PERHITUNGAN PREMI ASURANSI JIWA SEUMUR HIDUP DENGAN METODE DISTORSI

Skripsi
Disusun untuk melengkapi syarat-syarat
guna memperoleh gelar Sarjana Sains

PUTRI ARUM NOVIANIE
3125102323

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA
2017

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

PERHITUNGAN PREMI ASURANSI JIWA SEUMUR HIDUP DENGAN METODE DISTORSI

Nama : Putri Arum Novianie

No. Registrasi : 3125102323

		Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab				
Dekan	:	Prof. Dr. Suyono, M.Si.	....	....
		NIP. 19671218 199303 1 005		
Wakil Penanggung Jawab				
Wakil Dekan I	:	Dr. Muktiningsih,M.Si.	....	....
		NIP. 19640511 198903 2 001		
Ketua	:	Dra. Widyanti Rahayu, M.Si	....	....
		NIP. 19661103 200112 2 001		
Sekretaris	:	Med Irzal, M.Kom.	....	....
		NIP. 19770615 200312 1 001		
Penguji Ahli	:	Ir. Fariani Hermin, MT.	....	....
		NIP. 19600211 198703 2 001		
Pembimbing I	:	Drs. Sudarwanto, M.Si., DEA	....	....
		NIP. 19650325 199303 1 003		
Pembimbing II	:	Vera Maya Santi, M.Si.	....	....
		NIP. 19790531 200501 2 006		

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal: 11 Agustus 2017

ABSTRACT

PUTRI ARUM NOVIANIE, 3125102323. Pricing Whole Life Insurance With Distortions. Thesis. Faculty of Mathematics and Natural Science Jakarta State University. 2017.

This thesis discuss about pricing whole life insurance premium with distortions method. To provide the right premium value, the actuary added loading risk to the pricing whole life insurance premium. Pricing life insurance with distortion devided into two types, that is pricing life insurance with distorted probabilities and pricing life insurance with distorted outcomes. The formula of pricing life insurance with distorted outcomes can be calculated by using Dual Representation and Fenchel-Young Inequalities

Keywords *: life insurance, stochastic dominance, comonotonicity, risk measures, distorted premium functionals, Dual Representation, Fenchel-Young Inequality.*

ABSTRAK

PUTRI ARUM NOVIANIE, 3125102323. Perhitungan Premi Asuransi Jiwa Seumur Hidup Dengan Metode Distorsi. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. 2017.

Skripsi ini membahas tentang perhitungan premi asuransi jiwa seumur hidup dengan metode distorsi. Untuk menyediakan nilai premi yang tepat, aktuaris dapat menambahkan bobot risiko pada perhitungan premi asuransi. Penambahan bobot risiko pada perhitungan premi ini disebut dengan metode distorsi. Perhitungan premi asuransi dengan metode distorsi dibagi dalam dua jenis, yaitu perhitungan premi dengan ukuran probabilitas yang terdistorsi dan perhitungan premi dengan fungsi *outcomes* yang terdistorsi. Rumus premi dengan fungsi *outcomes* terdistorsi diperoleh dengan mengerjakan *Representasi Dual* dan *Ketaksamaan Fenchel-Young.*

Kata kunci : asuransi jiwa, stokastik dominan, *comonotonicity*, ukuran risiko, fungsi premi terdistorsi, Representasi Dual, Ketaksamaan Fenchel-Young.

PERSEMBAHANKU...

"Maka Sesungguhnya beserta kesukaran ada kemudahan, maka apabila engkau telah selesai dari suatu urusan maka kerjakanlah urusan yang lain dengan sungguh-sungguh dan hanya kepada Allah hendaklah engkau berharap "

(QS. Al Insyiraah 94 : 5-8)

"Bersabarlah seperti air. Terus mengalir kebawah sesuai hukum alamnya, ketemu rintangan dia berbelok, ketemu celah kecil dia menyelip, ketemu batu dia menyibak, ketemu bendungan dia terus mengumpulkan diri sendiri, sehingga semakin banyak, semakin tinggi, penuh terlampaui bendungan tersebut, untuk kemudian mengalir lagi. Seolah dia tidak melakukan apapun, hanya diam, sabar, tenang, tetapi sedang berusaha habis-habisan. Bersabarlah seperti air, ketika orang-orang tidak tahu betapa besar dan menakjubkannya rasa sabar tersebut."

-Tere Liye

Skripsi ini kupersembahkan untuk Mama, Alm. Bapak, dan Adikku..

"Terima kasih atas dukungan, do'a, serta kasih sayang kalian... ".

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT atas segala kemudahan yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi yang berjudul "Perhitungan Premi Asuransi Jiwa Seumur Hidup Dengan Metode Distorsi" karena penulis sadar benar dirinya banyak kekurangan dalam porsi pengetahuan, kepandaian dalam bidang matematika, yang merupakan salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Sains Jurusan Matematika Universitas Negeri Jakarta.

Skripsi ini berhasil diselesaikan tak lepas dari bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Mama Acih R. tercinta, Bapak Marpudin (Alm) tercinta, dan adikku M. Fajar Abdi dan Kayla Syafista P. yang tiada hentinya mendoakan, memberikan masukan, dorongan, bahkan jalan keluar yang ajaib dalam penyelesaian skripsi ini. Terima kasih atas kesabaran kalian menunggu penulis menyelesaikan skripsi ini.

2. Bapak Drs. Sudarwanto, M.Si, DEA. selaku Dosen Pembimbing I dan Ibu Vera Maya Santi, M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, saran, nasehat, serta pengarahan dalam pengerjaan skripsi ini sehingga menjadi lebih baik. Terima kasih banyak dan maaf atas segala kekurangan saya, semoga kesehatan selalu tercurah kepada Bapak berdua dan keluarga.

3. Bapak Dr. Lukita Ambarwati, S.Pd., M.Si. selaku Ketua Prodi Matematika FMIPA UNJ. Terima kasih atas segala bantuan dan kerja sama Ibu selama pengerjaan skripsi ini.

4. Ibu Dra. Widyanti Rahayu, M.Si selaku pembimbing akademik. Terima kasih atas segala ilmu, nasihat, semangat yang ibu berikan hingga saya dapat menyelesaikan semuanya. Perhatian ibu sangat berharga. Semoga Allah selalu mengaruniakan keberkahan kepada Ibu sekeluarga.

5. Sahabat terbaik Putri Rohmawati dan Mariyana Ramadhan, terima kasih atas bantuan, dukungan, dan saran saat penulis mengalami kesulitan saat penyelesaian skripsi ini. Terima kasih karena kalian selalu ada dalam masa-masa sulit penulis. Semoga kalian selalu diberi kesehatan dan kebahagiaan.

6. Sahabat terbaik Dwi Ariyani dan Delsi Armirani. Terima kasih atas semua dukungan dan doa disaat penulis sedang menyelesaikan skripsi ini. Terima kasih juga atas waktu-waktu yang telah kita lewati bersama dari mulai masuk kuliah sampai saat ini.

7. Teman-teman yang paling baik yang selalu mendukung penulis Riska N.S, Mega, Efri, beserta teman-teman Matematika 2010 lainnya yaitu Devi, Sifa, Ece, Mudita, Diesty, Anis, Dina, Rista, Rayvin, Faiz, Adi, Sandi, Taufan, Antoni, Fajar, Saget, Jefry, Agil, Ipul. Terima kasih atas bantuan dan dukungan kalian. Semoga kalian selalu diberi kesehatan dan kebahagiaan.

Penulis menyadari skripsi ini masih jauh dari sempurna. Masukan dan kritik akan sangat berarti. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Jakarta, Agustus 2017

Putri Arum Novianie

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$	:	ruang probabilitas
A_x	:	premi tunggal bersih untuk seseorang yang berusia x tahun
b_{k+1}	:	fungsi uang pertanggungan
v_{k+1}	:	fungsi diskonto
σ	:	fungsi distorsi
L_σ	:	kerugian acak dengan ukuran probabilitas terdistorsi
L'_σ	:	kerugian acak dengan fungsi *outcomes* terdistorsi
π	:	fungsi premi
ρ	:	ukuran risiko
δ	:	*Dirac Measure*
$\mathbb{1}$	:	fungsi indikator
$\int f(s)\mathrm{d}G(s)$	:	Integral Riemann-Stieltjes untuk fungsi f dengan integrator $G(s)$
$\mathbb{L}^1$	:	ruang dari variabel acak yang terintegralkan
$\mathbb{L}^\infty$	:	ruang dari variabel acak yang terbatas esensial
$[x]_+$	:	$\max\{x, 0\}$

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam kehidupan sehari-hari akan selalu ada risiko yang membayangi hidup seseorang. Risiko dapat didefinisikan sebagai bahaya, akibat, atau konsekuensi yang bisa terjadi yang disebabkan oleh proses yang sedang berlangsung maupun kejadian tertentu yang akan terjadi di masa yang akan datang. Contoh risiko yang biasa dihadapi oleh seseorang misalnya sakit, kecelakaan, maupun risiko finansial yang disebabkan oleh meninggalnya seseorang. Cara menanggulangi risiko adalah dengan mengikutsertakan diri pada program asuransi, dimana mekanisme asuransi adalah memproteksi atau melindungi diri dari risiko kerugian keuangan dengan cara mengalihkan risiko kepada pihak lain dalam hal ini perusahaan asuransi. Salah satu jenis asuransi yang sedang berkembang saat ini adalah asuransi jiwa dimana asuransi jiwa berperan dalam menanggulangi risiko finansial akibat meninggalnya seseorang dalam suatu keluarga.

Seiring dengan semakin berkembangnya industri asuransi jiwa di Indonesia, maka persaingan antar perusahaan asuransi semakin ketat. Untuk mengatasi hal ini, perusahaan asuransi jiwa harus berinovasi menciptakan produk asuransi agar dapat menarik minat masyarakat untuk bergabung pada perusahaan. Salah satu upaya yang dapat dilakukan oleh perusahaan asuransi adalah merumuskan harga premi asuransi yang dapat bersaing di pasaran. Dalam merumuskan harga premi asuransi harus dilakukan dengan sangat hati-hati agar tidak memberatkan pemegang polis tetapi juga tidak menyebabkan kebangkrutan bagi perusahaan. Premi asuransi dapat diartikan sebagai sejumlah dana yang harus dibayarkan oleh pemegang polis (tertanggung) kepada perusahaan asuransi sebagai pihak penanggung sebagai imbalan jaminan asuransi yang dikehendakinya dan besarnya sudah ditentukan bersama dalam sebuah kontrak asuransi.

Mengingat pentingnya premi dalam sebuah industri asuransi, maka dalam pemilihan metode perhitungan harga premi harus dilakukan dengan sangat hati-hati. Metode perhitungan premi yang cukup diminati saat ini adalah perhitungan premi yang disesuaikan dengan risiko atau dikenal dengan nama premi risiko. Premi risiko merupakan premi asuransi yang dalam perhitungannya sudah disertakan dengan faktor risiko tertentu, diluar faktor *loading* (biaya administrasi, biaya pajak, gaji pegawai, dan lain-lain). Pemilihan ukuran risiko dalam perhitungan premi menjadi sangat penting karena harus dapat mempresentasikan data yang ada, karena apabila terjadi kesalahan dalam pengukuran risiko maka premi yang sudah ditetapkan menjadi tidak sesuai sehingga dana yang terkumpul menjadi tidak cukup untuk melakukan pembayaran klaim di masa yang akan datang.

Salah satu ukuran risiko yang sudah dikembangkan dalam asuransi adalah ukuran risiko distorsi. Mekanisme perhitungan premi dengan ukuran distorsi adalah dengan memberikan bobot risiko pada ukuran probabilitasnya sehingga nilai premi yang diperoleh akan lebih besar dari premi neto (premi bersih). Pemberian bobot risiko pada perhitungan premi dapat disesuaikan dengan kondisi besarnya peluang kerugian yang akan dialami oleh perusahaan, yaitu untuk klaim dengan risiko kerugian yang lebih besar akan diberikan bobot risiko yang lebih besar dan untuk klaim dengan risiko kerugian yang lebih kecil akan diberikan bobot risiko yang lebih kecil pula. Perhitungan premi asuransi dengan ukuran risiko distorsi ini dikenalkan oleh Wang (1998) dan dikembangkan oleh Heras, Balb*á*s, dan Vilar (2002).

Pada tulisan ini akan mempelajari perhitungan premi asuransi dengan ukuran risiko distorsi dari sudut pandang yang berbeda, dimana pemberian bobot distorsi tidak dilakukan pada ukuran probabilitasnya melainkan pada fungsi *outcomes*nya. Perhitungan premi asuransi dengan metode distorsi yang baru ini akan menghasilkan nilai premi yang berbeda sehingga dapat menjadi pilihan alternatif bagi aktuaris. Perumusan premi asuransi dengan metode distorsi yang baru ini mengacu pada jurnal yang ditulis oleh Alois Pichler (2013).

1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah yang akan dikaji adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menghitung premi asuransi jiwa seumur hidup dengan ukuran probabilitas yang terdistorsi?
2. Bagaimana menghitung premi asuransi jiwa seumur hidup dengan fungsi *outcomes* yang terdistorsi?

1.3 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah dalam penulisan ini adalah:

1. Perhitungan premi asuransi jiwa seumur hidup dilakukan untuk pembayaran manfaat asuransi dengan metode diskrit,
2. Faktor *loading* dalam perhitungan premi akan diabaikan.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan yang ingin dicapai dalam skripsi ini adalah mempelajari cara perhitungan premi asuransi jiwa dengan metode distorsi.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari skripsi ini adalah memperoleh sebuah model perhitungan premi asuransi jiwa dengan metode distorsi yang dapat diterapkan pada perusahaan asuransi jiwa.

1.6 Metode Penelitian

Skripsi ini merupakan kajian teori dalam bidang matematika asuransi dan matematika keuangan yang didasarkan pada buku-buku dan jurnal-jurnal tentang teori perhitungan premi. Referensi utama yang digunakan adalah jurnal yang berjudul "*Premiums and Reserves, Adjusted By Distortions*" oleh Alois Pichler (2015).

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini, akan dibahas mengenai asuransi jiwa dan sistem pembayarannya, jenis-jenis ukuran risiko dan contohnya, serta prinsip perhitungan premi dengan metode distorsi. Sebagai awalan, akan dijelaskan mengenai ruang probabilitas, variabel acak, stokastik dominan, dan *comonotonicity*.

