NILAI DAN VEKTOR EIGEN DALAM

METODE *ANALYTICAL HIERARCHY PROCESS* (AHP)

Skripsi

Disusun untuk melengkapi syarat-syarat

guna memperoleh gelar Sarjana Sains

RIZKA ANNISA FITRI

3125121987

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA

2017

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

NILAI DAN VEKTOR EIGEN DALAM METODE *ANALYTICAL HIERARCHY PROCESS* (AHP)

Nama	:	Rizka Annisa Fitri
No. Registrasi	:	3125121987

		Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab				
Dekan	:	Prof. Dr. Suyono, M.Si.	....	....
		NIP. 19671218 199303 1 005		
Wakil Penanggung Jawab				
Wakil Dekan I	:	Dr. Muktiningsih, M.Si.	....	....
		NIP. 19640511 198903 2 001		
Ketua	:	Dr. Makmuri, M.Si.	....	....
		NIP. 19640715 198903 1 006		
Sekretaris	:	Ratna Widyati, S.Si., M.Kom.	....	....
		NIP. 19750925 200212 2 002		
Penguji Ahli	:	Dr. Lukita Ambarwati, S.Pd, M.Si.	....	....
		NIP. 19721026 200112 2 001		
Pembimbing I	:	Dr. Eti Dwi Wiraningsih, S.Pd, M.Si.	....	....
		NIP. 19810203 200604 1 001		
Pembimbing II	:	Ibnu Hadi, M.Si.	....	....
		NIP. 19810718 200801 1 017		

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal: 30 Mei 2017

LEMBAR PENGESAHAN

Dengan ini saya mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta

Nama	:	Rizka Annisa Fitri
No. Registrasi	:	3125121987
Program Studi	:	Matematika
Judul	:	Nilai dan Vektor Eigen dalam Metode *Analytical Hierarchy Process* (AHP).

Menyatakan bahwa proposal ini telah siap diajukan untuk sidang skripsi.

Menyetujui,

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Eti Dwi W., S.Pd., M.Si	**Ibnu Hadi, M.Si.**
NIP. 19810203 200604 1 001	NIP. 19810718 200801 1 017

Mengetahui,

Koordinator Program Studi Matematika

Dr. Lukita Ambarwati, S.Pd, M.Si.

NIP. 19721026 200112 2 001

ABSTRACT

RIZKA ANNISA FITRI, 3125121987. Eigenvalue and Eigenvector in Analytical Hierarchy Process. Thesis. Faculty of Mathematics and Natural Science Jakarta State University. 2017.

Analytical Hierarchy Process (AHP) is a multicriteria based decision-making method for individual or group with the prior weighting as a final result. One of the essential principles of AHP method is assessment and preparation of priorities presented in the form of pairwise comparison matrices (PCM). In this thesis will be shown that PCM matrix has a value and Eigen vector, if PCM matrix is a consictent matrix (transitive matrix) then there is a scalar value n *(as eigen value) corresponding to a vector which is a priority vector, which is* n *as the size of the matrix;* $A\boldsymbol{v} = n\boldsymbol{v}$. *But if the matrix is not consistent then the eigen value which is corresponding to a vector, is the greatest eigen value (*λ_{max}*) that will be greater or equal to its matrix size (n);* $\lambda_{max} \geq n$. *In this research also contains examples of cases of decision making in the selection of the profession for student of Mathematic major of State University of Jakarta as a simulated AHP method calculation.*

Keywords *: decision-making method, eigenvalue, eigenvector, Analytical Hierarchy Process, pairwise comparison matrices.*

ABSTRAK

RIZKA ANNISA FITRI, 3125121987. Nilai dan Vektor Eigen dalam Metode Analytical Hierarchy Process (AHP). Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. 2017.

Analytical Hierarchy Process (AHP) ialah suatu metode pengambilan keputusan berbasis multikriteria baik bagi individu maupun kelompok dengan hasil akhir berupa bobot prioritas. Salah satu prinsip dasar metode AHP ialah penilaian dan penyusunan prioritas yang disajikan dalam bentuk matriks perbandingan berpasangan atau *pairwise comparison matrices* (PCM). Pada skripsi ini, akan ditunjukkan matriks PCM mempunyai nilai dan vektor Eigen, jika matriks PCM merupakan matriks yang konsisten (matriks transitif) maka terdapat nilai eigen n yang berkorespondensi dengan suatu vektor $\mathbf{v}$ yang merupakan bobot prioritas, di mana n ukuran matriks dan $\mathbf{v}$ vektor eigen; $A\mathbf{v} = n\mathbf{v}$. Namun jika matriks tidak transitif, maka nilai eigen yang berkorespondensi dengan suatu vektor akan memiliki nilai eigen terbesar yang disebut nilai eigen maksimum (λ_{maks}) yang besarnya akan lebih besar atau sama dengan ukuran matriksnya (n); $\lambda_{maks} \geq n$. Dalam skripsi ini juga memuat contoh kasus pengambilan keputusan dalam pemilihan profesi bagi mahasiswa/i program studi Matematika Universitas Negeri Jakarta sebagai simulasi perhitungan metode AHP.

Kata kunci : metode pengambilan keputusan, nilai eigen, vektor eigen, *Analytical Hierarchy Process*, matriks perbandingan berpasangan.

PERSEMBAHANKU...

"Don't worry. Allah SWT is always on time.

And great things take time. Trust Allah SWT."

-Rizka Annisa Fitri-

Skripsi ini kupersembahkan untuk Papah dan Ummi.

"Terima kasih atas do'a, dukungan dari segala arah, dan kesabaran menunggguku menyelesaikan studi".

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT atas pengetahuan dan kemampuan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Nilai dan Vektor Eigen dalam Metode Analytical Hierarchy Process (AHP)" yang merupakan salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Program Studi Matematika Universitas Negeri Jakarta.

Skripsi ini berhasil diselesaikan tidak terlepas dari adanya bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin menyampaikan terima kasih terutama kepada:

1. Drs. Darmawan dan Lasmi Gunarti, S.H. (Papah dan Ummi) yang selalu mendukung, memberi motivasi, dan setia membantu penulis dengan do'a penuh cinta dan kasih sayang yang tulus sampai saat ini.

2. Ibu Dr. Eti Dwi Wiraningsih, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I dan Bapak Ibnu Hadi, M.Si selaku Dosen Pembimbing II, yang telah banyak meluangkan waktunya dalam memberikan bimbingan, saran, nasehat juga motivasi kepada penulis sehingga skripsi ini dapat menjadi lebih baik dan terarah serta memberikan pelajaran hidup yang amat berharga.

3. Ibu Dr. Lukita Ambarwati, S.Pd., M.Si. selaku Koordinator Program Studi Matematika FMIPA UNJ yang telah banyak membantu penulis beserta mahasiswa/i Program Studi Matematika lainnya dalam menyelesaikan studi strata satu kami. Terima kasih banyak, Bu.

4. Ibu Ratna Widyati, S.Si., M.Kom. selaku Pembimbing Akademik atas segala bimbingan dan kerja sama Ibu selama perkuliahan, dan seluruh

Bapak/Ibu dosen atas pengajarannya yang telah diberikan, serta karyawan/karyawati FMIPA UNJ yang telah memberikan informasi yang penulis butuhkan dalam menyelesaikan skripsi.

5. Ibu dan/atau Bapak Dosen Penguji, yang telah membantu memaksimalkan penulisan skripsi ini.

6. Ketiga kakak penulis, Rahma, S.Ikom., M.Si., Rahmi, S.Hum., M.Sc., dan Aulia Akbar, S.E., yang terus mengingatkan penulis untuk segera menyelesaikan skripsi, lulus, dan membahagiakan kedua orang tua.

7. Faralita Faisal, S.Si., Lusia Agustina, S.Si., Meila Nadya, S.Si., Leny Wiji, S.Si., Zie Zie, S.Si., Siti Khotimah, Sharah Annisa, Irma Rahmayani, Mella Apriliani, dan Nurlaela yang telah banyak memotivasi, membantu, dan menyemangati penulis sampai pada titik ini, serta teman-teman Program Studi Matematika 2012 lainnya yang telah memberikan spektrum warna di masa studi di Matematika UNJ.

8. Hans Leonardo, Aina Zulfa, Bishri Al Washil, Pratiwi Mutiara, Nurul Liska, Nuril Imtianah, S.S., Mustikawati, Ikmal Noor, dan teman-teman dari BPRS ERAFM-UNJ lainnya, radio UNJ, yang telah membersamai penulis untuk berjuang mengimbangi antara kuliah dan organisasi serta menyemangati penulis hingga akhir penulisan skripsi ini.

9. Teman-teman dan pihak-pihak yang tidak sempat penulis sebutkan satu per satu. Terima kasih atas segala bantuan dan dukungannya bagi penulis dalam pengerjaan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Masukan dan kritikan akan sangat berarti. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca sekalian.

Jakarta, Mei 2017

Rizka Annisa Fitri

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam fakta kehidupan, manusia seringkali dihadapkan pada suatu pemilihan yang cukup kompleks, sehingga dibutuhkan sejumlah kriteria sebagai bahan penunjang dalam menentukan pilihan (Hafiyusholeh, M., Asyhar, A. H., & Komaria, R., 2015). Untuk itu dibutuhkan pengetahuan mengenai kompleksitas yang akan dihadapi seperti; sasaran atau tujuan yang ingin dicapai, kriteria maupun subkriteria pilihan, solusi berupa alternatif bentuk realisasi dari tujuan, serta *stakeholder* atau yang memiliki andil atau ahli yang kompeten di suatu bidang sebagai responden(Saaty, 1980).

Dalam Supranto, J. (2005), para pembuat keputusan tidak lagi dihadapkan pada pemecahan masalah berkriteria tunggal, karena pada kenyataannya terdapat banyak faktor lainnya yang mempengaruhi keputusan yang dibuat. Jika seseorang ingin menentukan tawaran kerja mungkin ia tidak hanya akan mempertimbangkan pendapatan yang tinggi, namun juga kemungkinan kenaikan pendapatan (prospek kerja), jaminan kesehatan, minat, lokasi, dan sebagainya (Hafiyusholeh, M., Asyhar, A. H., & Komaria, R., 2015). Paparan tersebut menyimpulkan bahwa sebagian besar pengambilan keputusan adalah masalah berkriteria ganda (multikriteria).

Berdasarkan hal tersebut, adanya urgensi dari pengambilan keputusan yang tepat sasaran. Thomas Lourie Saaty, profesor matematika *University of Pittsburgh*, menggagas metode yang dapat digunakan untuk membantu dalam menetapkan suatu keputusan berbasis multikriteria, yang dikenal dengan nama *Analytical Hierarchy Process* (AHP).

