
q_t &= \frac{p(t)^{1-\gamma}(rq(t)-c)}{p(t)^{1-\gamma}} \\
q_t &= rq(t)-c
\end{aligned}$$

Dengan telah diketahui $q(T)=K$, maka

$$\begin{aligned}
q(t) &= \int_t^T q_t dt \\
&= \int_t^T (rq(t)-c)dt \\
&= \int_t^T rq(t)dt - \int_t^T cdt \\
&= Ke^{-r(T-t)}+\int_t^T c(s)e^{-r(T-t)}ds,
\end{aligned}$$

dengan memisalkan $\int_t^T c(s)e^{-r(T-t)}ds = g(t)$, maka

$$q(t) = Ke^{-r(T-t)} + g(t).$$

Telah diketahui kontrol optimal π^* sebagai berikut

$$\begin{aligned}\pi^* &= -\frac{\alpha}{\sigma^2 x}\frac{V_x}{V_{xx}} \\ &= -\frac{\alpha}{\sigma^2 x}\frac{p(t)^{1-\gamma}p_t\,(x+q(t))^{\gamma-1}}{(\gamma-1)p(t)^{1-\gamma}p_t\,(x+q(t))^{\gamma-2}} \\ &= \frac{1}{1-\gamma}\frac{\alpha}{\sigma^2}\frac{x+q(t)}{x}\end{aligned} \tag{3.13}$$

dengan mensubtitusi $q(t)$ ke persamaan (3.13), maka

$$\pi^* = \frac{1}{1-\gamma}\frac{\alpha}{\sigma^2}\frac{x+Ke^{-r(T-t)}+g(t)}{x}. \tag{3.14}$$

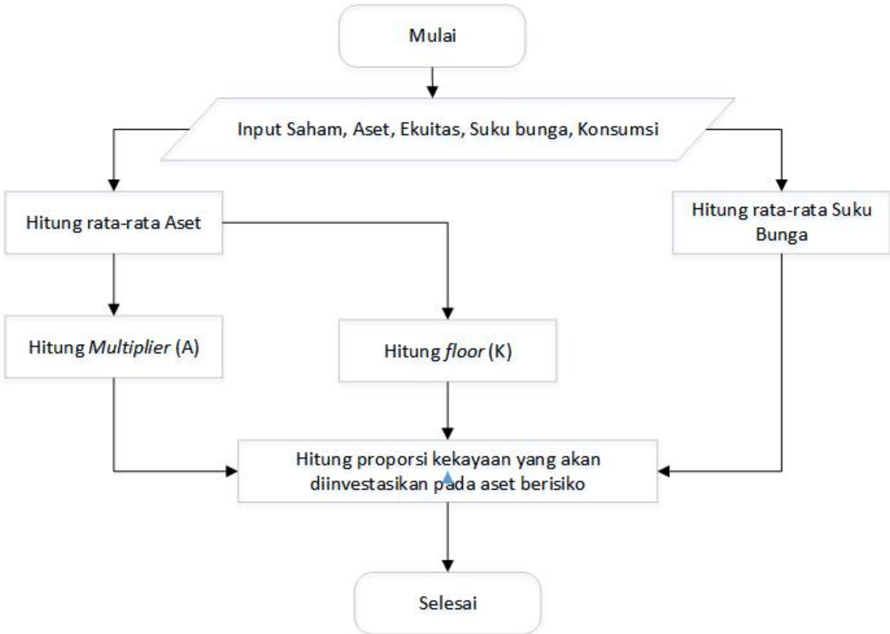
Dengan demikian, persamaan di atas merupakan proporsi kekayaan yg diinvestasikan pada aset berisiko.

3.3 Contoh Kasus

Pada contoh kasus ini akan dihitung besar proporsi kekayaan yang harus diinvestasikan pada aset berisiko dari dua perusahaan yang memiliki tingkat kekayaan yang berbeda. Akan dilihat bagaimana tingkat penghindaran risiko seseorang dan tingkat kekayaan mempengaruhi besar proporsi kekayaan seorang investor.