2.1 Ruang Probabilitas

Definisi 2.1.1. Misalkan Ω himpunan sebarang yang tak kosong dan $\mathcal{F}$ keluarga subhimpunan Ω. $\mathcal{F}$ dikatakan aljabar-σ jika:

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$

2. Jika $A \in \mathcal{F}$ maka $A^c \in \mathcal{F}$, dimana $A^c = \Omega \backslash A$

3. Jika $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ maka $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Definisi 2.1.2. Diberikan $\mathcal{F}$ aljabar-σ pada Ω, maka fungsi $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ disebut ukuran jika memenuhi:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. $\mu(A) \geq 0$ untuk setiap $A \in \Omega$;

3. Jika $(A_n) \in \mathcal{F}$ merupakan himpunan yang saling lepas, yaitu $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, maka
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Definisi 2.1.3. Diberikan $\mathcal{F}$ aljabar-σ pada Ω. Fungsi $\mathrm{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ disebut ukuran probabilitas jika memenuhi:

1. $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$ dan $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;

2. Jika $(A_n) \in \mathcal{F}$ merupakan himpunan saling lepas, yaitu $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, maka
$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$$

Definisi 2.1.4. Diberikan Ω himpunan tak kosong, $\mathcal{F}$ aljabar-σ pada Ω, dan P ukuran probabilitas pada $\mathcal{F}$.

1. $(\Omega, \mathcal{F})$ disebut ruang terukur;

2. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ disebut ruang probabilitas.

Definisi 2.1.5. Diberikan $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan terukur $\mathcal{F}$ jika untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, maka himpunan $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}$.

Definisi 2.1.6. Misal $\mathcal{C}$ adalah kelas dari sub-himpunan dari Ω. Pengertian aljabar-σ yang dibangkitkan oleh $\mathcal{C}$ dan dinyatakan dengan $\sigma(\mathcal{C})$ adalah aljabar-σ terkecil pada Ω dengan $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$.

Definisi 2.1.7. Misalkan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan riil, Aljabar Borel $\mathcal{B}$ pada $\mathbb{R}$ adalah aljabar-σ terkecil yang memuat semua interval buka pada $\mathbb{R}$ dan dinyatakan dengan $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definisi 2.1.8. Misalkan f merupakan fungsi dari ruang terukur $(\Omega, \mathcal{F})$ pada bilangan riil. Fungsi f dikatakan terukur jika untuk setiap himpunan Borel $B \in \mathcal{B}$, himpunan $\{x, f(x) \in B\} \in \mathcal{F}$.

Beberapa contoh himpunan Borel yaitu:

1. Semua himpunan buka di $\mathbb{R}$
2. Semua gabungan dari himpunan buka di $\mathbb{R}$.
3. Semua komplemen dari gabungan himpunan buka di $\mathbb{R}$.

2.1.1 Variabel Acak

Definisi 2.1.9. Diberikan ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Fungsi terukur $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ disebut variabel acak jika untuk setiap $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ berlaku $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Jika X variabel acak, fungsi distribusi dari X didefinisikan dengan

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \mathrm{P}(X \in (-\infty, x]).$$

Fungsi $\bar{F}_X = 1 - F_X(x) = \mathrm{P}(X > x)$ disebut sebagai fungsi *survival* untuk variabel acak X. Variabel acak X dikatakan diskrit jika fungsi distribusinya dapat dinyatakan sebagai

$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} \mathrm{P}(X = y).$$

Variabel acak X dikatakan kontinu jika fungsi distribusinya dapat dinyatakan sebagai

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R},$$

untuk suatu fungsi $f : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty)$ yang terintegralkan. Fungsi f ini dinamakan fungsi kepadatan peluang. Dalam kasus kontinu

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x).$$

Nilai ekspektasi (mean) dari variabel acak X dinotasikan dengan $\mathrm{E}(X)$ yang didefinisikan sebagai

$$\mathrm{E}(X) = \begin{cases} \sum_x x f(x), & \text{jika } X \text{ diskrit;} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x, & \text{jika } X \text{ kontinu} \end{cases}$$

2.1.2 Distribusi Seragam

Definisi 2.1.10. Misalkan X suatu variabel acak yang memiliki distribusi seragam dengan nilai minimum 0 dan nilai maksimum 1, yang dinotasikan dengan $X \sim U(0,1)$. X sebagai variabel acak seragam memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut

$$f(x) = 1 \qquad 0 \le x \le 1,$$

dan memiliki fungsi distribusi kumulatif sebagai berikut

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \le x) = x \qquad 0 \le x \le 1. \tag{2.1}$$

2.1.3 Distribusi Bersama

Definisi 2.1.11. Diberikan dua variabel acak X dan Y, distribusi bersama dari kedua variabel acak tersebut didefinisikan dengan

$$F(a,b) = \mathrm{P}\{X \le a, Y \le b\}, \quad -\infty < a, b < \infty.$$

Contoh 2.1.1. Diketahui fungsi densitas bersama $f(x, y) = \frac{x(1+3y^2)}{4}$, dimana $0 < x < 2$, dan $0 < y < 1$. Buktikan bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 1$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^2 \frac{x(1+3y^2)}{4}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y &= \int_0^1 \left[\frac{x^2(1+3y^2)}{8} \right]_0^2 \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{1+3y^2}{2}\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2} \left[y + y^3 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(1+1^3) = 1.
\end{aligned}
$$

2.1.4 Distribusi Marginal

Definisi 2.1.12. Misalkan X dan Y merupakan dua buah variabel acak, fungsi distribusi marginal dari kedua variabel acak tersebut didefinisikan dengan

1. Untuk kasus diskrit maka,

$$g(x) = \sum_y f(x, y) \quad \text{dan} \quad h(y) = \sum_x f(x, y)$$

2. Untuk kasus kontinu maka,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}y \quad \text{dan} \quad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x$$

Contoh 2.1.2. Diketahui fungsi densitas bersama

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y) & \text{untuk } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

maka densitas marginal dari X adalah $g(x) = \frac{2}{3}(x+1)$, untuk $0 < x < 1$, dan densitas marginal dari Y adalah $h(y) = \frac{1}{3}(1 + 4y)$, untuk $0 < y < 1$.

2.1.5 Invers Fungsi Distribusi

Misalkan suatu variabel acak X dengan fungsi distribusi F_X. Invers dari fungsi distribusi F_X, yang disebut juga sebagai fungsi kuantil, didefinisikan sebagai fungsi tak menurun dan fungsi yang kontinu kiri. Invers dari fungsi distribusi dinotasikan dengan F_X^{-1}.

Definisi 2.1.13. Untuk suatu $p \in [0, 1]$, invers dari fungsi distribusi $F_X(p)$ didefinisikan dengan

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq p\}. \tag{2.2}$$

Lemma 2.1.1. Untuk semua $x \in \mathbb{R}$ dan $p \in [0, 1]$ maka

$$F_X^{-1}(p) \leq x \Longleftrightarrow p \leq F_X(x). \tag{2.3}$$

Bukti. 1. Asumsikan bahwa $F_X^{-1}(p) \leq x$. Diketahui bahwa F_X adalah fungsi tak menurun, maka

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(p) &\leq x \\ F_X(F_X^{-1}(p)) &\leq F_X(x) \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi $F_X^{-1}(p)$, didapat bahwa

$$F_X(F_X^{-1}(p)) \geq p$$

Akibatnya,

$$p \leq F_X(F_X^{-1}(p)) \leq F_X(x)$$

2. Asumsikan $p \leq F_X(x)$. Dari definisi jelas bahwa $F_X^{-1}(p) \leq x$.

$\square$

Teorema 2.1.1. (Metode Invers Transformasi) Misalkan U sebagai variabel acak berdistribusi seragam pada interval (0,1). Untuk sebarang fungsi distribusi kontinu $F(\cdot)$, variabel acak X yang didefinisikan dengan

$$X = F^{-1}(U), \tag{2.4}$$

mempunyai fungsi distribusi $F(\cdot)$. ($F^{-1}(U)$ didefinisikan sebagai x sedemikan sehingga $F(x) = u$).

Bukti. Misal F_X menyatakan fungsi distribusi dari $X = F^{-1}(U)$, maka

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathrm{P}(X \leq x) \\ &= \mathrm{P}(F^{-1}(U) \leq x). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Karena fungsi distribusi $F(\cdot)$ merupakan suatu fungsi yang tak menurun, maka persamaan (2.5) ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathrm{P}(F(F^{-1}(U)) \leq F(x)) \\ &= \mathrm{P}(U \leq F(x)). \end{aligned}$$

Karena U berdistribusi seragam (0,1), maka berdasarkan persamaan (2.1) diperoleh bahwa

$$F_X(x) = F(x).$$

$\square$

2.2 Asuransi Jiwa Seumur Hidup

Berdasarkan Kitab Undang-Undang Hukum Dagang (KUHD) tentang asuransi atau pertanggungan bab 9 pasal 246, Asuransi atau Pertanggungan adalah suatu perjanjian dimana seorang tertanggung mengikatkan diri kepada penanggung dengan membayar premi untuk mendapatkan suatu penggantian dari penanggung karena suatu kerugian, kerusakkan, atau kehilangan keuntungan yang diharapkan, yang mungkin akan dideritanya karena suatu peristiwa yang tidak tentu. Sesuai dengan ketentuan Pasal 255 KUHD, asuransi jiwa harus diadakan secara tertulis dalam bentuk akta perjanjian yang disebut polis.

Asuransi jiwa seumur hidup merupakan asuransi dengan jangka waktu perlindungan seumur hidup. Pada asuransi jenis ini, ahli waris dari tertanggung akan memperoleh santunan apabila tertanggung meninggal dunia diwaktu kapanpun. Asuransi jiwa dapat dibeli dengan premi yang dibayarkan sekali pada saat penandatanganan kontrak asuransi yang disebut dengan premi tunggal bersih. Premi tunggal bersih merupakan ekspektasi nilai saat ini dari uang pertanggungan.

Premi tunggal bersih diskrit adalah premi yang pembayaran uang pertanggungannya dilakukan pada akhir tahun kematian pemegang polis yang dinotasikan dengan A. Kemudian A ini akan dikembangkan dengan fungsi uang pertanggungan dan fungsi diskonto yang masing-masing dinotasikan secara berturut-turut dengan b_{k+1} dan v_{k+1} sesuai dengan kontrak asuransinya.

Asuransi jiwa seumur hidup dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayarkan pada akhir tahun kematian kepada (x), dapat dibeli dengan pembayaran tunggal bersih diskrit yang dinotasikan dengan A_x. Kemudian dari $b_{k+1} = 1$, $k = 0, 1, \ldots$ dan $v_{k+1} = v^{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$ diperoleh bahwa

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \left({}_{k+1}q_x - {}_{k}q_x \right) \tag{2.6}$$

dimana ${}_kq_x$ merupakan probabilitas meninggalnya seseorang yang berusia x tahun dalam k tahun kedepan.

2.3 Stokastik Dominan

Stokastik dominan merupakan suatu istilah yang merujuk pada hubungan antara dua fungsi distribusi, yaitu apakah suatu fungsi distribusi lebih dominan dibandingkan fungsi distribusi yang lain. Perbandingan fungsi distribusi ini menjadi topik utama dalam berbagai penelitian khususnya yang berkaitan dengan distribusi pendapatan dan investasi portofolio. Pada awalnya stokastik dominan berkembang pada bidang keuangan yaitu dalam pengambilan keputusan keuangan menggunakan fungsi utilitas, namun pada tulisan ini stokastik dominan akan dikaitkan kedalam bidang aktuaria yaitu dalam perumusan premi asuransi.

Stokastik Dominan Orde Pertama

Definisi 2.3.1. Misalkan X dan Y adalah dua variabel acak dengan fungsi distribusi masing-masing berturut-turut yaitu F_X dan F_Y. Variabel acak X dikatakan mendominasi variabel acak Y secara stokastik pada orde pertama, dinotasikan dengan $X \geq_{st} Y$, jika dan hanya jika

$$F_X(z) \leq F_Y(z) \qquad \text{untuk semua nilai } z. \tag{2.7}$$

Lemma 2.3.1. Jika $X \geq_{st} Y$ maka $\mathrm{E}(X) \geq \mathrm{E}(Y)$.

Bukti. Misalkan dua variabel acak X dan Y dengan fungsi distribusi masing-masing F_X dan F_Y. Asumsikan bahwa $X \geq_{st} Y$, maka dari definisi stokastik dominan orde pertama diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} F_X(z) &\leq F_Y(z) \\ 1 - F_X(z) &\geq 1 - F_Y(z) \end{aligned}$$

berikan integral pada kedua ruas maka diperoleh

$$\int_0^\infty 1 - F_X(z)\,\mathrm{d}z \geq \int_0^\infty 1 - F_Y(z)\,\mathrm{d}z \tag{2.8}$$

Diketahui bahwa $\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty \mathrm{P}(X > x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty 1 - F_X(x)\,\mathrm{d}x$. Sedemikian hingga dari persamaan (2.8) diperoleh bahwa

$$\mathrm{E}(X) \geq \mathrm{E}(Y).$$

□

Contoh 2.3.1. Misalkan dua variabel acak $X \sim U(1,3)$ dan $Y \sim U(1,2)$, dimana U adalah variabel acak berdistribusi seragam. Variabel acak X dan Y memiliki fungsi distribusi masing-masing F_X dan F_Y, yaitu

$$F_X(z) = \begin{cases} 0 & \text{jika } z < 1 \\ \frac{z-1}{2} & \text{jika } 1 \leq z \leq 3 \\ 1 & \text{jika } z > 3 \end{cases} \qquad \text{dan} \qquad F_Y(z) = \begin{cases} 0 & \text{jika } z < 1 \\ z-1 & \text{jika } 1 \leq z \leq 2 \\ 1 & \text{jika } z > 2 \end{cases}$$

Untuk $z = 2$ diperoleh bahwa $F_X(2) = \frac{1}{2}$ dan $F_Y(2) = 1$, maka dapat disimpulkan bahwa variabel acak X dominan atas variabel acak Y secara stokastik dominan orde pertama karena $F_X(z) \leq F_Y(z)$.