Metode AHP dikembangkan di *Wharton Bussiness School, University of Pennsylvania* pada sekitar tahun 1970-an dan dipublikasikan pada tahun 1980. Metode ini memperkenankan pengulangan proses, dengan kata lain dapat merubah atau menambah kriteria maupun tingkatan baru dari hierarki. Dalam metode ini, masalah kompleks diuraikan menjadi komponen-komponennya yang kemudian dibentuk dalam suatu hierarki, diberikan penilaian pada kriteria-kriteria tersebut, kemudian dianalisa secara matematis. Salah satu prinsip dasar metode AHP ialah penilaian dan penyusunan prioritas yang dimaknai dengan membuat penilaian kepentingan relatif dua elemen dari satu tingkat tertentu terhadap tingkat di atasnya yang disajikan dalam bentuk matriks perbandingan berpasangan atau *pairwise comparison matrices* (PCM). Hasil dari matriks PCM ialah berupa bobot angka yang direpresentasikan dalam bentuk vektor yang disebut dengan vektor prioritas atau disebut vektor eigen (Hafiyusholeh, M., & Asyhar, A. H., 2016).

Pada penelitian ini, penulis akan mengaplikasikan metode *Analytical Hierarchy Process* (AHP), di mana vektor eigen merupakan bobot prioritas dalam metode AHP dan nilai eigen berfungsi dalam menguji konsistensi data yang didapatkan melalui kuisioner/wawancara. Oleh karena itu, penulis mengangkat pengkajian hubungan nilai dan vektor Eigen dalam AHP sebagai pembahasan di skripsi ini dengan contoh kasus pengambilan keputusan dalam pemilihan profesi bagi mahasiswa/i program studi Matematika Universitas Negeri Jakarta. Contoh kasus ini dilakukan sebagai simulasi perhitungan menggunakan nilai dan vektor eigen dalam metode AHP secara analisis yang dibantu dengan *software* Microsoft Excel dan Matlab R2016a.

1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah yang akan dikaji adalah

1. Apakah hubungan nilai dan vektor eigen dalam metode *Analytical Hierarchy Process* (AHP) yang menghasilkan bobot prioritas?

2. Bagaimana aplikasi metode *Analytical Hierarchy Process* (AHP) untuk menentukan prioritas dalam contoh kasus pengambilan keputusan?

1.3 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah dalam penulisan ini adalah hanya mengkaji:

1. Aplikasi metode AHP untuk menentukan prioritas dalam contoh kasus.

2. Pembahasan yang akan dipaparkan tidak memberikan perbandingan metode AHP terhadap metode lainnya.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan yang ingin dicapai dalam skripsi ini adalah

1. Mengetahui hubungan nilai dan vektor eigen dalam metode *Analytical Hierarchy Process* (AHP) yang menghasilkan bobot prioritas.

2. Mengaplikasikan metode *Analytical Hierarchy Process* (AHP) untuk menentukan prioritas dalam contoh kasus pengambilan keputusan.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari skripsi ini yaitu hasil dari analisis ini dapat bermanfaat dalam pengembangan ilmu dan aplikasi, khususnya dalam bidang pengambilan keputusan khususnya dengan metode *Analytical Hierarchy Process* (AHP) menggunakan nilai dan vektor eigen.

1.6 Metode Penelitian

Skripsi ini merupakan kajian teori aljabar matriks dan aplikasinya pada contoh kasus pengambilan keputusan ketidakpastian dalam bidang riset operasi matematika berupa analisis studi literatur didasarkan pada buku-buku dan jurnal-jurnal terkait menurut Hafiyusholeh, M., Asyhar, A. H., & Komaria, R. (2015).

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dipaparkan teori terkait nilai eigen dan vektor eigen serta pengenalan metode *Analytical Hierarchy Process* (AHP) seperti prinsip dasar beserta tahapannya. Namun, untuk menyempurnakan pemahaman kedua subbab tersebut, penulis akan diberikan penjelasan teori pengambilan keputusan, matriks, dan vektor terlebih dahulu.

2.1 Teori Pengambilan Keputusan

Pengambilan keputusan merupakan salah satu materi dalam perkuliahan teknik riset operasi bidang teknik probabilitas. Pada subbab ini akan diberikan teori pengambilan keputusan yang dirujuk dari buku Teknik Pengambilan Keputusan oleh J.Supranto (2005).

Dalam J.Supranto (2005), pada dasarnya terdapat empat kategori keputusan, yaitu

1. Keputusan dalam keadaan ada kepastian,
2. Keputusan dalam keadaan ada resiko,
3. Keputusan dalam keadaan ketidakpastian, dan
4. Keputusan dalam keadaan ada konflik.

Uraian lebih lanjut secara singkat dari masing-masing situasi adalah sebagai berikut:

a. Keputusan dalam keadaan adanya kepastian

Apabila semua informasi yang diperlukan untuk mengambil keputusan lengkap, maka keputusan dikatakan dalam keadaan atau situasi ada kepastian. Pengambilan keputusan dalam keadaan tersebut sifatnya deterministik.

Berbagai teknik riset operasi yang tergolong ada kepastian antara lain program linear, persoalan transportasi, dan persoalan penugasan. Misalnya, di dalam persoalan program linear diketahui berapa jumlah keuntungan maksimum yang bisa diperoleh setelah diketahui persedian setiap jenis bahan dan kebutuhan input masing-masing jenis produk.

b. Keputusan dalam keadaan adanya resiko

Resiko terjadi kalau hasil pengambilan keputusan walaupun tak dapat diketahui dengan pasti akan tetapi diketahui nilai kemungkinannya (probabilitasnya). Misalkan saja seseorang ingin memutuskan membeli barang, setiap barang dibungkus rapi sehingga seseorang tersebut tidak tahu mana yang bagus dan yang cacat. Dan misalkan diketahui bahwa jumlah barang ialah 100 buah dan barang yang rusak sejumlah 99 buah. Kemungkinan besar pembeli tidak jadi membeli, sebab resikonya terlalu besar. Akan tetapi sebaliknya jika diketahui barang yang rusak hanya ada satu buah, maka kemungkinan pembeli tersebut akan jadi membeli sebab resikonya kecil.

c. Keputusan dalam keadaan ketidakpastian

Ketidakpastian akan dihadapi sebagai pengambil keputusan bila pengambil keputusan sama sekali tidak tahu dengan keputusannya karena hal yang akan diputuskannya belum pernah terjadi sebelumnya. Contoh pengambilan keputusan dalam ketidakpastian, ketika menghadapi seseorang yang baru saja dikenal, kemudian orang tersebut meminjam uang sebesar Rp500.000,- untuk modal usaha. Pengembalian uang yang dipinjamnya tersebut berjalan atau tidak, serta tepat waktu atau tidak, pemberi sama sekali tidak tahu.

d. Keputusan dalam keadaan adanya konflik

Situasi konflik dapat terjadi kalau kepentingan dua pengambil keputusan atau lebih saling bertentangan atau ada konflik dalam situasi kompetitif. Pengambil keputusan ada konflik bisa juga berarti pemain dalam suatu permainan yang bertentangan.

Contohnya suatu ketika pengusaha A menaikkan harga produknya per unit $Rp200,-$ dan dalam waktu yang sama pengusaha B juga menaikkan $Rp250,-$. Oleh karena harga yang dinaikkan oleh A lebih rendah dari B, banyak pembeli yang membeli barang di tempat A sehingga A memperoleh keuntungan. Walaupun kelihatannya sederhana, keputusan dalam situasi ada konflik seringkali dalam praktiknya menjadi sangat kompleks. Misalnya dihadapkan pada keadaan yang tak pasti ditambah lagi adanya tindakan pihak lawan yang bisa mempengaruhi hasil keputusan. Faktor-faktor yang harus dipertimbangkan menjadi lebih banyak. Keputusan dalam situasi ada konflik bisa dipecahkan dengan teori permainan.

Thomas L. Saaty, mengembangkan metode analisis keputusan dengan keadaan ketidakpastian yang diberi nama *Analytical Hierarchy Process* (AHP). Menurut Saaty, kerumitan dalam pengambilan keputusan itu ialah karena keragaman kriteria. Pada dasarnya metode AHP yang dikembangkan oleh Thomas Saaty, memecah-mecah suatu situasi ke dalam bagian-bagian komponennya dan menata bagian atau variabel ini ke dalam suatu susunan hirarki.

2.2 Matriks dan Operasinya

Dalam ilmu matematika, matriks sering digunakan untuk menyederhanakan penulisan dan perhitungan (Sibaroni, Y., 2002). Menurut Anton, H., & Rorres, C. (2014), suatu matriks dapat mewakili suatu himpunan bilangan yang merupakan entri dari matriks tersebut yang disusun dalam baris dan kolom.

Dalam subbab ini akan diberikan teori terkait matriks dan vektor juga disertakan jenis-jenis matriks yang berkaitan dengan subbab nilai eigen dan vektor eigen, serta *Analytical Hierarchy Process* (AHP), yang dirujuk dari buku *Elementary Linear Algebra* oleh Howard Anton (2014).

Definisi 2.2.1. Matriks ialah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan yang diatur dalam baris dan kolom yang dibatasi dengan tanda kurung, yaitu ( ) atau [ ].

Penulisan matriks menggunakan huruf kapital; A, B, C, dan seterusnya, sedangkan penulisan matriks beserta ukurannya (matriks dengan m baris dan n kolom) adalah $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$, dan seterusnya.

Bentuk umum dari matriks $A_{m\times n}$ adalah :

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

a_{ij} disebut elemen matriks A yang terletak pada baris i dan kolom j, serta a_{ij} disebut elemen diagonal utama matriks A jika $i = j; \forall i, j = 1, 2, ..., n$.

Berikut akan dipaparkan mengenai transpose matriks, trace matriks, determinan matriks, serta invers matriks guna memahami pembahasan pada jenis-jenis matriks.

2.2.1 Transpose dan *Trace* Matriks

Transpose Matriks

Transpose matriks A (dinotasikan A^T) didefinisikan sebagai matriks yang baris-barisnya merupakan kolom dari A.

Definisi 2.2.2. Jika A adalah matriks yang berukuran $m \times n$, maka **transpos dari *A*** dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A; sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya.

Contoh 2.2.1. Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

maka transpose matriks A adalah A^T, yaitu

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

***Trace* Matriks**

Pada matriks persegi terdapat istilah 'trace'. Trace dari matriks merupakan jumlahan elemen-elemen diagonal utama.

Definisi 2.2.3. Jika A ialah matriks persegi, maka **trace matriks** A (dinotasikan $tr(A)$) didefinisikan sebagai jumlah entri-entri dari diagonal utama matriks A.

$$tr(X) = \textstyle\sum_{i=1}^{k} x_{ii}.$$

Contoh 2.2.2. Berikut ini merupakan contoh dari matriks dan trace dari matriks tersebut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dimana,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \text{ dan } tr(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11.$$

2.2.2 Determinan dan Invers Matriks

Determinan Matriks

Definisi 2.2.4. Untuk matriks berukuran $n \times n$ pada setiap lapangan F, dinotasikan $M_{n\times n}(F)$ yang merupakan himpunan matriks $n \times n$ dengan entri-entrinya dari F, dimana **fungsi determinan**

$$det : M_{n\times n}(F) \to F$$

Merupakan fungsi bernilai skalar pada $M_{n\times n}(F)$ (Jacob, 1990).