Data yang digunakan adalah data laporan keuangan PT TELEKOMUNIKASI INDONESIA Tbk dengan kode saham TLKM dan PT WASKITA KARYA (PERSERO) Tbk dengan kode saham WSKT dari Maret 2015 sampai dengan Maret 2016. Data laporan keuangan diambil dari website Bursa Efek Indonesia (BEI) dan data suku bunga di ambil dari website Bank Indonesia (BI). Pengolahan data dilakukan dengan menggunakan *Software R*

3.3.0. Data input yang diperlukan disajikan dalam lampiran. Diagram alir dari contoh kasus yang akan dianalisis ditampilkan dibawah ini.



Gambar 3.1: Diagram Alir Contoh Kasus

Tahapan awal yaitu menghitung rata-rata nilai aset, suku bunga, dan liabilitas perusahaan selama periode Maret 2015-Maret 2017. Dimana liabilitas merupakan suatu kewajiban yang harus dibayar oleh perusahaan. Rata-rata suku bunga periode Maret 2015 - Maret 2016 didapat sebesar $7,35119\%$ dan hasil perhitungan rata-rata untuk nilai aset, suku bunga dan liabilitas ditampilkan pada tabel berikut.

Tabel 3.1: Rata-rata Aset dan Liabilitas TLKM

Bulan	Aset	Liabilitas
Maret 2015	Rp146.672.000.000.000	Rp23.093.000.000.000
Juni 2015	Rp154.050.000.000.000	Rp37.405.000.000.000
September 2015	Rp158.394.000.000.000	Rp37.399.000.000.000
Desember 2015	Rp166.173.000.000.000	Rp37.332.000.000.000
Maret 2016	Rp176.992.000.000.000	Rp37.672.000.000.000
Rata-rata	**Rp160.456.200.000.000**	**Rp34.580.200.000.000**

Tabel 3.2: Rata-rata Aset dan Liabilitas WSKT

Bulan	Aset	Liabilitas
Maret 2015	Rp13.089.813.304.630	Rp2.097.078.482.776
Juni 2015	Rp18.568.486.421.000	Rp2.073.104.369.782
September 2015	Rp23.349.744.927.896	Rp2.215.011.710.137
Desember 2015	Rp30.309.111.177.468	Rp6.940.092.700.530
Maret 2016	Rp33.911.269.080.238	Rp6.764.770.456.700
Rata-rata	**Rp23.845.684.982.246**	**Rp4.018.011.543.985**

Tahapan kedua yaitu menghitung *multiplier A*. Nilai proporsi kekayaan didasarkan pada strategi CPPI yaitu jumlah kekayaan yang di investasikan pada aset berisiko sama dengan *multiplier* dikali *cushion*. Dengan nilai proporsi sebagai berikut

$$\pi^* = \frac{1}{1-\gamma}\frac{\alpha}{\sigma^2}\frac{x + Ke^{-r(T-t)} + g(t)}{x},$$

maka *multiplier* $A = \frac{1}{1-\gamma}\frac{\alpha}{\sigma^2}$ dan *cushion* nya adalah $x + Ke^{-r(T-t)} + g(t)$. *Multiplier A* bisa juga didapat dengan menghitung presentase kerugian maksimum investor dan nilainya adalah kebalikan dari presentase tersebut. Diketahui kerugian maksimum investor adalah sebagai berikut.

Tabel 3.3: Data kerugian maksimum TLKM

Tingkat Kepercayaan	**Kerugian Maksimum**
99%	Rp5.766.456.000.000
$97,5\%$	Rp4.778.672.000.000
95%	Rp4.189.578.000.000

Tabel 3.4: Data kerugian maksimum WSKT

Tingkat Kepercayaan	**Kerugian Maksimum**
99%	Rp1.049.967.000.000
$97,5\%$	Rp903.587.368.324
95%	Rp772.759.375.230

Dengan tingkat kepercayaan yang berbeda-beda, maka hasil pengurangan 100% dengan tingkat kepercayaan adalah presentase ketidakyakinan investor terhadap nilai yang telah diputuskan. Presentase ketidakyakinan ini diasumsikan sebagai nilai γ yaitu sebagai parameter risiko. Sehingga nilai-nilai γ adalah 0,01 untuk tingkat kepercayaan 99%; 0,025 untuk tingkat kepercayaan 97,5%; dan 0,05 untuk tingkat kepercayaan 95%.