Stokastik Dominan Orde Kedua

Definisi 2.3.2. Variabel acak X dikatakan mendominasi variabel acak Y secara stokastik pada orde kedua, yang dinotasikan dengan $X \succcurlyeq Y$, jika

$$\int_{-\infty}^{x} F_X(z)\,\mathrm{d}z \leq \int_{-\infty}^{x} F_Y(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{untuk semua } x \tag{2.9}$$

Contoh 2.3.2. Pada Contoh (2.3.1) akan diperlihatkan bahwa variabel acak X mendominasi variabel acak Y secara stokasik pada orde kedua. Pertama, integralkan fungsi distribusi $F_X(z)$ dan $F_Y(z)$ pada Contoh(2.3.1) sehingga diperoleh

$$\int_{-\infty}^{x} F_X(z)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{jika } z < 1 \\ \frac{z^2}{4} - \frac{z}{2} & \text{jika } 1 \leq z \leq 3 \\ z & \text{jika } z > 3 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{x} F_Y(z)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{jika } z < 1 \\ \frac{z^2}{2} - z & \text{jika } 1 \leq z \leq 2 \\ z & \text{jika } z > 2 \end{cases}$$

Untuk $z = 3$ diperoleh bahwa $\int_{-\infty}^{x} F_X(z) = \frac{3}{4}$ dan $\int_{-\infty}^{x} F_Y(z) = 3$, maka dapat disimpulkan bahwa variabel acak X dominan atas variabel acak Y secara stokastik dominan orde kedua karena $\int_{-\infty}^{x} F_X(z)\,\mathrm{d}z \leq \int_{-\infty}^{x} F_Y(z)\,\mathrm{d}z$.

2.4 *Comonotonicity*

Dalam bidang asuransi biasanya aktuaris dihadapkan pada masalah menentukan fungsi distribusi dari sejumlah variabel acak, misalnya klaim agregat dari suatu portofolio pada masa tertentu. Masalah semakin rumit apabila setiap variabel acak yang terkait menunjukkan saling ketergantungan satu sama lain, kemudian distribusi marginalnya diketahui tetapi distribusi bersamanya tidak dapat diketahui secara pasti. Untuk mengatasi masalah ini adalah dengan mencari struktur ketergantungan yang paling berisiko yaitu dimana setiap variabel acaknya saling berpasangan *comonotonic*.

Konsep *comonotonic* pertama kali dikenalkan oleh Schmeidler (1986) dan Yaari (1987), dan Rӧell (1987). Konsep *comonotonic* pada awalnya memiliki peranan penting dalam teori keputusan ekonomi dibawah risiko dan ketidakpastian, kemudian Wang dan Dhaene (1997) mengaplikasikan *comonotonic* pada bidang aktuaria.

Definisi 2.4.1. Misalkan X dan Y adalah dua buah variabel acak. Variabel acak X dan Y dikatakan berpasangan *comonotonic* jika fungsi distribusi bersamanya menunjukkan

$$F_{X,Y}(x,y) = \min(F_X(x), F_Y(y)) \qquad \text{untuk } x, y \geq 0. \tag{2.10}$$

Akibat 2.4.1. Misalkan X dan Y dua variabel acak. Jika variabel acak X dan

Y berpasangan *comonotonic*, maka $\mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y) \leq \mathrm{E}(X \cdot Y)$.

2.5 Ukuran Risiko

Pada bidang asuransi, ukuran risiko digunakan untuk merumuskan suatu harga premi asuransi yang masuk akal untuk suatu kontrak asuransi. Ukuran risiko dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.5.1. Misalkan X suatu variabel acak sebarang. Ukuran risiko yang dinotasikan dengan ρ merupakan fungsi dari X menuju bilangan riil-$\mathbb{R}$, yaitu

$$\rho : X \to \mathbb{R}.$$

Variabel acak X diinterpretasikan sebagai suatu kerugian dari pihak penanggung (perusahaan asuransi) sehingga pengukuran risiko dilakukan dengan tujuan untuk menjaga kerugian akibat terjadinya klaim asuransi menjadi seminimal mungkin. Pada tulisan ini setiap ukuran risiko yang diberikan diasumsikan sebagai ukuran risiko yang bersifat *version independent* (dalam literatur lain disebut juga dengan *law invariant*).

Definisi 2.5.2. Misalkan X_1 dan X_2 variabel acak sebarang. Suatu ukuran risiko ρ dikatakan *version independent* jika $\rho(X_1) = \rho(X_2)$, untuk setiap variabel acak X_1 dan X_2 berada pada ruang probabilitas yang sama, yaitu $\mathrm{P}(X_1 \leq y) = \mathrm{P}(X_2 \leq y) \quad (\text{untuk}\, y \in \mathbb{R})$.

2.5.1 Ukuran Risiko Koheren

Pada tahun 1997, Artzner mendefinisikan suatu ukuran risiko yang bersifat koheren. Ukuran risiko yang bersifat koheren ini kemudian dikenal dengan nama ukuran risiko koheren. Ukuran risiko koheren pada awalnya digunakan pada bidang keuangan dan kemudian dikembangkan kedalam bidang asuransi oleh Wang dan Dhaene (1998), serta kedalam bidang reasuransi oleh Balb*á*s (2009). Pada perkembangan lebih lanjut, ukuran risiko koheren ini kemudian dijadikan sebagai tolak ukur dalam menentukan kualitas suatu ukuran risiko.

Definisi 2.5.3. Misalkan X suatu variabel acak. Ukuran risiko $\rho(X)$ disebut sebagai ukuran risiko koheren apabila memenuhi sifat berikut:

1. *Monotonicity*: Jika $X_1 \leq X_2$ maka $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$
2. *Convexity*: $\rho((1-\lambda)X_0 + \lambda X_1) \leq (1-\lambda)\rho(X_0) + \lambda\rho(X_1)$, untuk $0 \leq \lambda \leq 1$
3. *Translation Equivariance*: $\rho(X+c) = \rho(X) + c$, jika $c \in \mathbb{R}$
4. *Positive Homogeneity*: $\rho(\lambda X) = \lambda \cdot \rho(X)$, untuk setiap $\lambda > 0$.

2.5.2 *Conditional Tail Expectation*

Salah satu ukuran risiko yang banyak digunakan dalam bidang asuransi adalah *Conditional Tail Expectation* (CTE). CTE memberikan informasi mengenai seberapa besar risiko yang harus ditanggung perusahaan jika kejadian-kejadian dengan kerugian diatas VaR benar-benar terjadi. VaR merupakan suatu pengukuran risiko yang dilakukan dengan memperkirakan potensi maksimum kerugian yang mungkin terjadi dengan suatu taraf kepercayaan tertentu yang dinotasikan dengan α. Sama halnya dengan VaR, CTE juga didefinisikan pada taraf kepercayaan α, dengan $0 \leq \alpha < 1$.

Definisi 2.5.4. Misalkan X suatu variabel acak dan α sebagai taraf kepercayaan.

Conditional Tail Expectation (CTE) didefinisikan sebagai berikut

$$\mathrm{CTE}_\alpha(X) := \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F_X^{-1}(p)\,\mathrm{d}p. \tag{2.11}$$

Keistimewaan dari CTE adalah CTE memiliki beberapa bentuk persamaan yang berbeda sehingga dapat diterapkan pada situasi yang berbeda pula. Rockafellar dan Uryasev (2000) dan Pflug (2000) mendefinisikan CTE dalam bentuk *infimum* sebagai berikut:

$$\mathrm{CTE}_\alpha(X) = \inf_{q\in\mathbb{R}} q + \frac{1}{1-\alpha}\,\mathrm{E}(X-q)_+ \tag{2.12}$$

Selain bentuk *infimum*, CTE juga memiliki bentuk Representasi Dual yang dirumuskan berikut ini

$$\mathrm{CTE}_\alpha(X) = \sup\Big\{\mathrm{E}(XY) : 0 \le Y \le (1-\alpha)^{-1}, \mathrm{E}(Y) = 1\Big\}. \tag{2.13}$$

Contoh 2.5.1. Asumsikan suatu kerugian berdistribusi kontinu dan seragam, yaitu $X \sim U(0,100)$ dengan $f_X(z) = \frac{1}{100}$ untuk $0 \le z \le 100$ dan 0 untuk lainnya. Misalkan $F_X^{-1}(p) = 100p$, maka CTE pada selang kepercayaan α dapat dihitung sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\mathrm{CTE}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F_X^{-1}(p)\,\mathrm{d}p\\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 100p\,\mathrm{d}p\\ &= \frac{100}{1-\alpha}\left[\frac{1}{2}p^2\right]_\alpha^1 = 50\times(1+\alpha).\end{aligned}$$

Untuk $\alpha = 90\%$ maka $\mathrm{CTE}_{0.90}(X)$ adalah

$$\mathrm{CTE}_{0.90}(X) = 50 \times (1 + 0.90) = 95.$$

2.5.3 Ukuran Risiko Distorsi

Pada tahun 1985 Denneberg memperkenalkan gagasan ukuran risiko distorsi yang kemudian dikembangkan oleh Acerbi dengan nama ukuran risiko spektral pada tahun 2002. Pflug (2006) menyatakan bahwa ukuran risiko distorsi merupakan generalisasi dari *Conditional Tail Expectation*. Untuk merumuskan ukuran risiko distorsi, akan terlebih dahulu didefinisikan fungsi distorsi dan distorsi probabilitas.

Definisi 2.5.5. (Fungsi Distorsi). Fungsi $\sigma : [0, 1] \to [0, \infty)$ merupakan fungsi yang tak negatif dan tak menurun, serta menunjukkan $\int_0^1 \sigma(u)\, \mathrm{d}u = 1$ disebut sebagai fungsi distorsi.

Definisi 2.5.6. (Distorsi Probabilitas). Misalkan variabel acak X dengan fungsi distribusinya F_X, serta fungsi distorsi σ. Suatu fungsi σ dikatakan mentransformasi fungsi distribusi F_X menuju fungsi distribusi yang baru jika menunjukkan

$$F_{X^*}(x) = \sigma(F_X(x)) = \sigma \circ F_X(x). \tag{2.14}$$

dimana X^* merupakan variabel acak dengan probabilitas yang terdistorsi.

Definisi 2.5.7. (Ukuran Risiko Terdistorsi). Misalkan fungsi $\sigma : [0, 1] \to [0, \infty)$ dan variabel acak X. Ukuran risiko distorsi yang dinotasikan dengan $\rho_\sigma(X)$ didefinisikan dengan

$$\rho_\sigma(X) := \int_0^1 F_X^{-1}(u)\, \sigma(u)\, \mathrm{d}u. \tag{2.15}$$

Ukuran risiko distorsi memenuhi sifat koheren, yaitu sifat *translation equivariance* terpenuhi berdasarkan definisi fungsi distorsi yaitu $\int_0^1 \sigma(u)\,\mathrm{d}u = 1$, sifat *monotonicity* terpenuhi berdasarkan asumsi bahwa $\sigma \geq 0$, *positive homogeneity* terpenuhi karena $F_L^{-1}(\cdot)$ merupakan *positive homogeneity* (Pflug (2000)), dan sifat *convexity* terpenuhi berdasarkan asumsi bahwa σ merupakan fungsi takmenurun.

2.6 Prinsip Premi Terdistosi

Perhitungan premi asuransi dengan ukuran probabilitas terdistorsi telah dipaparkan oleh Wang pada tahun 1998. Perhitungan premi dengan ukuran probabilitas terdistorsi ini dimaksudkan sebagai pemberian bobot risiko pada ukuran probabilitasnya. Bobot risiko dapat diberikan dengan menyesuaikan potensi kerugiannya, yaitu jika potensi kerugiannya besar maka bobot risiko yang diberikan juga besar, tetapi jika potensi kerugiannya kecil maka bobot risiko yang diberikan juga kecil.

Asumsikan L sebagai variabel acak bernilai riil ($\mathbb{R}$) yang menggambarkan kerugian dari pihak penanggung. Variabel acak L memiliki fungsi distribusi yang dinotasikan dengan F_L dan fungsi invers yang dinotasikan dengan F_L^{-1}. Misalkan U suatu variabel acak seragam, dengan Metode Transformasi Invers maka L dapat dirumuskan sebagai berikut

$$L = F_L^{-1}(U), \tag{2.16}$$

dimana U berada pada ruang probabilitas yang sama dengan L dan berpasangan *comonoton* dengan L. Dalam perhitungan premi ini variabel acak L didefinisikan sebagai fungsi *outcomes*. Untuk merumuskan prinsip premi terdistorsi definisikan suatu variabel acak bernilai riil yang dikaitkan dengan fungsi distorsi σ, yang dinotasikan dengan L_σ, yaitu

$$L_\sigma := F_L^{-1}(\tau_\sigma^{-1}(U)), \tag{2.17}$$

dimana $\tau_\sigma(p) := \int_0^p \sigma(u)\,\mathrm{d}u$ merupakan fungsi distribusi dari distorsi σ dan τ_σ^{-1} merupakan fungsi inversnya. Kerugian acak L_σ ini sedikit berbeda dengan kerugian L karena pada kerugian L_σ menunjukkan probabilitas yang terdistorsi oleh fungsi τ_σ yang dapat ditunjukkan berikut ini

$$\begin{aligned} F_{L_\sigma}(y) &= \mathrm{P}(L_\sigma \leq y) = \mathrm{P}\Big(F_L^{-1}(\tau_\sigma^{-1}(U)) \leq y\Big) \\ &= \mathrm{P}\Big(U \leq \tau_\sigma(F_L(y))\Big) = \tau_\sigma(F_L(y)) \\ &= \tau_\sigma \circ F_L(y) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Kerugian acak L dan L_σ memiliki fungsi *outcomes* yang sama tetapi memiliki probabilitas yang berbeda. Dengan menggunakan kerugian acak L_σ dapat dirumuskan suatu prinsip perhitungan premi dengan cara mengambil nilai ekspektasinya yaitu

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(L_\sigma) &= \mathrm{E}(F_L^{-1}(\tau_\sigma^{-1}(U))) \\ &= \int_0^1 F_L^{-1}(\tau_\sigma^{-1}(U))\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 F_L^{-1}(u)\,\mathrm{d}\tau_\sigma(u) \\ &= \int_0^1 F_L^{-1}(u)\,\sigma(u)\,\mathrm{d}u \end{aligned} \tag{2.19}$$

Dimana pada persamaan (2.19) merupakan definisi dari fungsi premi terdistorsi yang dinotasikan dengan $\pi_\sigma(L)$. Berikut ini akan diberikan definisi dari fungsi premi terdistorsi.