Pada matriks 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

determinan dari matriks A tersebut adalah $det(A) = ad - bc$.

Untuk mencari determinan dari suatu matriks persegi dengan ukuran yang lebih besar dapat digunakan ekspansi kofaktor.

Definisi 2.2.5. Jika A matriks $n \times n$, maka $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ disebut **kofaktor** dari elemen a_{ij} dengan M_{ij} adalah **minor elemen** a_{ij} yang merupakan determinan dari submatriks yang didapat dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A (Anton, 2000).

Contoh 2.2.3. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Minor elemen a_{11} adalah M_{11} yaitu

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16.$$

Kofaktor elemen a_{11} adalah C_{11} yaitu $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 16$

Sesuai dengan pengertian kofaktor, pada definisi berikut ini akan dijelaskan mengenai penggunaan ekspansi kofaktor untuk mencari determinan dari suatu matriks persegi.

Definisi 2.2.6. Determinan matriks persegi A didefiniskan sebagai penjumlahan perkalian elemen-elemen dalam satu baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktor dari elemen-elemen tersebut dan ditulis sebagai berikut:

- **ekspansi kofaktor** sepanjang kolom ke-j:

  $det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + ... + a_{nj}C_{nj}$, untuk $1 \leq j \leq n$

- **ekspansi kofaktor** sepanjang kolom ke-i:

  $det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + ... + a_{in}C_{in}$, untuk $1 \leq i \leq n$.

(Anton, 2014)

Invers Matriks

Misalkan A ialah matriks berukuran $n \times n$ disebut matriks non singular (invertibel) jika terdapat matriks B sedemikian hingga $AB = BA = I$, dengan I adalah matriks identitas, dan matriks B disebut invers dari A. Jika tidak terdapat matriks B, maka matriks A disebut singular (non invertibel).

Definisi 2.2.7. Jika A, B ialah matriks berukuran $n \times n$ dan berlaku $AB = BA = I$ dimana, I ialah matriks identitas, maka dikatakan bahwa A dapat diinvers dan B adalah matriks invers dari A (dinotasikan A^{-1}).

Contoh 2.2.4. Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

didapatkan

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Maka $B = A^{-1}$ dan $A = B^{-1}$.

Secara umum invers matriks A ialah

$$A^{-1} = \tfrac{1}{det(A)} Adj(A),$$

dimana

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

C_{ij} merupakan kofaktor elemen-elemen a_{ij}, dengan $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Sifat dalam invers matriks yang berlaku :

1. Jika A adalah matriks non singular, maka A^{-1} adalah non singular dan $(A^{-1})^{-1} = A$

2. Jika A dan B adalah matriks non singular, maka AB adalah non singular dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Selanjutnya, akan diberikan beberapa jenis matriks yang perlu diketahui yang akan digunakan dalam bab selanjutnya.

2.2.3 Beberapa Jenis Matriks

Pada bagian ini akan dijelaskan definisi dan bentuk umum dari beberapa jenis matriks sebagai ciri khas dari suatu matriks dengan matriks yang lainnya.

a. Matriks Persegi

Matriks persegi atau matriks bujur sangkar adalah matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolomnya. Karena sifatnya yang demikian ini, dalam matriks persegi dikenal istilah elemen diagonal yang berjumlah n untuk matriks bujur sangkar yang berukuran $n \times n$, yaitu $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$.

Definisi 2.2.8. Suatu matriks A dikatakan **matriks persegi** jika jumlah baris sama dengan jumlah kolom atau matriks berukuran $n \times n$ (sering disebut berordo n).

Bentuk umum dari matriks A persegi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} ; n \epsilon R^n.$$

b. Matriks Positif

Matriks positif ialah matriks yang elemen-elemennya bernilai positif atau non-negatif. Adapun definisi dari matriks positif ialah sebagai berikut.

Definisi 2.2.9. Suatu matriks A dikatakan **matriks positif** jika setiap unsur a_{ij} di A, $a_{ij} > 0$ untuk setiap $i, j = 1, 2, ..., n$ yang dinotasikan dengan $A > 0$.

c. Matriks Identitas

Definisi 2.2.10. Suatu matriks A dikatakan **matriks identitas** jika matriks tersebut berukuran $n \times n$ yang elemen-elemen diagonal utamanya bernilai 1 dan elemen-elemen selain diagonal utama bernilai nol.

Dengan kata lain, $I_n = (a_{ij})$ dimana $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$, dan $a_{ij} = 0$ untuk yang lainnya. Jika A adalah matriks $m \times n$, maka

$$AI_n = A \text{ dan } I_m A = A.$$

d. Matriks Singular dan Non Singular

Matriks $A = [a_{ij}]$ dikatakan singular jika semua elemen pada salah satu baris atau kolom matriks adalah nol, atau jika semua kofaktor dari elemen suatu baris atau kolom sama dengan nol. Untuk melihat kesingularan suatu matriks adalah dengan menghitung determinan matriks tersebut. Apabia determinannya sama dengan nol, maka matriks tersebut singular.

Definisi 2.2.11. Jika matriks A ialah matriks yang berukuran $n \times n$ disebut matriks singular jika $det(A) = 0$. Jika $det(A) \neq 0$, maka matriks tersebut disebut matriks non singular.

e. Matriks Simetri, Simetri Resiprok, dan Transitif

Matriks Simetri

Matriks simetri adalah matrik persegi yang elemen-elemen matriks A bernilai sama dengan matriks transpose-nya (A^T).

Definisi 2.2.12. Sebuah matriks persegi A berordo n dikatakan **matriks simetri** jika elemen-elemen matriks (a_{ij}) adalah bilangan riil taknol dimana diagonal utamanya berfungsi sebagai cermin atau refleksi sedemikian hingga $A^T = A$

Bentuk umum dari matriks $A_{n \times n}$ simetri:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.2.5.

Contoh matriks $A_{3 \times 3}$ simetri:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks Simetri Resiprok

Matriks simetri resiprok ialah matriks simetri yang membentuk suatu perbandingan antar elemen matriks. Berikut definisi dan contoh matriks tersebut sebagai berikut.

Definisi 2.2.13. Sebuah matriks persegi A berordo n dikatakan **matriks simetri resiprok** jika elemen-elemen matriks (a_{ij}) adalah bilangan riil taknol dan

$$a_{ij} \cdot a_{ji} = 1, \forall i \neq j;\ i, j = 1, 2, ..., n$$

$$a_{ii} = 1, \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Bentuk umum dari matriks $A_{n\times n}$ simetri resiprok:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, a_{ii} = 1, \forall i = 1, 2, .., n$$

Contoh 2.2.6.

Contoh matriks $A_{3\times 3}$ simetri resiprok:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1/5 & 1 & 1/9 \\ 1/2 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks Transitif

Definisi 2.2.14. Sebuah matriks persegi A berordo n dikatakan **matriks transitif**, jika elemen-elemen matriks (a_{ij}) adalah bilangan kompleks taknol dan

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik} \text{ untuk setiap } i, j, k.$$

Jika elemen matriks A (a_{ij}) mewakili nilai perbandingan elemen matriks baris i terhadap elemen matriks kolom j dan a_{jk} menyatakan nilai perbandingan elemen matriks baris j terhadap elemen matriks kolom k, maka agar keputusan menjadi konsisten, perbandingan elemen matriks baris i terhadap elemen matriks kolom k harus sama dengan $a_{ij}.a_{jk}$ atau $a_{ij}.a_{jk} = a_{ik}; \forall i, j, k = 1, 2, ..., n$ maka matriks tersebut transitif, dan matriks tersebut dinyatakan konsisten.

Bentuk umum dari matriks $A_{n\times n}$ transitif:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11}.a_{12} & \cdots & a_{11}.a_{1n} \\ a_{22}.a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{22}.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{nn}.a_{n1} & a_{nn}.a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, a_{ii} = 1, \forall i = 1, 2, .., n$$

Contoh 2.2.7.

Contoh matriks $A_{3\times 3}$ transitif:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2.4 Vektor Matriks

Matriks yang hanya mempunyai satu kolom disebut dengan matriks kolom (atau vektor kolom) sedangkan matriks yang hanya mempunyai satu baris disebut dengan matriks baris (atau vektor baris) (Anton, 2000).

Karena vektor merupakan suatu matriks yang mempunyai satu kolom atau satu baris, maka sifat-sifat operasi matriks berlaku pada vektor. Vektor dinotasikan dengan huruf kecil tebal seperti **a, b, c** atau huruf kecil dengan ruas garis seperti $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$. Pada skripsi ini, vektor dinotasikan dengan huruf kecil tebal.

Definisi 2.2.15. Suatu vektor ialah matriks yang hanya terdiri atas satu lajur dan tersusun dari bilangan real v_1, v_2, ..., v_n sebanyak n komponen(R^n).

Definisi 2.2.16. Vektor nol pada R^n dinotasikan dengan **0** dan didefinisikan sebagai vektor

$$\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0).$$

(Anton, 2000)

Jika A merupakan matriks berukuran $n \times n$ maka mungkin terdapat skalar λ dan vektor $\mathbf{v}$ pada R^n yang memenuhi $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Sifat-sifat dari $\mathbf{v}$ dari persamaan tersebut akan dibahas pada subbab berikut.

2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Dalam pembahasan matriks dikenal istilah nilai eigen dan vektor eigen, dimana matriks yang mempunyai nilai dan vektor Eigen adalah matriks yang berukuran $n \times n$. Pada sistem persamaan linear, jika A adalah matriks $n \times n$ yang memenuhi persamaan $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, maka nilai λ inilah yang disebut dengan nilai eigen dan $\mathbf{v}$ merupakan solusi nontrivial yang disebut dengan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ(Anton, 2014).

Pada penjelasan nilai eigen dan vektor eigen ini dirujuk dari buku *Elementary Linear Algebra* oleh Howard Anton (2014) dan juga buku Analisis Regresi oleh R.K. Sembiring (2003).

Definisi 2.3.1. Jika A adalah matriks $n \times n$ maka vektor $n \times 1$ tak nol $\mathbf{v}$ di dalam R^n dinamakan **vektor eigen** dari A jika $A\mathbf{v}$ kelipatan skalar $\mathbf{v}$, yakni:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{2.2}$$

Skalar λ dinamakan **nilai eigen** dari A dan $\mathbf{v}$ dikatakan vektor eigen yang berkorespondensi dengan λ.