Dengan membagi nilai kerugian maksimum dengan rata-rata aset pada Tabel (3.1) dan (3.2) kemudian dikali 100% maka didapat presentase kerugian maksimum, sehingga nilai *multiplier*nya adalah

Tabel 3.5: Nilai *Multiplier*

γ	**TLKM**	**WSKT**
0,01	$27,83$	$22,71$
0,025	33.58	$26,39$
0,05	38.30	$30,86$

Tahapan ketiga adalah menghitung nilai *floor* K. Nilai K didapat dengan mengurangkan aset dengan kerugian maksimum investor. Sehingga hasil nilai *floor* K dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 3.6: Nilai *Floor*

γ	**TLKM**	**WSKT**
0,01	Rp154.689.744.000.000	Rp22.795.717.982.246
0,025	Rp155.677.528.000.000	Rp22.942.097.613.922
0,05	Rp156.266.622.000.000	Rp23.072.925.607.016

Tahapan keempat yaitu menghitung proporsi kekayaan yang diinvestasikan pada aset berisiko, yaitu dengan mensubtitusi nilai *multiplier* A, nilai *floor* K, nilai γ, rata-rata aset $x(t)$, rata-rata suku bunga, dan rata-rata liabilitas $g(t)$ ke dalam proporsi π. Hasil perhitungannya adalah sebagai berikut.

Tabel 3.7: Nilai π

γ	**TLKM**	**WSKT**
0,01	$59,15\%$	$47,04\%$
0,025	$71,57\%$	$54,81\%$
0,05	$81,77\%$	$64,25\%$

Pada Tabel (3.1), TLKM dengan rata-rata aset sebesar Rp160.456.200.000.000 menghasilkan proporsi yang akan diinvestasikan sebesar 59,15% dengan nilai $\gamma = 0,01$ dan dengan nilai γ yang sama, pada Tabel (3.2) WSKT dengan rata-rata aset sebesar Rp23.845.684.982.246 menghasilkan proporsi yang akan diinvestasikan sebesar 47,04%. Hal ini menunjukkan bahwa TLKM dengan tingkat kekayaan yang lebih tinggi dari WSKT, menghasilkan proporsi yang lebih besar dibandingkan dengan WSKT. Hal ini mengartikan bahwa semakin tinggi kekayaan seseorang, maka semakin besar pula proporsi kekayaan yang akan mereka investasikan pada aset berisiko.

Tahapan akhir yaitu menghitung tingkat penghindaran risiko. Telah diketahui untuk menghitung tingkat penghindaran risiko relatif adalah sebagai berikut

$$R_r(x) = (1-\gamma)\frac{x}{x+K}.$$

Dengan mensubtitusi nilai γ, rata-rata aset x, dan nilai *floor* K ke dalam $R_r(x)$, maka hasil dari perhitungan tingkat penghindaran risiko relatif ditampilkan pada tabel berikut

Tabel 3.8: Tingkat Penghindaran Risiko Relatif

γ	**TLKM**	**WSKT**
0,01	$0,504$	$0,506$
0,025	$0,494$	$0,496$
0,05	$0,481$	$0,482$

Pada Tabel (3.7), dengan $\gamma = 0,01$, proporsi kekayaan TLKM adalah sebesar 59,15% dan tingkat penghindaran risikonya didapat sebesar 0,504 pada Tabel (3.8). Sedangkan, dengan gamma 0,025 proporsi kekayaan TLKM adalah sebesar 71,57% dan tingkat penghindaran risikonya didapat sebesar 0,494. Hal ini menunjukkan bahwa semakin besar tingkat penghindaran risiko seseorang, maka proporsi yang mereka akan investasikan pada aset berisiko akan semakin kecil.