Definisi 2.6.1. Misalkan L suatu variabel acak kerugian yang bernilai riil ($\mathbb{R}$) dan σ suatu fungsi distorsi. Fungsi premi terdistosi yang dinotasikan dengan $\pi_\sigma(L)$ didefinisikan dengan

$$\pi_\sigma(L) := \int_0^1 F_L^{-1}(u)\sigma(u)\,\mathrm{d}u \tag{2.20}$$

Catatan 2.6.1. Diketahui bahwa fungsi τ_σ merupakan fungsi konveks, sedemikian hingga untuk suatu $u \in [0,1]$ diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \tau_\sigma(u) &\leq u \\ u &\leq \tau_\sigma^{-1}(u) \\ L = F_L^{-1}(U) &\leq F_L^{-1}(\tau_\sigma^{-1}(U)) = L_\sigma \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi stokastik orde pertama diketahui bahwa variabel acak L_σ lebih dominan secara stokastik orde pertama daripada variabel acak L ($L_\sigma \geq L$) jika $F_{L_\sigma}(\cdot) \leq F_L(\cdot)$. Untuk suatu variabel acak L_σ yang lebih dominan dari variabel acak L, berdasarkan Lemma (2.3.1) diperoleh bahwa

$$\mathrm{E}(L_\sigma) \geq \mathrm{E}(L)$$

yang berarti bahwa nilai premi dari kerugian L_σ lebih besar daripada nilai premi dari kerugian L.

Representasi Kusuoka

Kusuoka (2001) merumuskan suatu ukuran risiko yang bersifat *version independent* dalam bentuk integral dari *Conditional Tail Expectation* (CTE). Ukuran risiko dalam bentuk integral dari CTE ini kemudian dikenal dengan nama Representasi Kusuoka. Representasi Kusuoka memperlihatkan peran sentral CTE pada perhitungan premi asuransi, dimana setiap premi asuransi dapat dibangun melalui CTE pada tingkat α yang berbeda. Pada bagian ini akan diperlihatkan bahwa prinsip premi terdistorsi dapat dibangun melalui CTE.

Teorema 2.6.1. Diberikan π sebagai prinsip premi yang bersifat *version independent* dan memenuhi sifat koheren. Misalkan $\mathcal{M}$ sebagai suatu himpunan dari ukuran probabilitas di [0,1], maka π memiliki persamaan berikut ini

$$\pi(L) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}} \int_0^1 \mathrm{CTE}_\alpha(L)\, \mu\,(\mathrm{d}\alpha). \tag{2.21}$$

Bukti. Bukti teorema Representasi Kusuoka telah diberikan oleh Kusuoka (2001) dan A. Shapiro (2012). □

Melalui Representasi Kusuoa dapat diperlihatkan hubungan antara prinsip premi terdisorsi π_σ dengan CTE. Hubungan yang dimaksud adalah melalui π_σ dapat dibangun persamaan yang terdapat pada Teorema Kusuoka, yaitu persamaan (2.21). Begitu juga sebaliknya, dari persamaan (2.21) dapat dibangun premi terdistorsi π_σ. Hubungan ini akan diberikan dan dibuktikan melalui lemma berikut ini.

Lemma 2.6.1. Misalkan π_σ adalah fungsi premi terdistorsi, ada ukuran probabilitas μ_σ di [0,1] sedemikian hingga

$$\pi_\sigma(L) = \int_0^1 \mathrm{CTE}_\alpha(L)\, \mu_\sigma\,(\mathrm{d}\alpha) \tag{2.22}$$

Bukti. 1. Misalkan μ ukuran probabilitas dan σ sebagai fungsi distorsi. Definisikan suatu ukuran probabilitas μ yang dikaitkan dengan fungsi distorsi σ, yang dinotasikan dengan μ_σ, sebagai berikut

$$\mu_\sigma(A) := \sigma(0)\delta_0(A) + \int_A (1-\alpha)\, \mathrm{d}\sigma(\alpha), \tag{2.23}$$

dimana $A \subset [0,1]$ dan δ merupakan *Dirac Measure* yang didefinisikan dengan

$$\delta_\omega(A) := \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{jika } \omega \in A \\ 0 & \text{jika } \omega \notin A \end{cases}$$

Integral pada persamaan (2.23) merupakan integral Riemann-Stieltjes dengan integrator fungsi σ. Fungsi distribusi dari ukuran μ_σ, yang juga dinotasikan dengan μ_σ, didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mu_\sigma(p) &:= \mu_\sigma([0,p]) = \sigma(0) + \int_0^p 1-\alpha\, \mathrm{d}\sigma(\alpha) \\ &= (1-p)\sigma(p) + \int_0^p \sigma(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha, \end{aligned} \tag{2.24}$$

Persamaan (2.24) didapat dengan menerapkan teknik Integral Parsial pada fungsi distribusi μ_σ. Diketahui bahwa fungsi σ merupakan fungsi yang takmenurun, sedemikian hingga μ_σ merupakan ukuran positif dan merupakan ukuran probabilitas pada [0,1] karena $\mu_\sigma([0,1]) = \mu_\sigma(1) = 1$. Karena μ_σ

merupakan ukuran positif sehingga diperoleh bahwa $\mathcal{M} = \{\mu_\sigma\}$. Persamaan (2.22) diperoleh dengan mengerjakan premi terdistorsi $\pi_\sigma(L)$ berikut ini

$$\begin{aligned}
\pi_\sigma(L) &= \int_0^1 F_L^{-1}(u)\sigma(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 F_L^{-1}(u)\sigma(0)\,\mathrm{d}u + \int_0^1 F_L^{-1}(u)(\sigma(u) - \sigma(0))\,\mathrm{d}u \\
&= \sigma(0)\cdot \mathrm{CTE}_0(L) + \int_0^1 F_L^{-1}(u)\int_0^u \mathrm{d}\sigma(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \sigma(0)\cdot \mathrm{CTE}_0(L) + \int_0^1 \int_\alpha^1 F_L^{-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\sigma(\alpha) \\
&= \sigma(0)\cdot \mathrm{CTE}_0(L) + \int_0^1 \mathrm{CTE}_\alpha(L)(1-\alpha)\,\mathrm{d}\sigma(\alpha) \\
&= \int_0^1 \mathrm{CTE}_\alpha(L)\mu_\sigma\,\mathrm{d}\alpha.
\end{aligned}$$

2. Untuk pembuktian sebaliknya definisikan suatu fungsi distorsi σ yang dikaitkan dengan ukuran μ, yang dinotasikan dengan σ_μ, sebagai berikut

$$\sigma_\mu(\alpha) := \int_0^\alpha \frac{1}{1-p}\mu\,(\mathrm{d}p). \tag{2.25}$$

σ_μ adalah fungsi tak menurun dan positif, serta menunjukkan bahwa

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sigma_\mu(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha &= \int_0^1\int_0^\alpha \frac{1}{1-p}\mu\,(\mathrm{d}p)\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-p}\int_p^1 \mathrm{d}\alpha\,\mu(\mathrm{d}p) \\
&= \int_0^1 \mu\,(\mathrm{d}p) = \mu[0,1] = 1
\end{aligned}$$

Sekarang persamaan (2.21) dapat dijabarkan menjadi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{CTE}_\alpha(L)\mu\,(\mathrm{d}\alpha) &= \int_0^1 \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F_L^{-1}(u)\,\mathrm{d}u\,\mu(\mathrm{d}\alpha)\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-\alpha}\int_0^u \mu\,(\mathrm{d}\alpha)\,F_L^{-1}(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^1 \sigma_\mu(u)F_L^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = \pi_\sigma(L) \qquad (2.26)\end{aligned}$$

dimana (2.26) merupakan fungsi premi terdistorsi dengan fungsi σ_μ.

□

Dari Lemma (2.6.1) terlihat hubungan satu-satu antara σ dan μ yaitu pada persamaan (2.23) terlihat hubungan $\sigma \mapsto \mu_\sigma$, dan pada persamaan (2.25) terlihat hubungan $\mu \mapsto \sigma_\mu$ sedemikian hingga Representasi Kusuoka (Teorema 2.6.1) dapat dirumuskan setara dengan fungsi premi terdistorsi, yaitu

$$\pi(L) = \sup_{\sigma\in\mathcal{S}} \pi_\sigma(L). \qquad (2.27)$$

dimana $\mathcal{S}$ adalah himpunan dari fungsi distorsi. $\mathcal{S}$ dapat dibatasi dengan hanya beranggotakan fungsi kontinu dan fungsi naik (*increasing*).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab sebelumnya telah didefinisikan perhitungan premi dengan ukuran probabilitas yang terdistorsi. Pada bab ini metode distorsi pada prinsip perhitungan premi akan dikembangkan melalui sudut pandang yang berbeda yaitu ukuran probabilitasnya dibiarkan tidak berubah, tetapi fungsi *outcomes*nya yang akan didistorsi. Perbedaan penerapan distorsi ini akan menghasilkan nilai premi yang berbeda pula dan dapat menjadi pilihan alternatif bagi aktuaris dalam menetapkan harga premi asuransi. Prinsip perhitungan dengan metode distorsi selanjutnya akan diaplikasikan kedalam notasi aktuaria. Kemudian, pada bagian akhir bab ini akan diberikan ilustrasi numerik perhitungan premi asuransi dengan metode distorsi.

3.1 Perumusan Fungsi Premi Dengan *Outcomes* Terdistorsi

Perumusan fungsi premi dengan *outcomes* terdistorsi dilakukan dengan merumuskan fungsi premi terdistorsi π_σ kedalam bentuk *supremum* kemudian dilanjut dengan merumuskannya kedalam bentuk *infimum*. Bentuk *supremum* dari fungsi premi terdistorsi dirumuskan melalui Representasi Dual dengan batasan stokastik dominan orde kedua, sedangkan bentuk *infimum* akan dirumuskan melalui Ketaksamaan Fenchel-Young.

3.1.1 Bentuk *Supremum* Dari Fungsi Premi Terdistorsi

Bentuk *supremum* dari fungsi premi terdistorsi π_σ dibangun dari Representasi Dual dengan batasan stokastik dominan orde kedua. Untuk membangun bentuk *supremum* melalui Representasi Dual akan terlebih dahulu diberikan definisi fungsi dual untuk premi π_σ dan definisi stokastik dominan orde kedua untuk variabel acak Z dan fungsi σ.

Definisi 3.1.1. Misalkan L dan Z sebagai dua variabel acak. Fungsi premi terdistosi (π_σ) disebut sebagai fungsi dual jika

$$\pi_\sigma^*(Z) = \sup_L \mathrm{E}(L \cdot Z) - \pi_\sigma(L). \tag{3.1}$$

Definisi 3.1.2. Misalkan Z suatu variabel acak dan σ suatu fungsi distorsi. Fungsi distorsi σ dikatakan mendominasi variabel acak Z secara stokastik dominan orde kedua (dinotasikan dengan $Z \preccurlyeq \sigma$) jika dan hanya jika

$$(1-\alpha)\mathrm{CTE}_\alpha(Z) \le \int_\alpha^1 \sigma(p)\,\mathrm{d}p \quad \text{dan} \quad \mathrm{E}(Z) = \int_0^1 \sigma(p)\,\mathrm{d}p. \tag{3.2}$$

dimana $\alpha \in [0,1)$.

Catatan 3.1.1. Dari Definisi (3.1.2) diketahui bahwa $\mathrm{E}(Z) = \int_0^1 \sigma(p)\,\mathrm{d}p = 1$. Kemudian apabila diambil definisi CTE pada (2.11) diperoleh bahwa

$$(1-\alpha)\mathrm{CTE}_\alpha(Z) = \int_\alpha^1 F_Z^{-1}(p)\,\mathrm{d}p. \tag{3.3}$$

Apabila persamaan (3.3) disubstitusikan pada persamaan (3.2) maka

$$\int_\alpha^1 F_Z^{-1}(p)\,\mathrm{d}p \le \int_\alpha^1 \sigma(p)\mathrm{d}p$$

yang berarti bahwa

$$Z \preccurlyeq \sigma \quad \text{jika dan hanya jika} \quad F_Z^{-1} \preccurlyeq \sigma$$

Setelah mendefinisikan fungsi dual untuk premi terdistorsi dan stokastik dominan orde kedua untuk variabel acak Z dan fungsi σ, selanjutnya akan dirumuskan bentuk *supremum* dari fungsi π_σ yang akan diberikan pada Teorema berikut ini.

Teorema 3.1.1. (Bentuk *supremum* dari fungsi premi terdistorsi dengan batasan stokastik dominan orde kedua). Misalkan L suatu variabel acak dan σ suatu fungsi distorsi. Fungsi premi terdistosi yang dinotasikan dengan π_σ memiliki bentuk persamaan sebagai berikut

$$\pi_\sigma(L) = \sup \left\{ \mathrm{E}(L \cdot Z) \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathrm{E}(Z) = 1, \mathrm{dan} \\ (1-\alpha)\mathrm{CTE}_\alpha(Z) \leq \int_\alpha^1 \sigma(u)\,\mathrm{d}u \end{array} \right\} \tag{3.4}$$

Bukti. Dari Teorema (3.1.1) diketahui bahwa fungsi premi terdistorsi dapat dirumuskan setara dengan Representasi Dual yaitu

$$\pi_\sigma(L) = \sup_{Z \in \mathbb{L}^1} \mathrm{E}(L \cdot Z) - \pi_\sigma^*(Z) = \sup_{Z \preccurlyeq \sigma} \mathrm{E}(L \cdot Z) \tag{3.5}$$

dengan syarat bahwa

$$\pi_\sigma^*(Z) = \begin{cases} 0 & \mathrm{E(Z)} = 1 \text{ dan } Z \preccurlyeq \sigma \\ +\infty & \text{lainnya} \end{cases}$$

dimana $\mathbb{L}^1$ merupakan ruang dari variabel acak yang terintegralkan ($Z \in \mathbb{L}^1$ jika

$\int_{-\infty}^{\infty} Z \, \mathrm{d}\mu < \infty$).