Definisi tersebut berlaku untuk matriks dengan elemen bilangan real dan akan mengalami pergeseran ketika elemen berupa bilangan kompleks (Kuttler, 2012). Kemudian, untuk mencari nilai eigen dari matriks A, persamaan (2.2) dapat dituliskan kembali sebagai

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0 \tag{2.3}$$

dengan I adalah matriks identitas yang berordo sama dengan matriks A, dalam catatan matriks :

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, I_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Persamaan (2.3) tersebut mempunyai solusi $\mathbf{v}$ yang taknol jika dan hanya jika

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v}, \mathbf{v} \neq 0 \\ A\mathbf{v} &= \lambda I\mathbf{v} \\ A\mathbf{v} - \lambda I\mathbf{v} &= 0 \\ (A - \lambda I)\mathbf{v} &= 0 \\ \mathbf{v} \neq 0 \rightarrow |A - \lambda I| &= 0 \end{aligned}$$

Untuk memperoleh nilai λ yaitu dengan menghitung

$$|A - \lambda I| = 0 \rightarrow det(A - \lambda I) = 0. \tag{2.4}$$

Persamaan (2.3) disebut dengan persamaan karakteristik dari A, sedangkan persamaan (2.4) merupakan suatu polinomial dengan variabel λ, yang dinotasikan dengan $p(\lambda)$, dan disebut polinomial karakteristik darii A.

Untuk $A_{n\times n}$, maka polinomial karakteristiknya dapat dituliskan sebagai

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_n,$$

yang merupakan polinomial berderajat n dengan koefisien dari λ^n adalah 1. Sehingga persamaan karakteristiknya

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_n = 0,$$

dimana persamaan tersebut mempunyai maksimum n solusi. Dapat disimpulkan matriks berukuran $n \times n$ mempunyai maksimum n nilai eigen (Anton, 2000).

Contoh 2.3.1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Persamaan karakteristiknya,

$$\begin{aligned} p(\lambda) = det(A - \lambda I) &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda 4 &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga nilai eigennya $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_{2,3} = 2$.

$\mathbf{v}$ merupakan vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika $\mathbf{v}$ adalah solusi nontrivial dari $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$, yaitu

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 2$, maka didapat

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan eliminasi Gaussian, didapat

$$v_1 = -s, v_t = t, v_3 = s$$

sehingga vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$ adalah vektor taknoldari bentuk

$$x = \begin{bmatrix} s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

merupakan vektor-vektor eigen yang saling bebas linear yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$.

Untuk $\lambda = 1$, maka

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesainnya menghasilkan vetor eigen $\mathbf{v} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 1$.

Dalam Kuttler (2012), diketahui bahwa matriks A (M_n) memiliki nilai eigen di mana nilai eigen tersebut dapat berupa bilangan real ataupun bilangan kompleks. Jika nilai eigennya berupa bilangan kompleks maka konjugat kompleksnya merupakan nilai eigen dari matriks tersebut. Pasangan konjugat kompleks ini bisa muncul karena polinomial karakteristik dari matriks A, yaitu $det(\lambda I - A)$ memiliki koefisien berupa bilangan real. Akibatnya, jika polinomial tersebut mengandung akar kompleks, maka akar-akar kompleks ini muncul dalam pasangan konjugat. Namun hal yang berbeda akan kita peroleh jika matriks A berukuran $n \times n$ adalah matriks simetris. Terdapat teorema yang menjamin bahwa semua nilai eigen dari sebarang matriks simetris selalu bernilai real (Teorema Perron).

2.3.1 Teorema Perron

Sebelum membahas mengenai Teorema Perron berikut ini akan dikenalkan notasi yang akan digunakan dalam pembahasan selanjutnya. Misalkan $A \in M_n(R)$ dengan entri-entri bilangan riil, yaitu $A = [a_{ij}]$ untuk setiap $i, j = 1, 2, ..., n$ dan $M_n(R)$ adalah ruang matriks riil $n \times n$. Matriks A disebut matriks positif dinotasikan $A > 0$, jika untuk setiap elemen dari matriks A bernilai positif. Kemudian notasi $|a|$ menyatakan matriks atau vektor yang entri-entri matriks atau vektornya adalah nilai mutlak entri-entri matriks atau vektor $\mathbf{a}$.

Definisi 2.3.2. Misalkan $A \in M_n(R)$. Himpunan semua nilai eigen A disebut spektrum A, dinotasikan $\sigma(A)$. Spektral radius dari matriks A adalah $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. Spektral radius dinotasikan $\rho(A)$ merupakan lingkaran terkecil dalam bidang kompleks yang memuat semua nilai eigen dari matriks A.

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} \{|\lambda|\}.$$

Akibat 2.3.1. Misalkan $A \in M_n(R), \mathbf{v} \in R^n, \mathbf{v} > 0$ dan $A \geq 0$, pernyataan di bawah ini benar

1. Jika $\alpha, \beta \geq 0$ sehingga $\alpha\mathbf{v} \leq A\mathbf{v} \leq \beta\mathbf{v}$, maka $\alpha \leq \rho(A) \leq \beta$.

2. Jika $\alpha\mathbf{v} \leq A\mathbf{v}$, maka $\alpha < \rho(A)$.

3. Jika $A\mathbf{v} \leq \beta\mathbf{v}$, maka $\rho(A) < \beta$.

Untuk bukti Akibat 2.3.1 dapat dilihat dalam A.Horn (1985).

□

Lemma 2.3.1. Misalkan $A \in M_n(R)$ dengan $A > 0$. Jika $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, untuk $\mathbf{v} \in R_n$, $\lambda \in R, \mathbf{v} \neq 0$, dan $|\lambda| = \rho(A)$, maka $A|\mathbf{v}| = \rho(A)|\mathbf{v}|$ dan $|\mathbf{v}| > 0$.

Bukti: Perhatikan bahwa

$$\rho(A)|\mathbf{v}| = |\lambda||\mathbf{v}| = |\lambda\mathbf{v}| = |A\mathbf{v}| \leq |A||\mathbf{v}| = A|\mathbf{v}|.$$

Misalkan

$$\mathbf{y} = A|\mathbf{v}| - \rho(A)|\mathbf{v}| \geq 0.$$

Karena $|\mathbf{v}| \geq 0$ dan $|\mathbf{v}| \neq 0$ diperoleh $A|\mathbf{v}| = 0$

Untuk kasus $\mathbf{y} = 0$, $|\mathbf{v}|$ didapat,

$$\begin{aligned} A|\mathbf{v}| &= \rho(A)|\mathbf{v}| \\ |\mathbf{v}| &= \rho(A)^{-1}A|\mathbf{v}| > 0 \end{aligned}$$

.

Untuk kasus $\mathbf{y} \neq 0$, terlebih dulu definisikan $\mathbf{z} = |\mathbf{v}| > 0$ sehingga

$$\begin{aligned} 0 &< y = A\mathbf{z} - \rho(A)\mathbf{z} \\ A\mathbf{z} &> \rho(A)\mathbf{z}. \end{aligned}$$

Berdasarkan Akibat 2.3.1 didapat $\rho(A) > \rho(A)$. Hal ini tidak mungkin. Maka haruslah $\mathbf{y} = 0$ sehingga kesimpulannya $|\mathbf{v}| > 0$.

□

Teorema 2.3.1. Misalkan $A \in M_n(R)$ dan $A > 0$, dan $\rho(A) > 0$, maka terdapat vektor positif $\mathbf{v} \in R_n$ sehingga $A\mathbf{v} = \rho(A)\mathbf{v}$.

Bukti: Berdasarkan Definisi 2.3.1, terdapat λ dengan $|\lambda| = \rho(A) > 0$ yang bersesuaian dengan vektor eigen $\mathbf{v} \neq 0$. Dari Lemma 2.3.1 vektor tersebut adalah $|\mathbf{v}|$.

□

Definisi 2.3.3. Suatu nilai eigen dari matriks A dinamakan nilai eigen maksimum dari A jika nilai mutlaknya lebih besar dari nilai mutlak nilai-nilai eigen lainnya, sedangkan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen maksimum dinamakan vektor eigen maksimum (Anton, 2014).

Teorema Perron diperlukan sebagai jaminan bahwa terdapat nilai eigen λ senantiasa memiliki nilai positif dan akan lebih besar dari nilai eigen lainnya, atau disebut dengan nilai eigen maksimal λ_{maks}.

Teorema 2.3.2. Misalkan A merupakan matriks positif berordo n. Jika $\mathbf{w}$ merupakan vektor tak nol sehingga $A\mathbf{w} = \lambda_{maks}\mathbf{w}$, maka $\lambda_{maks} \geq n$.

Bukti:

Karena $\mathbf{w}$ merupakan vektor eigen yang berkorespondensi dengan λ_{maks}, maka berlaku

$$(A - \lambda_{maks} I)\mathbf{w} = 0 \tag{2.5}$$

Persamaan ke-ij dari sistem persamaan linear (3.11) dapat ditulis sebagai berikut

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j - \lambda_{maks} w_i = 0$$

Dengan kata lain,

$$\lambda_{maks} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i}$$

Selanjutnya akan diperoleh

$$n\lambda_{maks} = n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, i\neq j}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i}$$

Karena $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}; i, j = 1, 2, ..., n$ dan

$$a_{ij} \frac{w_j}{w_i} = \frac{1}{a_{ij} \frac{w_j}{w_i}},$$

serta dengan memperhatikan bahwa

$$x + \frac{1}{x} = 2 + \frac{(x-1)^2}{x}, x \neq 0, x = a_{ij} \frac{w_j}{w_i},$$

maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda_{maks} &= 1 + \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (a_{ij} \frac{w_j}{w_i} + \frac{1}{a_{ij} \frac{w_j}{w_i}}) \\ &= 1 + \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (2 + \frac{(a_{ij} w_j - w_i)^2}{a_{ij} w_i w_j}) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} 2 &= \textstyle\sum_{2}^{n} 2 + \sum_{3}^{n} 2 + ... + \sum_{n}^{n} 2 \\ &= 2(n-1) + 2(n-2) + ... + 2(n-(n-1)) \\ &= 2[(n-1) + (n-1) + ... + (n-1)] \\ &= 2[\tfrac{(n-1)n}{2}] \\ &= (n-1)n \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\lambda_{maks} = n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (\frac{(a_{ij} w_j - w_i)^2}{n a_{ij} w_i w_j})$$

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa $\lambda_{maks} \geq n$, dan kesamaan $\lambda_{maks} = n$ hanya akan dipenuhi jika dan hanya jika $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ untuk semua $i, j = 1, 2, ..., n$.

$\square$

Dengan kata lain, pembuktian ini menginterpretasikan jika λ_{maks} dekat dengan n, maka $\mathbf{w}$ konsisten karena indikator terhadap kekonsistenan diukur melalui persamaan (2.5) dan dikatakan konsisten jika nilai $CR \leq 0,10$.

Saaty (1980) memanfaatkan nilai eigen maksimal λ_{maks} untuk mengukur kekonsistenan dalam matriks banding pasang atau *pairwise comparison matrices*(PCM), dimana matriks PCM ialah alat pokok dari *Analytical Hierarchy Process* (AHP). Berikut diberikan teori mengenai metode AHP.

2.4 *Analytical Hierarchy Process* (AHP)

Analytical Hierarchy Process (AHP) adalah metode pengambilan keputusan yang dapat digunakan dalam menentukan keputusan terbaik, di mana metode AHP merupakan suatu komprehensif metodologi yang menyediakan kemampuan untuk menggabungkan faktor kuantitatif dan kualitatif dalam pengambilan keputusan bagi individu maupun kelompok. AHP ditampilkan dalam bentuk model hirarki yang terdiri atas tujuan, kriteria, mungkin beberapa level multikriteria, dan alternatif untuk tiap keputusan(Saaty, 1980).

Definisi 2.4.1. Metode AHP memiliki sifat-sifat yang terdiri dari:

1. **Perbandingan yang Resiprok**, yang mengandung arti bahwa matriks perbandingan berpasangan yang terbentuk harus bersifat berkebalikan. Misalnya, jika A adalah k lebih penting dari pada B maka B adalah $1/k$ kali lebih penting dari A

2. **Kehomogenan**, yaitu mengandung arti kesamaan dalam melakukan perbandingan. Misalnya, tidak dimungkinkan membandingkan jeruk dengan bola tenis dalam hal rasa, akan tetapi lebih relevan jika membandingkan dalam hal berat.

3. **Dependen**, yang berarti setiap tingkat mempunyai keterkaitan.
4. **Ekspektasi**, yang berarti menonjolkan penilaian yang bersifat ekspektasi dan preferensi dari pengambilan keputusan. Penilaian merupakan data kuantitatif yang bersifat kualitatif.

2.4.1 Prinsip AHP

Kerangka kinerja metode AHP yang fleksibel dan efektif dapat membantu seseorang atau kelompok dalam pengambilan keputusan, di mana metode AHP berlandaskan beberapa prinsip dasar, yaitu

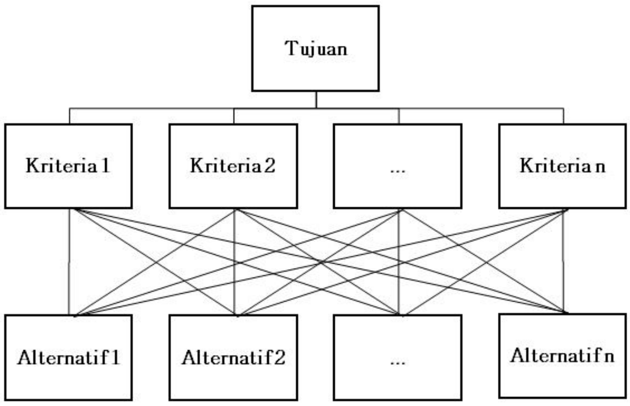
1. Dekomposisi atau pembentukan hierarki
2. Penilaian komparatif
3. Sintesa prioritas
4. Konsistensi logis

a. Dekomposisi atau Pembentukan Hierarki

Dekomposisi atau pembentukan hierarki adalah memecahkan atau membagi problematik yang utuh menjadi unsur-unsurnya ke bentuk hierarki proses pengambilan keputusan. Seluruh bagian hierarki saling berhubungan dan dapat dilihat hubungan satu faktor dapat mempengaruhi faktor lainnya yang diilustrasikan pada gambar berikut:

Gambar 2.2 di atas diinterpretasikan dengan tingkatannya sebagai berikut

1. Tingkat pertama : tujuan keputusan.
2. Tingkat kedua : kriteria-kriteria (ditambahkan sub-kriteria jika dibutuhkan).



Gambar 2.1: Bentuk Umum Struktur Hierarki

3. Tingkat ketiga : alternatif-alternatif (ditambahkan sub-alternatif jika dibutuhkan).

Secara singkat, suatu tujuan dapat diperoleh dengan membuat kriteria maupun subkriteria sebagai bahan pertimbangan suatu keputusan. Setelah itu dibuatlah alternatif atau solusi yang memadai. Kemudian timbul pertanyaan seberapa kuat pengaruh dari suatu elemen dari tingkatan yang terendah (alternatif keputusan) dari hierarki terhadap tujuan keseluruhan. Untuk itu perlu diperhatikan prioritasnya.

Kemudian akan dijelaskan prinsip metode AHP, penilaian komparatif beserta sintesa prioritas.

b. Penilaian Komparatif dan Sintesa Prioritas

Langkah pertama dalam menetapkan prioritas ialah melakukan penilaian secara komparatif untuk membandingkan masing-masing kriteria dan subkriteria terhadap alternatif yang ditawarkan secara berpasangan dengan melakukan wawancara atau kuisioner (Lampiran 1). Dalam penilaian tersebut digunakan bilangan yang untuk menggambarkan relatif pentingnya suatu kriteria satu dengan yang lainnya yang dijelaskan dalam tabel berikut.

Tabel 2.1: Skala Saaty

Tingkat Kepentingan	**Definisi**	**Penjelasan**
1	Sama Penting	Kedua elemen mempunyai pengaruh yang sama
3	Sedikit lebih penting	Pengalaman dan penilaian sangat memihak satu elemen dibandingkan dengan pasangannya
5	Lebih penting	Satu elemen sangat disukai dan secara praktis dominasinya sangat nyata dibandingkan dengan elemen pasangannya
7	Sangat penting	Satu elemen terbukti sangat disukai dan secara praktis dominasinya sangat, dibandingkan dengan elemen pasangannya
9	Mutlak lebih penting	Satu elemen mutlak lebih disukai dibandingkan dengan pasangannya, pada tingkat keyakinan tinggi
2, 4, 6, 8	Nilai tengah antara dua batas nilai	Nilai diantara dua pilihan yang berdekatan
Resiprokal	Kebalikan	Jika elemen i memiliki salah satu angka di atas ketika dibandingkan elemen j, maka j memiliki kebalikannya ketika dibanding elemen i

Sumber: Saaty (2008)

Tabel 2.1 memuat nilai banding pasang atau dikenal dengan **skala Saaty** yang mendefinisikan dan menjelaskan nilai 1 sampai dengan 9 yang ditetapkan dalam membandingkan pasangan elemen yang sejenis di setiap tingkat hierarki terhadap suatu kriteria yang berada setingkat di atasnya.

Pada dasarnya metode AHP dapat digunakan untuk mengolah data dari suatu responden ahli. Namun demikian pada aplikasinya penilaian kriteria alternatif dilakukan oleh beberapa ahli multidisipliner (kelompok). Kemudian untuk mencari nilai rata-rata gabungan dari para responden, digunakan rumus ratarata geometrik (*Geometric Mean/GM*) dari penilaian yang diberikan oleh seluruh anggota kelompok yang dirumuskan sebagai berikut

$$GM = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_n} \tag{2.6}$$

dimana

GM = *Geometric Mean* atau nilai rata-rata geometri

x_1 = penilaian orang ke-1

x_i = penilaian orang ke-i

x_n = penilaian orang ke$n$

n = jumlah penilai.

Hasil dari wawancara atau kuisioner tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk matriks, yang dikenal sebagai matriks perbandingan berpasangan atau *pairwise comparison matrices* (PCM). Dalam Farkas, A. (2007), matriks PCM merupakan **matriks persegi, positif, dan simetri resiprok** sedemikian hingga elemen-elemen matriks tersbut a_{ij} merupakan bilangan riil dan positif. Kemudian, dari pengoperasian matriks PCM, akan didapatkan vektor prioritas yang merupakan hasil dari metode AHP.

Bentuk umum matriks PCM ialah sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Dari setiap matriks PCM kemudian dicari vektor eigennya untuk mendapatkan prioritas lokal. Karena matriks (matriks-matriks) PCM terdapat pada setiap tingkat, maka untuk mendapatkan prioritas global harus dilakukan sintesa di antara prioritas lokal. Prosedur melakukan sintesa berbeda menurut bentuk hierarki.

Setelah membentuk hierarki dan mendapatkan suatu susunan prioirtas dengan vektor (vektor prioritas), akan diuji validitas data tersebut dengan menggunakan nilai eigen maksimal, apakan masih di batas konsisten atau tidak.

d. Konsistensi Logis

Dalam penilaian perbandingan berpasangan sering terjadi ketidakkonsistenan dari pendapat atau preferensi yang diberikan oleh pengambil keputusan. Untuk itu perlu mengukur konsistensi dari penilaian yaitu dengan menghitung rasio konsistensi atau *consistency ratio* (CR). Uji konsistensi ini telah didapatkan oleh Saaty, T.L. (1980), di mana uji konsistensi tersebut sudah menjadi tetapan dan sering digunakan untuk mengevaluasi persoalan pengambilan keputusan multi kriteria menggunakan metode AHP.

Rasio konsistensi merupakan perbandingan antara indeks konsistensi dengan nilai random indeks (RI) dari matriks berordo n, yang didefiniskan sebagai berikut. Persamaan perbandingan konsistensi menurut Saaty, T.L. (1988) adalah sebagai berikut:

$$CR = \frac{CI}{RI},$$

dan

$$CI = \frac{(\lambda_{max} - n)}{(n-1)} \tag{2.8}$$

dengan

CR : *consistency rasio* atau rasio konsistensi

CI : *consistency index* atau indeks konsistensi

RI : *random index* atau indeks random

λ_{max} : nilai eigen maksimum

n : ordo matriks.

Dalam Alonso, J. A., & Lamata, M. T. (2006), Saaty mendapatkan nilai rata-rata *random index* (RI) seperti pada tabel berikut yang bergantung pada ordo matriks n.

Tabel 2.2: Nilai Random Index (RI)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RI	0,000	0,000	0,580	0,900	1,120	1,240	1,320	1,410	1,450

n	10	11	12	13	14	15
RI	1,490	1,510	1,480	1,560	1,570	1,590

Dalam menggunakan nilai RI pada tabel di atas (Tabel 2.2) ialah sesuai dengan ordo matriksnya. Misal, untuk matriks berukuran 3×3 (berordo 3), nilai RI sebesar 0,580, kemudian untuk matriks berukuran 4×4 (berordo 4), nilai RI sebesar 0,900, dan seterusnya.

Nilai eigen maksimum (λ_{maks}) pada persamaan di atas (2.8) didapat dengan menjumlahkan hasil perkalian matriks PCM dengan vektor prioritas (vektor eigen yang bersesuaian dengan matriks PCM tersebut) dan membaginya dengan n (ordo matriks). Sedangkan CR ialah nilai inkonsisten, di mana dalam bidang sosial, batas kesalahan ialah 10% atau 0,10 (Mulyono, 2004). Untuk itu dalam kasus pengambilan keputusan metode AHP ini nilai CR tidak boleh dari 10% atau $CR \leq 0,10$, maka hasil penilaian tersebut dikatakan konsisten. Apabila nilai $CR > 0,10$ maka penilaian yang dilakukan belum dianggap konsisten dan perlu dilakukan pengulangan penilaian.

Kemudian akan dipaparkan tahapan AHP dalam mencapai suatu pilihan keputusan.