Dari persamaan (3.5) diketahui bahwa untuk membuktikan Teorema (3.1.1) perlu ditunjukkan bahwa $\pi_\sigma^*(Z) = 0$ yaitu ketika syarat $\mathrm{E}[Z] = 1$ dan $Z \preccurlyeq \sigma$ terpenuhi. Asumsikan variabel acak L terdefinisi pada ruang $\mathbb{L}^\infty$, dimana $\mathbb{L}^\infty$ merupakan pasangan dual dari $\mathbb{L}^1$, maka

$$\pi_\sigma^*(Z) = \sup_{L \in \mathbb{L}^\infty} \mathrm{E}(L \cdot Z) - \pi_\sigma(L) \tag{3.6}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.6), asumsikan bahwa variabel acak L dan Z berpasangan secara *comonoton*, maka

$$\mathrm{E}(L \cdot Z) = \int_0^1 F_L^{-1}(u) \, F_Z^{-1}(u) \, \mathrm{d}u \tag{3.7}$$

Substitusikan persamaan (3.7) pada persamaan (3.6) sedemikian hingga diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \pi_\sigma^*(Z) &= \sup_{L \in \mathbb{L}^\infty} \int_0^1 F_L^{-1}(u) \, F_Z^{-1}(u) \, \mathrm{d}u - \int_0^1 F_L^{-1}(u) \, \sigma(u) \, \mathrm{d}u \\ &= \sup_{L \in \mathbb{L}^\infty} \int_0^1 F_L^{-1}(u) \left(F_Z^{-1}(u) - \sigma(u) \right) \mathrm{d}u \qquad (3.8) \end{aligned}$$

Melalui persamaan (3.8) akan dibuktikan bahwa syarat $Z \preccurlyeq \sigma$ terpenuhi. Pertama akan diperlihatkan bahwa $(1-\alpha)\mathrm{CTE}_\alpha(Z) \leq \int_\alpha^1 \sigma(u) \, \mathrm{d}u$. Misalkan suatu himpunan terukur sebarang B, kemudian definisikan $L_B := c \cdot \mathbb{1}_{[0,1] \setminus B}$ dan fungsi inversnya yaitu $F_{L_B}^{-1}(\cdot) := c \cdot \mathbb{1}_{[\mathrm{P}(B),1]}(\cdot)$. Selanjutnya substitusikan F_L^{-1} dengan

$F_{L_B}^{-1}$ pada persamaan (3.8) sedemikian hingga diperoleh

$$\begin{aligned} \pi_\sigma^*(Z) &\geq \sup_{c>0} c \cdot \int_{P(B)}^{1} F_Z^{-1}(u) - \sigma(u)\,\mathrm{d}u \\ &\geq \begin{cases} +\infty & \text{jika } \int_{P(B)}^{1} F_Z^{-1}(u) - \sigma(u)\,\mathrm{d}u > 0 \\ 0 & \text{jika } \int_{P(B)}^{1} F_Z^{-1}(u) - \sigma(u)\,\mathrm{d}u \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Pada persamaan (3.9) terlihat bahwa bentuk ketaksamaan $\int_{\mathrm{P}(B)}^{1} F_Z^{-1}(u) - \sigma(u)\,\mathrm{d}u \leq 0$ ekuivalen dengan $(1-\alpha)\mathrm{CTE}_{\mathrm{P}(B)}(Z) \leq \int_{\mathrm{P}(B)}^{1} \sigma(u)\,\mathrm{d}u$. Karena himpunan B dipilih sebarang maka dapat disimpulkan bahwa

$$(1-\alpha)\mathrm{CTE}_\alpha(Z) \leq \int_\alpha^1 \sigma(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{untuk} \quad \alpha \in (0,1)$$

dengan demikian syarat pertama untuk membuktikan $Z \preccurlyeq \sigma$ terpenuhi. Selanjutnya adalah membuktikan bahwa $\mathrm{E}(Z) = 1$. Pembuktian dilakukan dengan menjabarkan $\pi_\sigma^*(Z)$ menggunakan teknik Integral Parsial berikut ini.

$$\begin{aligned}
\pi_\sigma^*(Z) &= \sup_{L\in\mathbb{L}^\infty} \int_0^1 F_L^{-1}(\alpha)\big(F_Z^{-1}(\alpha) - \sigma(\alpha)\big)\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \sup_{L\in\mathbb{L}^\infty} \int_0^1 F_L^{-1}(\alpha)\,\mathrm{d}\int_\alpha^1 \sigma(u) - F_Z^{-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \sup_{L\in\mathbb{L}^\infty} -\int_0^1 F_L^{-1}(\alpha)\,\mathrm{d}\int_\alpha^1 F_Z^{-1}(u) - \sigma(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \sup_{L\in\mathbb{L}^\infty} -\Bigg\{ F_L^{-1}(\alpha)\int_\alpha^1 F_Z^{-1}(u) - \sigma(u)\,\mathrm{d}u\Bigg|_{\alpha=0}^{1} \\
&\qquad - \int_0^1\int_\alpha^1 F_Z^{-1}(u) - \sigma(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}F_L^{-1}(\alpha)\Bigg\} \\
&= \sup_{L\in\mathbb{L}^\infty} F_L^{-1}(0)\left(\int_0^1 F_Z^{-1}(u) - \sigma(u)\,\mathrm{d}u\right) \\
&\qquad + \int_0^1\int_\alpha^1 F_Z^{-1}(u) - \sigma(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}F_L^{-1}(\alpha) \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

diketahui bahwa $\int_0^1 F_Z^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{E}(Z)$ dan $\int_0^1 \sigma(u)\,\mathrm{d}u = 1$, serta $\int_\alpha^1 F_Z^{-1}(u) = (1-\alpha)\mathrm{CTE}_\alpha(Z)$, maka persamaan (3.10) dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\pi_\sigma^*(Z) &= \sup_{L\in\mathbb{L}^\infty} F_L^{-1}(0)\Big(\mathrm{E}(Z) - 1\Big) \\
&\qquad + \int_0^1 \Big((1-\alpha)\mathrm{CTE}_\alpha(Z) - \int_\alpha^1 \sigma(u)\,\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}F_L^{-1}(\alpha) \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.11) terlihat bahwa syarat pada Teorema (3.1.1) terpenuhi, yaitu $\mathrm{E}(Z) = 1$ dan $(1-\alpha)\mathrm{CTE}_\alpha(Z) \le \int_\alpha^1 \sigma(u)\,\mathrm{d}u$ untuk $\alpha \in [0,1]$. $\square$

Pernyataan yang akan diberikan selanjutnya merupakan akibat yang diperoleh dari Teorema (3.1.1). Pernyataan pada akibat berikut akan digunakan pada bahasan selanjutnya.

Akibat 3.1.1. Misalkan $\pi_\sigma(L)$ suatu fungsi premi terdistorsi. Fungsi $\pi_\sigma(L)$ memiliki bentuk persamaan sebagai berikut

$$\pi_\sigma(L) = \sup\{\mathrm{E}(L \cdot \sigma(U)) : U \text{ berdistribusi seragam}\}, \tag{3.12}$$

dimana *supremum* tercapai saat L dan U berpasangan secara *comonoton*.

Bukti. Definisikan $\sigma(U)$ sebagai suatu variabel acak. Untuk membuktikan Akibat (3.1.1) pertama akan diperlihatkan bahwa variabel acak $\sigma(U)$ layak untuk persamaan (3.4) kemudian dilanjut dengan menunjukkan bahwa variabel acak $\sigma(U)$ berpasangan *comonoton* dengan variabel acak L.

Misalkan suatu variabel acak $\sigma(U)$ memiliki fungsi distribusi yang dinotasikan dengan $F_{\sigma(U)}$ dan fungsi invers yang dinotasikan dengan $F^{-1}_{\sigma(U)}$. Akan diperlihatkan bahwa $F^{-1}_{\sigma(U)}(\cdot) = \sigma(\cdot)$. Dengan menyelesaikan fungsi distribusi dari $\sigma(U)$ diperoleh bahwa

$$F_{\sigma(U)}(\sigma(u)) = \mathrm{P}(\sigma(U) \leq \sigma(u)) \geq \mathrm{P}(U \leq u) = u,$$

sedemikian hingga diperoleh bahwa $F^{-1}_{\sigma(U)}(u) \leq \sigma(u)$. Akan tetapi apabila diambil integral pada ketaksamaan tersebut akan diperoleh bahwa

$$1 = \mathrm{E}(\sigma(U)) = \int_0^1 F^{-1}_{\sigma(U)}\,\mathrm{d}u \leq \int_0^1 \sigma(u)\,\mathrm{d}u = 1,$$

sedemikian hingga dapat disimpulkan bahwa $F^{-1}_{\sigma(U)}(\cdot) = \sigma(\cdot)$ hampir dimana-mana. Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa $\sigma(U)$ layak untuk persamaan (3.4) pada Teorema (3.1.1).

$$\begin{aligned} F^{-1}_{\sigma(U)}(u) &\leq \sigma(u) \\ \int_{\alpha}^{1} F^{-1}_{\sigma(U)}(u)\,\mathrm{d}u &\leq \int_{\alpha}^{1} \sigma(u)\,\mathrm{d}u \\ (1-\alpha)\mathrm{CTE}_{\alpha}(\sigma(U)) &\leq \int_{\alpha}^{1} \sigma(u)\,\mathrm{d}u, \end{aligned} \tag{3.13}$$

kemudian

$$\mathrm{E}(\sigma(U)) = \int_{0}^{1} F^{-1}_{\sigma(U)}(u)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{1} \sigma(u)\,\mathrm{d}u = 1. \tag{3.14}$$

Dari (3.13) dan (3.14) terbukti bahwa $\sigma(U)$ layak untuk persamaan (3.4). Terakhir, untuk membuktikan Akibat (3.1.1) adalah dengan menunjukkan bahwa variabel acak L berpasangan *comonoton* dengan variabel acak $\sigma(U)$, yaitu

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(L \cdot \sigma(U)) &= \int_{0}^{1} F_L^{-1}(u)\, F^{-1}_{\sigma(U)}(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{0}^{1} F_L^{-1}(u)\,\sigma(u)\,\mathrm{d}u = \pi_{\sigma}(L). \end{aligned} \tag{3.15}$$

$\square$

3.1.2 Bentuk *Infimum* Dari Fungsi Premi Terdistorsi

Pada subbab sebelumnya telah dibangun bentuk *supremum* dari fungsi premi terdistorsi melalui Representasi Dual dengan batasan stokastik dominan orde kedua. Pada bagian ini akan diberikan bentuk alternatif dari fungsi premi terdistorsi yaitu sebagai bentuk *infimum*. Bentuk *infimum* dari fungsi premi terdistorsi ini merupakan perluasan dari *Conditional Tail Expectation* yang didefinisikan oleh Rockafellar dan Uryasev (2000). Untuk membangun bentuk *infimum* dari fungsi premi terdistorsi akan digunakan Ketaksamaan Fenchel-Young. Sebelum masuk pada perumusan bentuk *infimum* dari fungsi premi terdistorsi ini akan terlebih dahulu didefinisikan fungsi dual dari fungsi h yang dinotasikan dengan h^*.

Definisi 3.1.3. Misalkan suatu fungsi konveks yang dinotasikan dengan h. Fungsi dual dari h, yang dinotasikan dengan h^*, didefinisikan sebagai berikut

$$h^*(y) := \sup_x x \cdot y - h(x). \tag{3.16}$$

Teorema 3.1.2. (Bentuk *infimum* dari fungsi premi terdistorsi). Misalkan L suatu variabel acak dan σ suatu fungsi distorsi. Fungsi premi terdistorsi π_σ memiliki bentuk persamaan sebagai berikut

$$\pi_\sigma(L) = \inf_h \mathrm{E}(h(L)) + \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u, \tag{3.17}$$

dimana *infimum* tercapai diantara fungsi terukur $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dan h^* merupakan fungsi dual dari fungsi h.

Pernyataan pada Teorema (3.1.2) dapat dinyatakan setara dengan pernyataan berikut ini.

Akibat 3.1.2. Misalkan L suatu variabel acak dan σ suatu fungsi distorsi. Fungsi premi terdistorsi π_σ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\pi_\sigma(L) = \inf_{h\,\text{konveks}} \mathrm{E}(h(L)) + \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u \tag{3.18}$$

dan

$$\pi_\sigma(L) = \inf \left\{ \mathrm{E}(h(L)) : \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u \le 0 \right\}, \tag{3.19}$$

dimana *infimum* pada (3.18) tercapai diantara fungsi konveks $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dan *infimum* pada (3.19) tercapai diantara fungsi terukur sebarang.

Bukti. (Akibat (3.1.2)). Untuk membuktikan persamaan (3.18) pada Akibat (3.1.2), asumsikan suatu fungsi $\pi_\sigma(L)$ yang dirumuskan pada persamaan (3.17) dan asumsikan bahwa *infimum*nya dibatasi pada fungsi konveks h sehingga diperoleh

$$\pi_\sigma(L) = \inf_{h \text{ konveks}} \mathrm{E}(h(L)) + \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u, \tag{3.20}$$

dengan demikian persamaan (3.18) pada Akibat (3.1.2) terbukti. Selanjutnya untuk membuktikan persamaan (3.19), perhatikan ketaksamaan berikut ini.

$$\begin{aligned}\pi_\sigma(L) &\leq \inf\left\{\mathrm{E}(h(L)) + \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u : \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u \leq 0\right\} \\ &\leq \inf\left\{\mathrm{E}(h(L)) : \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u \leq 0\right\}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Untuk membuktikan (3.21) akan diperlihatkan bahwa $\int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u = 0$. Misalkan suatu fungsi sebarang h yang dikaitkan dengan konstanta α, yaitu $h_\alpha(x) := h(x) + \alpha$. Fungsi dual dari fungsi h_α dapat dirumuskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} h_\alpha^*(y) &= \sup_x x \cdot y - h_\alpha(x) = \sup_x x \cdot y - (h(x) + \alpha) \\ &= \sup_x x \cdot y - h(x) - \alpha \\ &= h^*(y) - \alpha. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Untuk suatu variabel acak berdistribusi seragam U maka persamaan (3.22) dapat ditulis kembali dengan

$$h_\alpha(\sigma(u)) = h^*(\sigma(u)) - \alpha. \tag{3.23}$$

Berikan integral pada kedua ruas persamaan (3.23) maka didapat bahwa

$$\int_0^1 h_\alpha^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u = \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u - \alpha. \tag{3.24}$$

Pada persamaan $\mathrm{E}(h(L)) + \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u$, substitusikan fungsi h dengan h_α sedemikian hingga diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(h(L)) + \int_0^1 h^*(\sigma(u))\mathrm{d}u &= \mathrm{E}(h_\alpha(L) - \alpha) + \int_0^1 h_\alpha^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u + \alpha \\ &= \mathrm{E}(h_\alpha(L)) + \int_0^1 h_\alpha^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u. \end{aligned}\tag{3.25}$$

Pada persamaan (3.25) menyatakan bahwa penambahan konstanta α pada fungsi h tidak berpengaruh apa-apa, sedemikian hingga fungsi h_α dapat digunakan untuk menggantikan fungsi h. Selanjutnya untuk membuktikan persamaan (3.19) dapat dilakukan dengan membuktikan bahwa $\int_0^1 h_\alpha^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u = 0$. Asumsikan bahwa $\alpha := \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}(u)$, maka berdasarkan persamaan (3.24) diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}\int_0^1 h_\alpha^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u &= \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u - \alpha \\ &= \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u - \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u = 0. \end{aligned}\tag{3.26}$$