2.4.2 Tahapan AHP

Dalam menentukan suatu keputusan menggunakan metode AHP, dapat dilakukan melalui langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan masalah dan menentukan solusi yang diinginkan;

2. Membuat struktur hierarki yang diawali dengan tujuan utama, dilanjutkan dengan kriteria-kriteria dan alternatif-alternatif pilihan yang ingin diperingkatkan;

3. Membentuk matriks PCM yang menggambarkan pengaruh tujuan terhadap kriteria dan alternatif. Perbandingan dilakukan berdasarkan penilaian dari responden atau pembuat keputusan dengan menilai tingkat kepentingan suatu faktor dibanding dengan faktor lainnya;

4. Menormalkan data dengan cara mendistribusikan data sebagai distribusi probabilitas secara menyeluruh yaitu dengan syarat

$$p_{ij} = a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}, \forall i, j = 1, 2, , n.$$

   ; membagi nilai dari setiap elemen di dalam matriks yang berpasangan dengan nilai total dari setiap kolom;

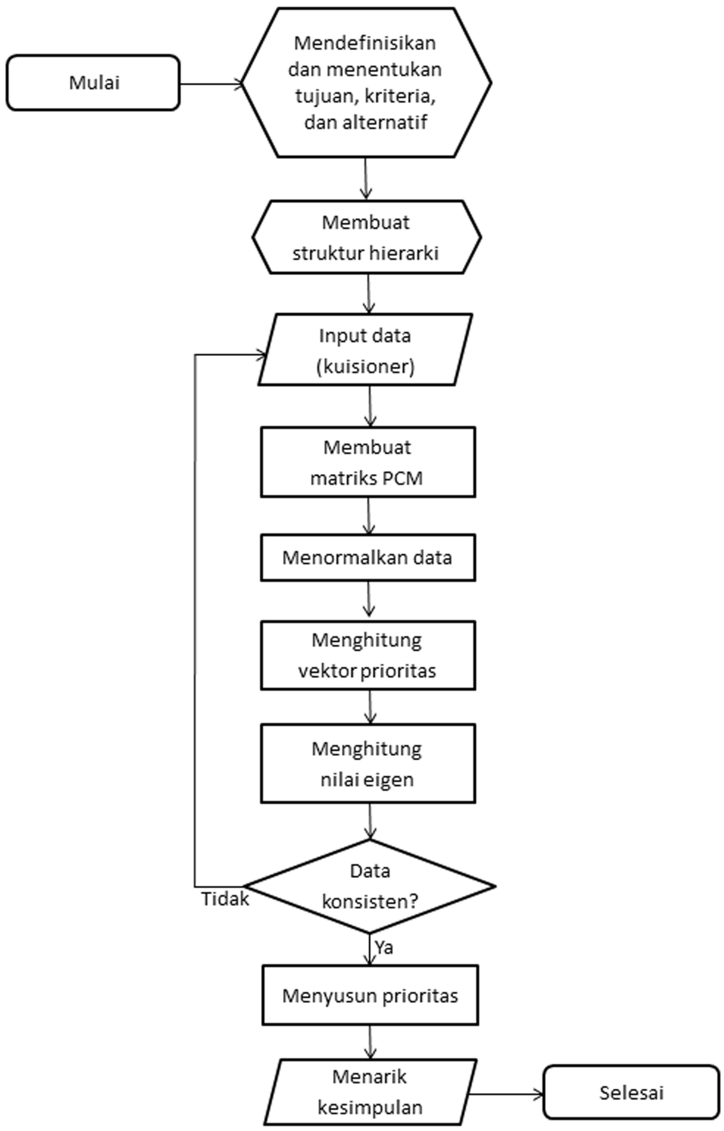
5. Menghitung vektor prioritas dengan menjumlahkan entri pada matriks yang sudah dinormalisasikan tiap baris;

6. Menghitung nilai eigen dari matriks PCM yang berkorespondensi dengan vektor prioritas (vektor eigen);

7. Menguji kekonsistenannya. Jika tidak konsisten, maka penilaian pada kuisioner perlu diulang;

8. Menyusun prioritas berdasarkan hasil yang didapat dalam menghitung vektor prioritas dan sudah diuji kekonsistenan datanya.

Tahap-tahap tersebut diilustrasikan dalam Gambar 2.2 sebagai berikut:



Gambar 2.2: Diagram Alir Tahapan AHP

2.4.3 Kelebihan dan Kekurangan Metode AHP

Sebagai sistem pengambilan keputusan dalam memecahkan masalah, metode AHP memiliki beberapa kekurangan yaitu:

1. Input utama ini berupa persepsi seorang ahli sehingga dalam hal ini melibatkan subyektifitas sang ahli selain itu juga model menjadi tidak berarti jika ahli tersebut memberikan penilaian yang keliru.

2. Ketergantungan model AHP pada input utamanya. Untuk melakukan perbaikan keputusan, harus di mulai lagi dari tahap awal.

3. Metode AHP ini hanya metode matematis tanpa ada pengujian secara statistik sehingga tidak ada batas kepercayaan dari kebenaran model yang terbentuk.

Berikut ini disebutkan kelebihan dari metode AHP.

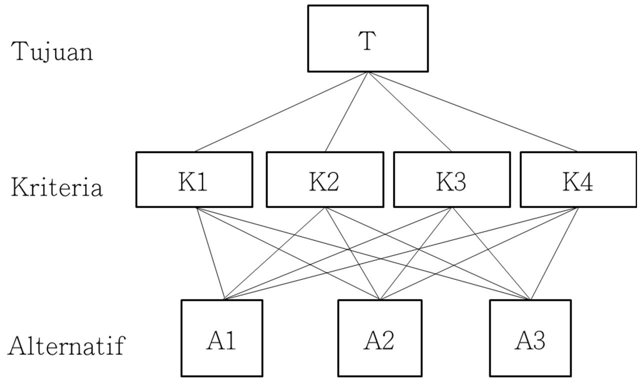
1. Struktur yang berhierarki.

2. Memperhitungkan validitas data yang diperoleh dengan batas toleransi inkonsistensi berbagai kriteria dan alternatif yang dipilih oleh para pengambil keputusan.

3. Berkemampuan untuk memecahkan masalah yang multiobjektif dan multikriteria yang berdasarkan pada perbandingan preferensi dari setiap elemen dalam hierarki.

2.4.4 Ilustrasi AHP

Berdasarkan tahapan AHP yang sudah dijelaskan sebelumnya, tahap pertama yang dilakukan ialah membentuk suatu hierarki dari permasalahan tersebut. Berikut bentuk hierarkinya.



Gambar 2.3: Struktur Hierarki

Setelah itu dilakukan penilaian terhadap masing-masing kriteria. Untuk ilustrasi AHP pada penulisan ini menggunakan data asumsi sesuai ketentuan. Berikut contoh hasil penilaian dari responden.

Tabel 2.3: Bentuk Perbandingan Berpasangan

K	A1	A2	A3
A1	1	1/2	1/4
A2	2	1	1/2
A3	4	2	1

Tabel 2.3 merupakan penilaian perbandingan berpasangan setiap kriteria terhadap tujuan. Lalu, bentuk tersebut ditransformasikan ke dalam suatu matriks, kemudian akan dihitung nilai eigen dan vektor eigen dengan cara menormalisasikan matriks (terdapat di 2.3.3). Berikut perhitungannya diawali dengan menjumlahkan jumlah kolom, kemudian membagi tiap entri matriks dengan jumlah masing-masing kolom.

K	A1	A2	A3
A1	1	1/2	1/4
A2	2	1	1/2
A3	4	2	1
$\sum a_j$	7	3,5	1,75

di mana $\sum a_j$ di atas ialah jumlah entri matriks kolom.

$$\Downarrow$$

K	A1	A2	A3	$\sum a_i$	n	$\mathbf{v}=\frac{\sum}{n}$
A1	0,1429	0,1429	0,1429	0,4287	3	0,1429
A2	0,2857	0,2857	0,2857	0,8571	3	0,2857
A3	0,5714	0,5714	0,5714	1,7142	3	0,5714

di mana $\sum a_i$ di atas ialah jumlah entri matriks baris, n jumlah kriteria, dan $\mathbf{v}$ ialah vektor eigen yang dinormalkan yang disebut bobot prioritas dalam metode AHP.

Kemudian dihitung nilai eigen dengan rumus $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ di mana A ialah matriks PCM, $\mathbf{v}$ vektor eigen, dan λ adalah nilai eigen. Fungsi nilai eigen ialah untuk dicari nilai eigen maksimum yang digunakan dalam uji konsistensi rasio ($CR \leq 0,1$). Berikut uraiannya.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1429 \\ 0,2857 \\ 0,5714 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,4286 \\ 0,8572 \\ 1,7144 \end{bmatrix} \\
A\mathbf{v}_i &= \lambda_i \mathbf{v}_i \\
\lambda_i &= \begin{bmatrix} 0,4286/0,1429 \\ 0,8572/0,2857 \\ 1,7144/0,5714 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Nilai rata-rata dari hasil pembagian tersebut ialah nilai eigen maksimum (Hafiyusholeh, 2016). Berikut ini dihitung rata-rata tersebut.

$$\lambda_{maks} = \frac{3+3+3}{3} = 3$$

Langkah selanjutnya yaitu menguji konsistensi data yang disubstitusi ke dalam rumus uji konsistensi [persamaan (2.7)], diperoleh

$$CI = 0$$

Untuk matriks berordo 4, maka nilai RI ialah sebesar 0,580 (Tabel 2.3), sehingga didapat diperoleh $CR = 0$. Karena $CR \leq 0,1$ (syarat konsisten), maka prefensi responden konsisten.

Dari hasil perhitungan di atas, ditunjukkan bahwa alternatif ketiga $A3$ merupakan alternatif yang paling penting bagi mahasiswa dalam memilih profesi dengan nilai bobot 0,5714. berikutnya adalah alternatif kedua *A2* dengan nilai bobot 0,2857; alternatif pertama *A1* dengan nilai bobot 0,1429. Dapat disimpulkan bahwa, matriks transitif memiliki nilai eigen maksimum sama dengan ukuran matriks ($\lambda_{maks} = n = 3$).

Untuk menghitung besarnya bobot pengaruh tujuan terhadap kriteria dilakukan cara yang sama seperti di atas, disusun matriks perbandingan berpasangan lalu dihitung bobot prioritas serta uji konsistensinya.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan pengkajian matriks perbandingan berpasangan atau *pairwise comparison matrices* (PCM) dalam metode *Analytical Hierarchy Process* (AHP). Pengkajian ini dilakukan untuk mendapatkan bobot prioritas yang disajikan berbentuk vektor (vektor prioritas) dalam metode AHP dengan menggunakan nilai eigen dan vektor eigen. Kemudian akan diberikan contoh kasus model pengambilan keputusan yaitu pemilihan profesi mahasiswa program studi Matematika Universitas Negeri Jakarta.