Berdasarkan persamaan (3.20) dan persamaan (3.26) dapat disimpulkan bahwa Akibat (3.1.2) terbukti. □

Bukti. Teorema (3.1.2). Untuk membuktikan Teorema (3.1.2) dapat dilakukan dengan mengerjakan Ketaksamaan Fenchel-Young, yaitu

$$\sigma \cdot y \leq h(y) + h^*(\sigma), \tag{3.27}$$

Untuk suatu variabel acak berdistribusi seragam U dan variabel acak L, maka Ketaksamaan Fenchel-Young dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$L \cdot \sigma(U) \leq h(L) + h^*(\sigma(U)). \tag{3.28}$$

Ambil ekspektasi untuk ketaksamaan (3.28) maka didapat bahwa

$$\mathrm{E}(L \cdot \sigma(U)) \leq \mathrm{E}(h(L)) + \mathrm{E}(h^*(\sigma(U))). \tag{3.29}$$

Karena U adalah variabel acak berdistribusi seragam maka

$$\mathrm{E}(h^*(\sigma(U))) = \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u. \tag{3.30}$$

Substitusikan persamaan (3.30) pada persamaan (3.29) sehingga didapat bahwa

$$\mathrm{E}(L \cdot \sigma(U)) \leq \mathrm{E}(h(L)) + \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u. \tag{3.31}$$

Dari Akibat (3.1.1) maka pernyataan (3.31) dapat dirumuskan kembali dengan

$$\pi_\sigma(L) = \sup_{U \text{ seragam}} \mathrm{E}(L \cdot \sigma(U)) \leq \mathrm{E}(h(L)) + \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u,$$

sedemikian hingga diperoleh ketaksamaan berikut ini

$$\pi_\sigma(L) \leq \mathrm{E}(h(L)) + \int_0^1 h^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u. \tag{3.32}$$

Untuk pembuktian ketaksamaan sebaliknya definisikan suatu fungsi h

yang dikaitkan dengan σ berikut ini

$$h_\sigma(y) := \int_0^1 F_L^{-1}(\alpha) + \frac{1}{1-\alpha}(y - F_L^{-1}(\alpha))_+ \, \mu_\sigma\,(\mathrm{d}\alpha), \tag{3.33}$$

dimana $[x]_+ := \max\{x, 0\}$. Fungsi $h_\sigma(y)$ merupakan fungsi naik dan konveks, karena $y \mapsto (y-q)_+$ merupakan fungsi konveks dan fungsi naik, serta diketahui pula bahwa μ_σ merupakan ukuran positif (*positive measure*). Selanjutnya diberikan suatu fungsi CTE yang dirumuskan oleh Rockafellar dan Uryasev (2000) sebagaimana telah diberikan pada persamaan (2.12) sebagai berikut

$$\mathrm{CTE}_\alpha(L) = \inf_{q\in\mathbb{R}} q + \frac{1}{1-\alpha}\,\mathrm{E}(L-q)_+. \tag{3.34}$$

Pflug (2000) telah menyatakan bahwa *infimum* pada (3.34) tercapai saat $q = F_L^{-1}(\alpha)$, sehingga diperoleh bentuk eksplisit untuk (3.34) sebagai berikut

$$\mathrm{CTE}_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha) + \frac{1}{1-\alpha}\,\mathrm{E}(L - F_L^{-1}(\alpha))_+. \tag{3.35}$$

Selanjutnya dengan mengerjakan persamaan (2.22) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\pi_\sigma(L) &= \int_0^1 \mathrm{CTE}_\alpha(L)\,\mu_\sigma\,(\mathrm{d}\alpha) \\
&= \int_0^1 F_L^{-1}(\alpha) + \frac{1}{1-\alpha}\mathrm{E}(L - F_L^{-1}(\alpha))_+\,\mu_\sigma\,(\mathrm{d}\alpha) \\
&= \mathrm{E}\left(\int_0^1 F_L^{-1}(\alpha) + \frac{1}{1-\alpha}(L - F_L^{-1}(\alpha))_+\mu_\sigma\,(\mathrm{d}\alpha)\right) \\
&= \mathrm{E}(h_\sigma(L)) \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Terakhir, untuk membuktikan Teorema (3.1.2) hanya perlu diperlihatkan bahwa $\int_0^1 h_\sigma(\sigma(u))\,\mathrm{d}u = 0$. Untuk hal ini akan terlebih dahulu diperlihatkan bahwa fungsi h_σ terdiferensial hampir dimana-mana (hal ini karena h_σ adalah fungsi konveks), yaitu

$$\begin{aligned}
h_\sigma(y) &= \int_0^1 F_L^{-1}(\alpha) + \frac{1}{1-\alpha}(y - F_L^{-1}(\alpha))_+ \,\mu_\sigma\,(\mathrm{d}\alpha) \\
&= \int_0^1 F_L^{-1}(\alpha)\,\mu_\sigma\,\mathrm{d}\alpha + \int_{\{\alpha: F_L^{-1}(\alpha)\le y\}} \frac{1}{1-\alpha} y - F_L^{-1}(\alpha)\,\mu_\sigma\,\mathrm{d}\alpha \\
h'_\sigma(y) &= \int_{\{\alpha: F_L^{-1}(\alpha)\le y\}} \frac{1}{1-\alpha}\,\mu_\sigma\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \int_0^{F_L(y)} \frac{1}{1-\alpha}\,\mu_\sigma\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \sigma(F_L(y)). \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Persamaan (3.37) diperoleh dari (2.25). Selanjutnya untuk fungsi dual h_σ yang dinotasikan dengan h_σ^* dirumuskan dengan

$$h_\sigma^*(\sigma(u)) = \sup_y \sigma(u)\cdot y - h_\sigma(y),$$

supremum dari $h_\sigma^*(y)$ tercapai pada setiap y yang menunjukkan $\sigma(u) = h'_\sigma(y) = \sigma(F_L(y))$, yaitu saat $y = F_L^{-1}(u)$. Oleh karena itu diperoleh bahwa

$$h_\sigma^*(\sigma(u)) = \sigma(u)\cdot F_L^{-1}(u) - h_\sigma(F_L^{-1}(u)). \qquad (3.38)$$

Kemudian berikan integral pada kedua ruas persamaan (3.38), maka didapat

$$\begin{aligned}
\int_0^1 h_\sigma^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u &= \int_0^1 \sigma(u)\cdot F_L^{-1}(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 h_\sigma(F_L^{-1}(u))\,\mathrm{d}u \\
&= \pi_\sigma(L) - \mathrm{E}(h_\sigma(L)). \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

Pada persamaan (3.36) telah ditunjukkan bahwa $\pi_\sigma(L) = \mathrm{E}(h_\sigma(L))$, sedemikian hingga dari persamaan (3.39) diperoleh bahwa

$$\int_0^1 h_\sigma^*(\sigma(u))\,\mathrm{d}u = 0.$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa Teorema (3.1.2) terbukti. $\square$

3.1.3 Fungsi Premi Dengan *Outcomes* Terdistorsi

Asumsikan suatu variabel acak L yang diinterpretasikan sebagai fungsi *outcomes* pada perhitungan premi. Diingatkan kembali bahwa variabel acak L dirumuskan dengan

$$L := F_L^{-1}(U).$$

Untuk merumuskan fungsi premi dengan fungsi hasil terdistorsi didefinisikan kerugian acak yang baru yang dinotasikan dengan L'_σ berikut ini

$$L'_\sigma := h_\sigma(L),$$

dimana $h_\sigma(L)$ merupakan fungsi yang telah didefinisikan pada persamaan (3.33). Fungsi distribusi kumulatif dari kerugian acak L'_σ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} F_{L'_\sigma}(y) &= \mathrm{P}(L'_\sigma \le y) = \mathrm{P}(h_\sigma(L) \le y) \\ &= \mathrm{P}(L \le h_\sigma^{-1}(y)) \\ &= F_L(h_\sigma^{-1}(y)) \end{aligned} \tag{3.40}$$

Dari persamaan (3.40) dapat diinterpretasikan bahwa pada kerugian L'_σ ukuran probabilitasnya tidak terdistorsi oleh fungsi τ_σ seperti pada kerugian L_σ. Kemudian apabila dilakukan metode invers pada fungsi distribusinya diperoleh bahwa

$$F_{L'_\sigma}^{-1} = h_\sigma(F_L^{-1}) = h_\sigma \circ F_L^{-1}, \tag{3.41}$$

yang dapat diartikan bahwa fungsi hasil dari kerugian L'_σ terdistorsi oleh fungsi h_σ.

Dengan kerugian acak yang baru yaitu kerugian L'_σ dapat dirumuskan fungsi premi terdistorsi melalui prinsip ekivalen berikut ini

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(L'_\sigma) &= \mathrm{E}(h_\sigma(L)) \\ &= \pi_\sigma(L) \end{aligned} \tag{3.42}$$

dimana $\mathrm{E}(h_\sigma(L)) = \pi_\sigma(L)$ telah dibuktikan pada persamaan (3.36).

3.2 Aplikasi Aktuaria Dari Fungsi Premi Terdistorsi

Pada bahasan sebelumnya telah dirumuskan fungsi premi dengan metode distorsi, selanjutnya fungsi premi dengan metode distorsi akan diaplikasikan kedalam notasi aktuaria untuk asuransi jiwa seumur hidup. Notasi aktuaria untuk fungsi premi akan dibagi kedalam dua bagian yaitu untuk fungsi premi dengan ukuran probabilitas yang terdistorsi dan untuk fungsi premi dengan fungsi *outcomes* terdistorsi.

Asumsikan asuransi jiwa dibeli dengan premi yang dibayarkan sekali pada saat penandatanganan kontrak asuransi dan uang pertanggungannya dibayarkan pada akhir tahun kematian pemegang polis (metode diskrit). Misalkan seseorang berusia x tahun membeli polis asuransi. Variabel acak diskrit $K(x)$

merupakan banyak tahun diwaktu mendatang yang dijalani seseorang yang berusia x tahun sebelum meninggal dunia. Kemudian misalkan variabel acak L yang menggambarkan kerugian dari pihak penanggung. Definisikan variabel acak L yang bergantung pada waktu hidup $K(x)$ yaitu $L_k := L(k)$.

Pembayaran premi asuransi diasumsikan sebagai pembayaran yang monoton naik, artinya apabila pemegang polis hidup lebih lama maka uang tunai yang akan diperoleh dikemudian hari akan semakin besar. Variabel acak L yang merupakan fungsi pembayaran monoton naik dirumuskan dengan

$$L := (K+1)\, v^{k+1} \qquad k \in \{0, 1, 2, \ldots\} \tag{3.43}$$

Asuransi jiwa seumur hidup dengan uang pertanggungan sebesar 1 yang dibayarkan pada akhir tahun kematian pemegang polis dengan fungsi pembayaran yang monoton naik adalah

$$A_x = \mathrm{E}(L) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^{k+1} \left({}_{k+1}q_x - {}_{k}q_x \right) \tag{3.44}$$

Notasi aktuaria untuk fungsi premi dengan ukuran probabilitas terdistorsi dengan variabel acak kerugian L_σ dapat dilakukan dengan pemberian bobot distorsi τ_σ pada ukuran probabilitasnya yaitu pada ${}_kq_x$. Berdasarkan (2.20) dan

(3.44) diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}\pi_\sigma(L) &= \mathrm{E}(L_\sigma) = A_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\left(\tau_\sigma({}_{k+1}q_x) - \tau_\sigma({}_kq_x)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\Big(\int_0^{{}_{k+1}q_x}\sigma(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^{{}_kq_x}\sigma(u)\,\mathrm{d}u\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\int_{{}_kq_x}^{{}_{k+1}q_x}\sigma(u)\,\mathrm{d}u \end{aligned} \quad (3.45)$$

dimana $\tau_\sigma(p) := \int_0^p \sigma(u)\,\mathrm{d}u$ merupakan fungsi distribusi dari fungsi distorsi σ.

Sedangkan notasi aktuaria untuk fungsi premi dengan fungsi *outcomes* terdistorsi, bobot distorsi diberikan pada fungsi *outcomes*nya yaitu pada

$$L := (K+1)v^{k+1}.$$

Bobot distorsi yang diberikan adalah fungsi h_σ yang telah diberikan pada persamaan (3.33). Notasi aktuaria untuk fungsi premi dengan fungsi *outcomes* terdistorsi adalah

$$\begin{aligned}\pi_\sigma(L) &= \mathrm{E}(L'_\sigma) = A_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h_\sigma\Big((k+1)v^{k+1}\Big)\left({}_{k+1}q_x - {}_kq_x\right)\end{aligned} \quad (3.46)$$

3.3 Ilustrasi Numerik

Dalam studi kasus ini akan dilakukan perhitungan premi asuransi jiwa seumur hidup untuk premi tunggal bersih diskrit. Perhitungan premi asuransi akan dibagi kedalam tiga jenis perhitungan dengan metode yang berbeda, yaitu perhitungan premi asuransi jiwa dengan metode premi bersih (premi neto), perhitungan premi dengan ukuran probabilitas yang terdistorsi, dan perhitungan premi dengan fungsi *outcomes* yang terdistorsi. Perhitungan premi asuransi pada tulisan ini akan dilakukan menggunakan *software Microsoft Excel*.

Perhitungan Premi Asuransi Jiwa Dengan Metode Premi Bersih

Diasumsikan seseorang yang berusia 50 tahun membeli polis asuransi dengan pembayaran yang monoton naik dan manfaat asuransi diberikan kepada ahli waris diakhir tahun kematian pemegang polis. Manfaat yang akan diterima oleh ahli waris apabila pemegang polis meninggal dunia adalah sebesar Rp 1.000,00. Nilai premi asuransi jiwa dengan metode premi bersih akan diberikan pada Tabel (3.1), dimana data pada tabel dihitung berdasarkan Tabel Mortalita Laki-Laki Tahun 1999 dengan tingkat bunga sebesar 7% dan biaya *loading* akan diabaikan. Pada Tabel (3.1) tertera simbol L yang dirumuskan dengan $L = (k+1)v^{k+1}$ dan simbol B yang dirumuskan dengan $B = L \cdot ({}_{k+1}q_{50} - {}_{k}q_{50})$.