3.1 Hubungan Nilai dan Vektor Eigen dalam Metode AHP

Pada subbab ini akan dibahas hubungan vektor prioritas sebagai vektor eigen dalam metode AHP dan nilai eigen sebagai pengujian konsistensi data. Menurut Mulyono, S. (2004), terdapat banyak cara untuk mencari vektor prioritas dari matriks PCM, akan tetapi penekanan pada konsistensi menyebabkan rumus vektor eigen digunakan dalam metode AHP.

Diketahui terdapat sejumlah n kriteria dari suatu keputusan yang dinotasikan dengan $K_1, K_2, K_3, ..., K_n$ yang setiap kriterianya akan dibandingkan dan dinilai tingkat kepentingannya. Hasil dari perbandingan tersebut akan disajikan dalam bentuk matriks PCM pada persamaan (2.7).

Nilai perbandingan kriteria K_i terhadap elemen K_j adalah a_{ij}, dimana a_{ij}

merupakan entri dari matriks A. Kemudian diketahui bahwa a_{ij} ialah derajat kepentingan faktor i terhadap faktor j dan a_{jk} ialah derajat kepentingan dari faktor j terhadap faktor k. Agar suatu keputusan menjadi konsisten, kepentingan faktor i terhadap faktor k harus sama dengan $a_{ij} \cdot a_{jk}$ atau sama dengan $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$ untuk semua $i, j, k = 1, 2, 3, ..., n$. Berdasarkan Definisi 2.1.14., matriks tersebut merupakan matriks transitif.

Berikut akan dijelaskan hubungan suatu matriks transitif dengan vektor $\mathbf{w}$ yang bersesuaian dengan matriks PCM A dimana $\mathbf{w}$=$(w_1, w_2, ..., w_n)^T$, dengan $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}; a_{ik} = \frac{w_i}{w_k}; a_{kj} = \frac{w_k}{w_j}; i, j, k = 1, 2, 3, ..., n.$
Persamaan di atas ekivalen dengan bentuk persamaan matriks di bawah ini

$$A = a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}.$$

Untuk matriks yang konsisten akan didapat

$$a_{ij}.a_{jk} = \frac{w_i}{w_j}.\frac{w_j}{w_k} = \frac{w_i}{w_k} = a_{ik}$$

dan

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} = \frac{1}{\frac{w_j}{w_i}} = \frac{1}{a_{ji}}. \tag{3.1}$$

Dari persamaan (3.1) didapatkan

$$\begin{aligned} a_{ij}a_{ji} &= \tfrac{w_i}{w_j}\tfrac{w_j}{w_i} = a_{ii} = 1 \\ a_{ij}\tfrac{w_j}{w_i} &= 1 \end{aligned}.$$

Kemudian, dari persamaan di atas dapat ditunjukkan bahwa $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{w_j}{w_i} = n$, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a_{ij}a_{ji} &= \tfrac{w_i}{w_j}\tfrac{w_j}{w_i} \\
\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji} &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \tfrac{w_i}{w_j}\tfrac{w_j}{w_i} \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \tfrac{w_i}{w_i} \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ii} \qquad . \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} 1 \\
&= 1 + 1 + ... + 1 \\
&= n.
\end{aligned}$$

Diketahui matriks A berukuran $n \times n$, akibatnya

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tfrac{w_j}{w_i} &= n \\
\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j.\tfrac{1}{w_i} &= n \\
\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j &= nw_i; \quad i, j = 1, 2, 3, ..., n. \\
A\mathbf{w} &= n\mathbf{w}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.2.1, formulasi ini menunjukkan bahwa $\mathbf{w}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan matriks A dengan nilai eigen n dimana n merupakan dimensi atau ukuran matriks itu sendiri.

Pada praktiknya, tidak selalu didapat penilaian konsisten, atau

$$a_{ij} \neq \frac{a_{ik}}{a_{kj}},$$

dengan kata lain penilaian yang diberikan untuk setiap elemen persoalan suatu tingkat kepentingan dapat saja tidak transitif. Pada kondisi seperti ini, nilai eigen maksimal (λ_{maks}) dapat digunakan sebagai pendekatan untuk mendapatkan vektor prioritas sehingga persamaannya menjadi

$$A\mathbf{w} = \lambda_{maks}\mathbf{w}.$$

Nilai eigen maksimal (λ_{maks}) tersebut bernilai akan lebih besar dari ukuran matriks A (n) sebagaimana yang diuraikan pada Teorema 2.3.2.

3.2 Penentuan Vektor Prioritas Menggunakan Nilai dan Vektor Eigen dalam Metode AHP

Keluaran dari metode *Analytical Hierarchy Process* (AHP) ialah vektor prioritas. Untuk menghasilkan vektor prioritas didapatkan melalui pengoperasian matriks PCM. Pada subbab ini, akan dilakukan pengkajian matriks PCM untuk mendapatkan vektor prioritas dengan menggunakan nilai eigen dan vektor eigen dari model pengambilan keputusan. Berikut akan dipaparkan proses tahapan metode AHP seperti yang sudah dijelaskan pada bab sebelumnya.

3.2.1 Pembentukan Matriks PCM

Dengan memperhatikan tahapan metode AHP pada landasan teori yang telah disajikan, dalam menggunakan metode tersebut perlu dilakukan penilaian pada masing-masing kriteria dan alternatif untuk menghasilkan vektor prioritas. Setelah dilakukan penilaian melalui kuisioner atau wawancara, hasil penilaian tersebut dijadikan bentuk perbandingan berpasangan.
Bentuk perbandingan berpasangan tersebut diilustrasikan pada tabel berikut.

Tabel 3.1: Perbandingan Berpasangan

S	K_1	K_2	$\cdots$	K_n
K_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
K_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
K_n	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{nn}

di mana Tabel 3.1 dimisalkan memiliki n kriteria, dinotasikan dengan K_1, K_2, ..., K_n, di mana K_1, K_2, ..., K_n merupakan kriteria yang akan dinilai berdasarkan perbandingan satu sama lain dengan S sebagai dasar pembandingnya.

S merupakan alternatif yang ditawarkan. Nilai $a_{ij} = a_{11}, a_{12}, ...a_{nn}$, di mana a_{ij} merepresentasikan suatu nilai perbandingan.

Ambil salah satu entri matriks A, a_{12}, dapat diilustrasikan sebagai seberapa jauh tingkat kepentingan kriteria-1 K_1 (baris) terhadap kriteria-2 dibandingkan dengan K_2 (kolom), atau seberapa jauh dominasi K_1 (baris) terhadap K_2 (kolom).

Selanjutnya, bentuk perbandingan berpasangan (Tabel 3.1) akan ditransformasikan ke dalam bentuk matriks yang disebut dengan matriks PCM dengan bentuk umum sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Jika terdapat vektor **w** dengan **w**$=w_1, w_2, ..., w_n$, di mana **w** ialah vektor yang bersesuaian dengan matriks PCM, sedemikian hingga matriks A dapat ditulis sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Diberikan contoh suatu matriks PCM yang sudah diberikan penilaian dengan menggunakan skala Saaty (menurut tingkat kepentingannya) dengan variabel E,F,G,H menyatakan macam kriteria dalam suatu pilihan.

Pembacaan matriks PCM A dimaknai dari kiri ke kanan. Sebagai contoh,

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} E & F & G & H \\ \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1/5 & 1 & 1/5 & 1/6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 \\ 7 & 6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{c} E \\ F \\ G \\ H \end{array}$$

interpretasi baris-1 dan kolom-2 yang bernilai 5 ($a_{12} = 5$) diartikan: objek E dibandingkan dengan F didapatkan E 'lebih penting' daripada F, dan seterusnya.

Setelah didapatkan matriks PCM tersebut, langkah berikutnya ialah menormalisasikan data matriks tersebut.

3.2.2 Proses Normalisasi Data dan Penghitungan Vektor Prioritas

Sebelum melakukan perhitungan vektor prioritas, dalam metode AHP dibutuhkan proses normalisasi matriks keputusan ke suatu skala yang dapat diperbandingkan dengan semua alternatif yang ada. Berikut tahapan dalam menghitung vektor prioritas.

1. Menormalisasikan dengan mentransformasikan matriks PCM ke dalam bentuk matriks probabilitas transisi, yaitu dengan menjumlahkan nilai setiap kolom dari matriks PCM. Rumus menormalisasikan matriks PCM disajikan sebagai berikut:

$$p_{ij} = a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}, \forall i, j = 1, 2, , n.$$

2. Mendapatkan vektor prioritas dengan menjumlahkan semua nilai tiap baris dari matriks probabilitas transisi tersebut. Hasil pembagian terse-

but menunjukkan nilai prioritas untuk masing-masing elemen.

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}, \forall i, j = 1, 2, , n.$$

3.2.3 Pengujian Konsistensi Matriks dan Penyusunan Prioritas

Indikator terhadap konsistensi diukur melalui rasio konsistensi. Persamaan rasio konsistensi menurut Saaty, T.L. (1988) adalah sebagai berikut

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

dengan,

CR : *consistency rasio* atau rasio konsistensi

CI : *consistency index* atau indeks konsistensi

RI : *random index* atau indeks random

dimana,

$$CI = \frac{(\lambda_{max} - n)}{(n-1)}. \tag{3.3}$$

Dalam Alonso, J. A., & Lamata, M. T. (2006), Saaty mendapatkan nilai rata-rata *random index* (RI) seperti pada tabel berikut yang bergantung pada ordo matriks n.

Tabel 3.2: Nilai Random Index (RI)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RI	0,000	0,000	0,580	0,900	1,120	1,240	1,320	1,410	1,450

n	10	11	12	13	14	15
RI	1,490	1,510	1,480	1,560	1,570	1,590

Matriks perbandingan berpasangan atau matriks PCM dalam metode AHP dapat diterima jika nilai rasio konsistensi kurang dari sama dengan 10% ($CR \leq 0,10$).

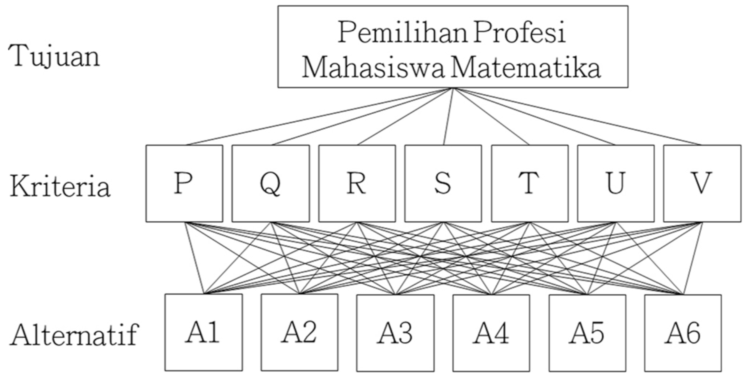
3.3 Simulasi Kasus Pengambilan Keputusan

Simulasi kasus pengambilan keputusan diambil dari data kuisioner pemilihan profesi mahasiswa program studi matematika pada tahun 2015, dengan format kuisioner pada **Lampiran 1**. Simulasi kasus pengambilan keputusan dengan nilai dan vektor eigen dalam perhitungannya di skripsi ini dilakukan dengan menggunakan bantuan *software Microsoft Excel* dan *software Matlab R2012b*. Algoritma yang digunakan adalah sebagai berikut.