Tabel 3.1: Perhitungan Premi Bersih (Rp)

k	Usia	L	${}_kq_{50}$	B	$1000B$
0	50	0.935	0	0.00569	5.69
1	51	1.747	0.00609	0.01165	11.65
2	52	2.449	0.01276	0.01767	17.67
3	53	3.052	0.01998	0.02345	23.45
4	54	3.565	0.02766	0.02915	29.15
5	55	3.998	0.03584	0.03500	35.00
6	56	4.359	0.04459	0.04136	41.36
7	57	4.656	0.05408	0.04845	48.45
8	58	4.895	0.06448	0.05624	56.24
9	59	5.083	0.07597	0.06431	64.31
10	60	5.226	0.08862	0.07173	71.73
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Perhitungan Premi Asuransi Jiwa Dengan Ukuran Probabilitas Terdistorsi

Asumsi untuk perhitungan premi asuransi jiwa seumur hidup dengan ukuran probabilitas yang terdistorsi sama dengan asumsi pada perhitungan premi dengan metode premi bersih, yang membedakan adalah pada ukuran probabilitasnya (${}_kq_x$) akan diberikan bobot risiko σ. Premi asuransi akan dihitung dengan diberikan bobot risiko yang diasumsikan sebesar $\sigma(u) = 1.2 + 0.9u^2$ dan biaya *loading* akan diabaikan. Perhitungan premi asuransi jiwa seumur hidup akan dihitung berdasarkan rumus pada persamaan (3.45) dan akan disajikan pada Tabel (3.2). Pada Tabel (3.2) diketahui bahwa simbol $C = \int_{{}_kq_x}^{{}_{k+1}q_x} 1.2 + 0.9u^2 \,\mathrm{d}u$ dan simbol $D = L \cdot \int_{{}_kq_x}^{{}_{k+1}q_x} 1.2 + 0.9u^2 \,\mathrm{d}u$.

Tabel 3.2: Perhitungan Premi Dengan Ukuran Probabilitas Terdistorsi (Rp)

k	Usia	L	${}_kq_{50}$	C	D	$1000D$
0	50	0.935	0	0.00731	0.00683	6.83
1	51	1.747	0.00609	0.00800	0.01398	13.98
2	52	2.449	0.01276	0.00866	0.02121	21.21
3	53	3.052	0.01998	0.00922	0.02815	28.15
4	54	3.565	0.02766	0.00982	0.03501	35.01
5	55	3.998	0.03584	0.01052	0.04205	42.05
6	56	4.359	0.04459	0.01141	0.04972	49.72
7	57	4.656	0.05408	0.01252	0.05829	58.29
8	58	4.895	0.06448	0.01384	0.06774	67.74
9	59	5.083	0.07597	0.01526	0.07756	77.56
10	60	5.226	0.08862	0.01658	0.08666	86.66
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Perhitungan Premi Asuransi Jiwa Dengan Fungsi *Outcomes* Terdistorsi

Asumsi untuk perhitungan premi asuransi jiwa seumur hidup dengan fungsi *outcomes* yang terdistorsi sama dengan asumsi pada perhitungan premi dengan metode premi bersih, yang membedakan adalah pada fungsi *outcomes*nya akan diberikan bobot risiko h_σ. Bobot risiko h_σ dirumuskan dengan

$$h_\sigma(L) = \int_0^1 F_L^{-1}(\alpha) + \frac{1}{1-\alpha}\Big(L - F_L^{-1}(\alpha)\Big)_+ \mu_\sigma\,(\mathrm{d}\alpha)$$

dimana nilai $F_L^{-1}(\alpha)$ diperoleh untuk $\alpha = 10\%$.

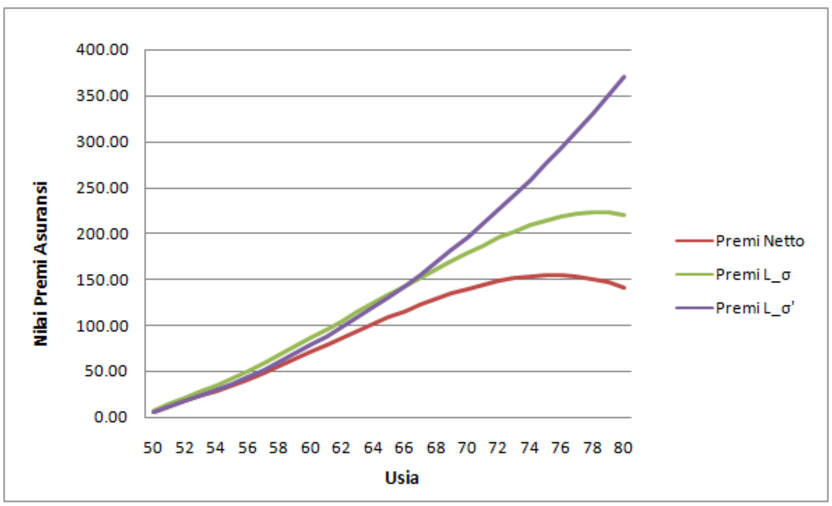
Pada tabel perhitungan premi biaya *loading* akan diabaikan. Perhitungan premi asuransi jiwa seumur hidup akan dihitung berdasarkan rumus pada persamaan (3.46) dan akan disajikan pada Tabel (4.3). Pada Tabel (4.3) diketahui bahwa $E = h_\sigma(L)\cdot({}_{k+1}q_x - {}_kq_x)$.

Tabel 3.3: Perhitungan Premi Dengan Fungsi *Outcomes* Terdistorsi (Rp)

k	Usia	L	${}_kq_{50}$	$h_\sigma(L)$	E	$1000E$
0	50	0.935	0	0.947	0.00577	5.77
1	51	1.747	0.00609	1.770	0.01180	11.80
2	52	2.449	0.01276	2.493	0.01799	17.99
3	53	3.052	0.01998	3.126	0.02402	24.02
4	54	3.565	0.02766	3.679	0.03008	30.08
5	55	3.998	0.03584	4.159	0.03641	36.41
6	56	4.359	0.04459	4.575	0.04341	43.41
7	57	4.656	0.05408	4.935	0.05135	51.35
8	58	4.895	0.06448	5.245	0.06026	60.26
9	59	5.083	0.07597	5.514	0.06975	69.75
10	60	5.226	0.08862	5.747	0.07887	78.87
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Perbandingan Nilai Premi Asuransi Dengan Metode Premi Bersih, Ukuran Probabilitas Terdisorsi, Dan Fungsi *Outcomes* Terdistorsi

Setelah dilakukan perhitungan premi asuransi dengan tiga metode berbeda, maka akan terlihat perbedaan nilai premi yang dihasilkan. Perbedaan ketiga nilai premi ini akan disajikan pada Tabel (3.4). Pada Tabel (3.4), premi L_σ menunjukkan perhitungan premi asuransi jiwa dengan ukuran probabilitas yang terdistorsi dan Premi L'_σ menunjukkan perhitungan premi asuransi dengan fungsi *outcomes* yang terdistorsi.



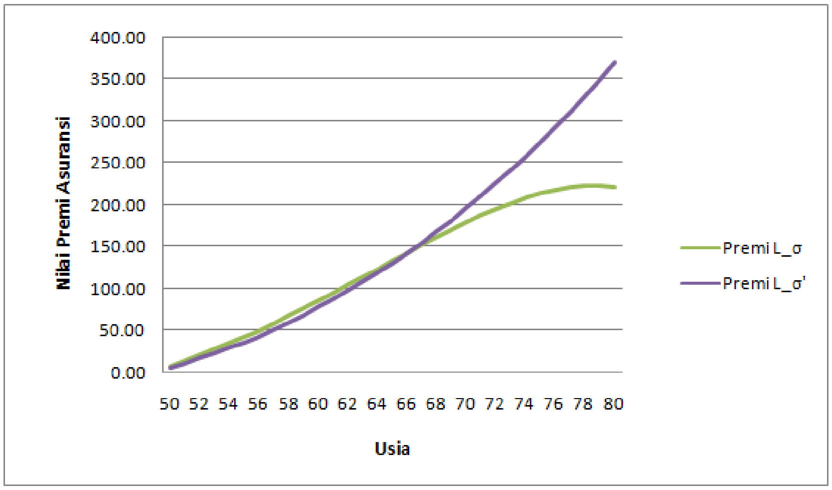
Gambar 3.1: Perhitungan Premi Asuransi Jiwa Seumur Hidup

Berdasarkan nilai premi yang tertera pada Tabel (3.4) terlihat bahwa nilai premi yang dihasilkan dari perhitungan premi dengan metode distorsi lebih besar dari perhitungan premi dengan metode premi bersih. Hal ini dapat diartikan dengan penerapan metode distorsi pada perhitungan premi asuransi dinilai aman untuk perusahaan. Perbedaan nilai premi tidak terlalu signifikan sehingga tidak memberatkan pemegang polis.

Tabel 3.4: Perhitungan Premi Asuransi Jiwa Seumur Hidup (Rp)

k	Usia	Premi Netto	Premi L_σ	Premi L'_σ
0	50	5.69	6.83	5.77
1	51	11.65	13.98	11.80
2	52	17.67	21.21	17.99
3	53	23.45	28.14	24.02
4	54	29.15	34.98	30.08
5	55	35.00	42.00	36.41
6	56	41.36	49.63	43.41
7	57	48.45	58.14	51.35
8	58	56.24	67.49	60.26
9	59	64.31	77.17	69.75
10	60	71.73	86.08	78.87
11	61	79.16	94.99	88.37
12	62	86.58	103.90	98.27
13	63	94.07	112.89	108.75
14	64	101.41	121.71	119.62
15	65	108.78	130.55	131.19
16	66	115.75	138.92	143.05
17	67	122.47	146.99	155.47
18	68	128.93	154.74	168.58
19	69	134.85	161.85	182.15
20	70	140.19	168.27	196.27
21	71	144.91	173.92	211.01
22	72	148.81	178.61	226.28
23	73	151.91	182.34	242.8
24	74	153.97	184.82	258.78
25	75	155.01	186.07	276.00
26	76	154.79	185.80	293.65
27	77	153.41	184.16	312.09
28	78	150.72	180.93	331.09
29	79	146.71	176.11	350.70
30	80	141.39	169.73	370.94
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Selanjutnya akan dibandingkan nilai premi asuransi antara perhitungan premi dengan ukuran probabilitas terdistorsi dan perhitungan premi dengan fungsi *outcomes* terdistorsi. Perbandingan ini dilakukan dengan tujuan mencari metode terbaik yang dapat diterapkan pada perusahaan asuransi jiwa.



Gambar 3.2: Perhitungan Premi Asuransi Dengan Ukuran Probabilitas Terdistorsi dan Fungsi *Outcomes* Terdistorsi

Dari Tabel (3.4) terlihat bahwa nilai premi dengan ukuran probabilitas terdistorsi sedikit lebih besar daripada nilai premi dengan fungsi *outcomes* terdistorsi sehingga dapat menjadi pilihan untuk diterapkan pada perusahaan asuransi. Namun, apabila dilihat pada Grafik (3.2) terlihat bahwa kenaikan nilai premi dengan ukuran probabilitas terdistorsi akan terhenti pada usia 75 tahun, kemudian nilai premi perlahan-lahan akan turun. Padahal semakin bertambahnya umur dari pemegang polis peluang meninggalnya juga akan semakin besar, sehingga peluang terjadinya klaim juga akan semakin besar. Berbeda dengan nilai premi yang dihasilkan dengan metode fungsi *outcomes* terdistorsi, walaupun nilai premi yang dihasilkan diawal tahun pembelian polis lebih kecil dari premi dengan ukuran probabilitas terdistorsi, tetapi nilai premi ini akan terus naik seiring dengan bertambahnya umur dari pemegang polis. Dapat disimpulkan bahwa perhitungan premi asuransi jiwa seumur hidup dengan menggunakan metode distorsi pada fungsi *outcomes*nya dinilai lebih aman untuk diterapkan pada perusahaan asuransi daripada perhitungan premi dengan ukuran probabilitas terdistorsi.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Suatu perusahaan asuransi dapat melakukan perhitungan premi asuransi jiwa untuk jenis kontrak asuransi seumur hidup dengan uang pertanggungan dibayarkan diakhir tahun kematian pemegang polis menggunakan dua metode distorsi yang berbeda, yaitu

1. Perhitungan premi asuransi jiwa seumur hidup dengan metode ukuran probabilitas yang terdistorsi. Artinya, pada metode ini perhitungan premi asuransi dilakukan dengan memberikan bobot risiko pada ukuran probabilitasnya. Premi asuransi dihitung dengan menjumlahkan hasil kali fungsi diskonto dengan probabilitas kematian pemegang polis yang telah diberikan bobot risiko σ.

2. Perhitungan premi asuransi jiwa seumur hidup dengan metode fungsi *outcomes* terdistorsi. Artinya, pada metode ini premi asuransi dihitung dengan memberikan bobot risiko pada fungsi diskontonya. Premi asuransi jiwa seumur hidup dihitung dengan menjumlahkan hasil kali antara fungsi diskonto yang telah diberi bobot risiko h_σ dengan probabilitas kematiannya.

4.2 Saran

1. Dalam skripsi ini model perhitungan premi asuransi jiwa dengan metode distorsi dilakukan dengan mengabaikan biaya *loading*. Untuk itu, pada analisis lebih lanjut perhitungan premi asuransi dengan metode distorsi dapat menyertakan biaya *loading* pada perhitungannya.

2. Perhitungan premi dengan metode *outcomes* terdistorsi sebaiknya digunakan hanya untuk perhitungan premi sampai jangka waktu tertentu, karena semakin bertambahnya umur nilai premi akan terus meningkat.

DAFTAR PUSTAKA

P. Artzner, F. Dalbaen, J.-M. Eber, dan D. Heath. 1999. *Coherent measures of risk*. Mathematical Finance.

Bowers, Newton L., Gerber, Hans U., Hickman, James C., dkk. 1997. *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries.

Geiss, Christel. dan Geiss, Stefan. 2009. *An Introduction to Probability Theory*. Department of Mathematics and Statistics. University of Jyväskylä.

D. Filipović, G. Svindland. 2007. *Convex Risk Measures on L^p*. Mathematics Institute. University of Munich.

A. Heras, B. Balbás, dan J. L. Vilar. 2012. *Conditional tail expectation and premium calculation*. ASTIN Bulletin.

Minkova, L. D. 2010. *Insurance Risk Theory*. Lecture Notes.

G. Ch. Pflug. 2000. *Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.

G. Ch. Pflug dan A. Pichler. 2014. *Multistage Stochastic Optimization*. Springer, New York.

G. Ch. Pflug dan W. Römisch. *Modeling, measuring, and managing risk*. World Scientific, River Edge, NJ.

A. Pichler. 2012. *Insurance Pricing under Ambiguity*. Department of Statistics and Operations Research. University of Vienna, Austria.

A. Pichler. 2015. *Premiums and reserves, adjusted by distortions*. Scandinavian Actuarial Journal.

A. Pichler. 2013. *The natural banach space for version independent risk measures*. Insurance: Mathematics and Economics.

E. SCALCO. 2005. *A Particular way to measure extreme from of dependence: comonotonicity*. Dipartimo di Matematica Applicata. Università Ca' Foscari Di Venezia.

R. T. Rockafellar. 1970. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton.

R. T. Rockafellar dan S. Uryasev. 2000. *Optimization of conditional value-at-risk*. Journal of Risk.

A. Shapiro. 2012. *On Kusuoka Representations of law invarian risk measures*. Mathematics of Operations Research.

E. A. Valdez dan Y. Xiao. 2011. *On the distortion of a copula and its margins*. Scandinavian Actuarial Journal.

S. Wang. 1996. *The risk-adjusted premiums for life insurance and annuities*. The Society of Actuaries.

S. Wang dan J. Dhaene. 1998. *Comonotonicity, correlation order and premium principles*. Insurance: Mathematics and Economics.

Wolfstetter, Elmar. 1996. *Stochastic Dominance: Theory and Application*.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

$$
\begin{aligned}
k &= \text{Tahun pembelian polis asuransi} \\
{}_kq_{50} &= \text{Peluang dari orang yang berusia 50 tahun akan meninggal} \\
& \text{dalam masa } k \text{ tahun mendatang} \\
&= \frac{l_{50} - l_{50+k}}{l_{50}} \\
l_x &= \text{banyaknya orang yang hidup pada usia } x \text{ tahun} \\
L &= (K+1)\, v^{k+1} \\
v &= \text{Faktor diskonto (diasumsikan bunga 7\%)} \\
B &= (K+1)\, v^{k+1} \cdot {}_kq_{50} \\
\sigma(u) &= 1.2 + 0.9^2 \\
C &= \int_{{}_kq_{50}}^{{}_{k+1}q_{50}} \sigma(u)\, \mathrm{d}u \\
D &= (K+1)\, v^{k+1} \cdot \int_{{}_kq_{50}}^{{}_{k+1}q_{50}} \sigma(u)\, \mathrm{d}u \\
h_\sigma(L) &= \int_0^1 F_L^{-1}(\alpha) + \frac{1}{1-\alpha}\Big(L - F_L^{-1}(\alpha)\Big)_+ \mu_\sigma(\mathrm{d}\alpha) \\
F_L^{-1}(\alpha) &= \text{nilai invers untuk tabel } {}_kq_{50} \\
\alpha &= 10\% \\
E &= h_\sigma(L) \cdot ({}_{k+1}q_{50} - {}_kq_{50})
\end{aligned}
$$

Tabel 4.1: Tabel Lengkap Perhitungan Premi Bersih (Rp)

k	Usia	l_x	L	${}_kq_{50}$	B	$1000B$
0	50	918,859	0.935	0	0.00569	5.69
1	51	913,263	1.747	0.00609	0.01165	11.65
2	52	907,135	2.449	0.01276	0.01767	17.67
3	53	900,504	3.052	0.01998	0.02345	23.45
4	54	893,444	3.565	0.02766	0.02915	29.15
5	55	885,930	3.998	0.03584	0.03500	35.00
6	56	877,886	4.359	0.04459	0.04136	41.36
7	57	869,168	4.656	0.05408	0.04845	48.45
8	58	859,608	4.895	0.06448	0.05624	56.24
9	59	849,052	5.083	0.07597	0.06431	64.31
10	60	837,428	5.226	0.08862	0.07173	71.73
11	61	824,816	5.328	0.10235	0.07916	79.16
12	62	811,166	5.395	0.11720	0.08658	86.58
13	63	796,419	5.429	0.13325	0.09407	94.07
14	64	780,498	5.437	0.15058	0.10141	101.41
15	65	763,359	5.420	0.16923	0.10878	108.78
16	66	744,916	5.382	0.18930	0.11575	115.75
17	67	725,153	5.326	0.21081	0.12247	122.47
18	68	704,022	5.254	0.23381	0.12893	128.93
19	69	681,472	5.168	0.25835	0.13485	134.85
20	70	657,498	5.072	0.28444	0.14019	140.19
21	71	632,099	4.966	0.31208	0.14491	144.91
22	72	605,285	4.852	0.34126	0.14881	148.81
23	73	577,103	4.732	0.37193	0.15191	151.91
24	74	547,602	4.606	0.40404	0.15397	153.97
25	75	516,887	4.477	0.43747	0.15501	155.01
26	76	485,072	4.345	0.47209	0.15479	154.79
27	77	452,340	4.211	0.50772	0.15341	153.41
28	78	418,867	4.076	0.54414	0.15072	150.72
29	79	384,892	3.941	0.58112	0.14671	146.71
30	80	350,687	3.806	0.61835	0.14139	141.39

Lanjutan perhitungan premi asuransi dengan metode premi bersih.

k	Usia	l_x	L	${}_kq_{50}$	B	$1000B$
31	81	316,551	3.672	0.65550	0.13476	134.76
32	82	282,826	3.539	0.69220	0.12699	126.99
33	83	249,851	3.407	0.72809	0.11812	118.12
34	84	217,998	3.278	0.76275	0.10836	108.36
35	85	187,624	3.151	0.79581	0.09792	97.92
36	86	159,071	3.027	0.82688	0.08442	84.42
37	87	133,443	2.905	0.85477	0.07645	76.45
38	88	109,266	2.787	0.88109	0.06539	65.39
39	89	87,706	2.671	0.90455	0.05478	54.78
40	90	68,861	2.559	0.92506	0.04483	44.83
41	91	52,763	2.450	0.94258	0.03570	35.70
42	92	39,371	2.344	0.95715	0.02767	27.67
43	93	28,525	2.242	0.96896	0.02077	20.77
44	94	20,013	2.143	0.97822	0.01509	15.09
45	95	13,543	2.047	0.98526	0.01053	10.53
46	96	8,814	1.955	0.99041	0.00704	7.04
47	97	5,504	1.866	0.99401	0.00454	4.54
48	98	3,270	1.780	0.99644	0.00275	2.75
49	99	1,851	1.697	0.99799	0.00160	1.60

Tabel 4.2: Tabel Lengkap Perhitungan Premi Dengan Ukuran Probabilitas Terdistorsi (Rp)

k	Usia	L	${}_kq_{50}$	C	D	$1000D$
0	50	0.935	0	0.00731	0.00683	6.83
1	51	1.747	0.00609	0.00800	0.01398	13.98
2	52	2.449	0.01276	0.00866	0.02121	21.21
3	53	3.052	0.01998	0.00922	0.02815	28.15
4	54	3.565	0.02766	0.00982	0.03501	35.01
5	55	3.998	0.03584	0.01052	0.04205	42.05
6	56	4.359	0.04459	0.01141	0.04972	49.72
7	57	4.656	0.05408	0.01252	0.05829	58.29
8	58	4.895	0.06448	0.01384	0.06774	67.74
9	59	5.083	0.07597	0.01526	0.07756	77.56
10	60	5.226	0.08862	0.01658	0.08666	86.66
11	61	5.328	0.10235	0.01799	0.09585	95.85
12	62	5.395	0.11720	0.01949	0.10512	105.12
13	63	5.429	0.13325	0.02111	0.11459	114.59
14	64	5.437	0.15058	0.02281	0.12403	124.03
15	65	5.420	0.16923	0.02467	0.13369	133.69
16	66	5.382	0.18930	0.02658	0.14307	143.07
17	67	5.326	0.21081	0.02862	0.15242	152.42
18	68	5.254	0.23381	0.03079	0.16175	161.75
19	69	5.168	0.25835	0.03304	0.17077	170.77
20	70	5.072	0.28444	0.03539	0.17947	179.47
21	71	4.966	0.31208	0.03782	0.18781	187.81
22	72	4.852	0.34126	0.04032	0.19561	191.61
23	73	4.732	0.37193	0.04288	0.20289	202.89
24	74	4.606	0.40404	0.04544	0.20931	209.31
25	75	4.477	0.43747	0.04800	0.21488	214.88
26	76	4.345	0.47209	0.05045	0.21919	219.19
27	77	4.211	0.50772	0.05279	0.22230	222.30
28	78	4.076	0.54414	0.05491	0.22382	223.82
29	79	3.941	0.58112	0.05673	0.22356	223.56
30	80	3.806	0.61835	0.05815	0.22131	221.31

Lanjutan perhitungan premi dengan ukuran probabilitas terdistorsi.

k	Usia	L	${}_kq_{50}$	C	D	$1000D$
31	81	3.672	0.65550	0.05905	0.21680	216.80
32	82	3.539	0.69220	0.05936	0.21004	210.04
33	83	3.407	0.72809	0.05894	0.20083	200.83
34	84	3.278	0.76275	0.05774	0.18927	189.27
35	85	3.151	0.79581	0.05570	0.17553	175.53
36	86	3.027	0.82688	0.05122	0.15503	155.03
37	87	2.905	0.85477	0.04942	0.14357	143.57
38	88	2.787	0.88109	0.04499	0.12538	125.38
39	89	2.671	0.90455	0.04006	0.10700	107.00
40	90	2.559	0.92506	0.03477	0.08898	88.98
41	91	2.450	0.94258	0.02932	0.07184	71.84
42	92	2.344	0.95715	0.02402	0.05630	56.30
43	93	2.242	0.96896	0.01902	0.04263	42.63
44	94	2.143	0.97822	0.01456	0.03119	31.19
45	95	2.047	0.98526	0.01070	0.02189	21.89
46	96	1.955	0.99041	0.00752	0.01469	14.69
47	97	1.866	0.99401	0.00508	0.00949	9.49
48	98	1.780	0.99644	0.00323	0.00576	5.76
49	99	1.697	0.99799	0.00197	0.00335	3.35

Tabel 4.3: Tabel Lengkap Perhitungan Premi Dengan Fungsi *Outcomes* Terdistorsi (Rp)

k	Usia	L	${}_kq_{50}$	$h_\sigma(L)$	E	$1000E$
0	50	0.935	0	0.947	0.00577	5.77
1	51	1.747	0.00609	1.770	0.01180	11.80
2	52	2.449	0.01276	2.493	0.01799	17.99
3	53	3.052	0.01998	3.126	0.02402	24.02
4	54	3.565	0.02766	3.679	0.03008	30.08
5	55	3.998	0.03584	4.159	0.03641	36.41
6	56	4.359	0.04459	4.575	0.04341	43.41
7	57	4.656	0.05408	4.935	0.05135	51.35
8	58	4.895	0.06448	5.245	0.06026	60.26
9	59	5.083	0.07597	5.514	0.06975	69.75
10	60	5.226	0.08862	5.747	0.07887	78.87
11	61	5.328	0.10235	5.948	0.08837	88.37
12	62	5.395	0.11720	6.123	0.09827	98.27
13	63	5.429	0.13325	6.277	0.10875	108.75
14	64	5.437	0.15058	6.413	0.11962	119.62
15	65	5.420	0.16923	6.536	0.13119	131.19
16	66	5.382	0.18930	6.651	0.14305	143.05
17	67	5.326	0.21081	6.761	0.15547	155.47
18	68	5.254	0.23381	6.869	0.16858	168.58
19	69	5.168	0.25835	6.981	0.18215	182.15
20	70	5.072	0.28444	7.100	0.19627	196.27
21	71	4.966	0.31208	7.231	0.21101	211.01
22	72	4.852	0.34126	7.378	0.22628	226.28
23	73	4.732	0.37193	7.546	0.24228	242.28
24	74	4.606	0.40404	7.742	0.25878	258.78
25	75	4.477	0.43747	7.971	0.27600	276.00
26	76	4.345	0.47209	8.243	0.29365	293.65
27	77	4.211	0.50772	8.567	0.31209	312.09
28	78	4.076	0.54414	8.955	0.33109	331.09
29	79	3.941	0.58112	9.421	0.35070	350.70
30	80	3.806	0.61835	9.985	0.37094	370.94

Lanjutan perhitungan premi asuransi dengan fungsi *outcomes* terdistorsi.

k	Usia	L	${}_kq_{50}$	$h_\sigma(L)$	E	$1000E$
31	81	3.672	0.65550	10.670	0.39164	391.64
32	82	3.539	0.69220	11.509	0.41303	413.03
33	83	3.407	0.72809	12.544	0.43485	434.85
34	84	3.278	0.76275	13.830	0.45716	457.16
35	85	3.151	0.79581	15.445	0.47995	479.95
36	86	3.027	0.82688	17.497	0.48802	488.02
37	87	2.905	0.85477	20.018	0.52672	526.72
38	88	2.787	0.88109	23.447	0.55017	550.17
39	89	2.671	0.90455	27.998	0.57419	574.19
40	90	2.559	0.92506	34.157	0.59843	598.43
41	91	2.450	0.94258	42.675	0.62197	621.97
42	92	2.344	0.95715	54.719	0.64591	645.91
43	93	2.242	0.96896	72.222	0.66904	669.04
44	94	2.143	0.97822	98.388	0.69275	692.75
45	95	2.047	0.98526	138.892	0.71481	714.81
46	96	1.955	0.99041	203.779	0.73414	734.14
47	97	1.866	0.99401	311.478	0.75719	757.19
48	98	1.780	0.99644	500.144	0.77222	772.22
49	99	1.697	0.99799	842.460	0.79335	793.35

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama	:	Putri Arum Novianie
No. Registrasi	:	3125102323
Jurusan	:	Matematika
Program Studi	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul "**Perhitungan Premi Asuransi Jiwa Seumur Hidup Dengan Metode Distorsi**" adalah :

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, Agustus 2017

Yang membuat pernyataan

Putri Arum Novianie

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Putri Arum Novianie. Lahir di Jakarta, 01 Nopember 1992, yang dilahirkan dan dibesarkan oleh pasangan Bapak Marpudin dan Ibu Acih R, merupakan anak pertama dari dua bersaudara.

No. Ponsel : 0888 0122 9279
Email : putriarumn@gmail.com

Pendidikan formal yang pernah ditempuh adalah telah menyelesaikan sekolah dasarnya di SD Negeri Ciracas 11 Pagi, lulus pada tahun 2004, yang selanjutnya menyelesaikan sekolah menengah pertamanya di SMP Negeri 09 Jakarta dan lulus pada tahun 2007. Berikutnya melanjutkan sekolah menengah atas di SMA Negeri 58 Jakarta dan lulus pada tahun 2010, yang kemudian pada tahun 2010 melanjutkan pendidikannya di Perguruan Tinggi Negeri di Universitas Negeri Jakarta Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan jurusan dan program studi Matematika.