1. Memasukkan data ke dalam bentuk matriks X
2. Membentuk fungsi untuk menormalisasikan data dalam matriks X
3. Membentuk fungsi perhitungan bobot prioritas B berbentuk vektor (vektor eigen)
4. Menghitung nilai eigen (di mana vektor eigen sudah didapatkan (3))
5. Membentuk fungsi dan menghitung nilai indeks konsistensi
6. Menghitung rasio konsistensi
7. (Jika konsisten) Mengurutkan vektor eigen berdasarkan bobot/nilainya.

Berdasarkan algoritma tersebut, dibentuk script fungsi metode AHP yang digunakan untuk melakukan analisis secara numerik. Script fungsi metode AHP tersebut terdapat pada **Lampiran 3** dan script hasil dari metode AHP terdapat pada **Lampiran 4**.

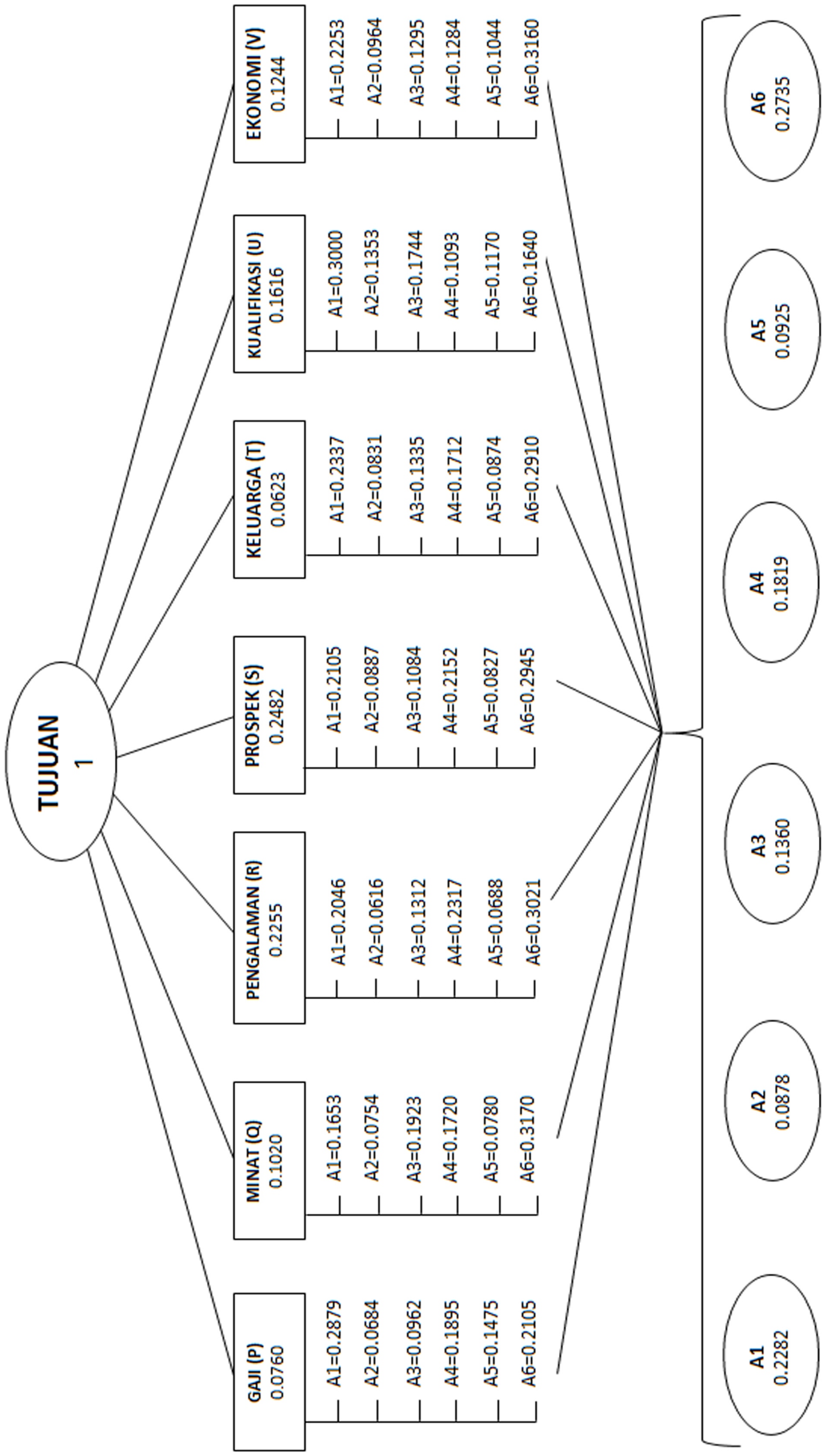
Contoh kasus yang diangkat untuk mengilustrasikan penggunaan metode AHP ialah pemilihan kebutuhan pokok bagi mahasiswa. Kriteria pemilihan kebutuhan pokok pada ilustrasi ini didasarkan pada tingkat ketersediaan, trend atau kecendrungan, dan biaya yang dikeluarkan oleh mahasiswa. Tahap pertama yang dilakukan ialah membentuk suatu hierarki dari permasalahan tersebut. Berikut bentuk hierarkinya.



Gambar 3.1: Hierarki Pemilihan Profesi Mahasiswa Matematika

Gambar 3.1 merupakan bentuk hierarki pemilihan profesi mahasiswa matematika dengan tujuan yaitu pemilihan profesi mahasiswa matematika dengan tujuh kriteria; Gaji (P), minat (Q), pengalaman (R), prospek kerja (S), pengaruh keluarga (T), kualifikasi (U), dan keadaan ekonomi (V). Alternatif yang ditawarkan pada simulasi ini terdapat enam alternatif; aktuaris (*A1*), programmer (*A2*), pendidik (*A3*), wirausahawan (*A4*), ilmuwan(*A5*), dan pegawai kantoran (*A6*).

Setelah membentuk hierarki, dilakukan penilaian banding pasang melalui kuisioner. Penilaian banding pasang ini dilakukan terhadap masing-masing kriteria terhadap tujuan, serta masing-masing alternatif terhadap kriteria. Diambil 5 responden secara acak sebagai simulasi dari perhitungan ini. Kemuddian, nilai prefensi gabungan tersebut didapatkan menggunakan rumus *Geometric Mean* (GM). Data hasil preferensi gabaungan terdapat pada Lampiran 1, serta hasilnya terdapat pada Lampiran 3, yang dirangkum dengan bagan sebagai berikut.



Gambar 3.2: Hasil Penilaian Preferensi Gabungan untuk Keputusan Pemilihan Profesi

Dari bagan pada Gambar 3.2 diketahui bahwa urutasn prioritas profesi yang diminati mahasiswa jurusan matematika fakultas matematika dan ilmu pengetahuan alam Universitas Negeri Jakarta adalah pegawai kantoran, aktuaris, wirausahawan, pendidik, ilmuwan, dan *programmer*, dengan rincian sebagai berikut

1. Pegawai Kantoran (*A6*) dengan bobot 0.2735 (27.35%)
2. Aktuaris (*A1*) dengan bobot 0.2282 (22.82%)
3. Wirausahawan (*A4*) dengan bobot 0.1819 (18.19%)
4. Pendidik (*A3*) dengan bobot 0.1360 (13.60%)
5. Ilmuwan (*A5*) dengan bobot 0.0925 (9.25%)
6. *Programmer* (*A2*) dengan bobot 0.0878 (8.78%)

Kemudian dari Gambar 3.2 di atas dapat disimpulkan juga bahwa kriteria prospek kerja (S) merupakan kriteria yang paling penting bagi mahasiswa dengan bobot 0,2482 atau 24.82%. Berikutnya adalah kriteria pengalaman dan kemahiran (R) dengan nilai bobot 0,2255 atau 22.55%, kemudian kriteria kualifikasi akademik (U) dengan nilai bobot 0,1616 atau 16.16%. Kemudian kriteria keadaan ekonomi (V) dan minat (Q) dengan nilai bobot 0,1244 (12.44%) dan 0.1020 (10.20%). Bobot paling rendah ialah kriteria gaji (P) dan pengaruh keluarga (T) dengan nilai bobot 0.0760 (7.60%) dan 0.0623 (6.23%).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Pada bab sebelumnya telah dibahas setiap rumusan masalah yang diteliti dalam skripsi ini. Berdasarkan pembahasan tersebut dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Berdasarkan definisi nilai dan vektor eigen, telah dibuktikan bahwa jika matriks PCM merupakan matriks yang konsisten (matriks transitif) maka terdapat nilai skalar n(nilai eigen) yang berskorespondensi dengan suatu vektor $\mathbf{v}$ (vektor eigen) yang merupakan vektor prioritas, di mana n ukuran matriks.

$$A\mathbf{v} = n\mathbf{v}$$

. Namun jika matriks tidak konsisten, maka nilai eigen yang berkorespondensi dengan suatu vektor, yaitu nilai eigen terbesar (λ_{maks}) yang besarnya akan lebih besar atau sama dengan ukuran matriksnya (n)

$$\lambda_{maks} \geq n.$$

2. Simulasi contoh kasus pemilihan profesi mahasiswa matematika dengan tujuan yaitu prioritas profesi mahasiswa matematika tersebut memiliki tujuh kriteria. Kriteria tersebut berupa gaji, minat, pengalaman, prospek kerja, pengaruh keluarga, kualifikasi, dan keadaan ekonomi. Kemudian alternatif yang ditawarkan pada simulasi ini terdapat enam alterna-

tif yaitu aktuaris, programmer, pendidik, wirausahawan, ilmuwan, dan pegawai kantoran.

Urutan prioritas profesi yang diminati oleh mahasiwa matematika FMIPA UNJ dengan mempertimbangkan seluruh kriteria adalah

(a) Pegawai Kantoran dengan bobot 0.2735 (27.35%)

(b) Aktuaris dengan bobot 0.2282 (22.82%)

(c) Wirausahawan dengan bobot 0.1819 (18.19%)

(d) Pendidik dengan bobot 0.1360 (13.60%)

(e) Ilmuwan dengan bobot 0.0925 (9.25%)

(f) *Programmer* dengan bobot 0.0878 (8.78%)

4.2 Saran

- Metode AHP sangat tergantung pada penilaian yang diberikan oleh pembuat keputusan, oleh karena itu diharapkan pembuat keputusan memiliki pengalaman dan pengetahuan yang baik dalam bidangnya.

- Jika pembaca tertarik untuk melanjutkan materi pengambilan keputusan kriteria ganda ini, disarankan untuk mengkaji dan mengkomparasi metode yang menghasilkan vektor prioritas lainnya, seperti metode *least-square*, metode *chi-square*, maupun metode *singular value decompotition.*

DAFTAR PUSTAKA

Alonso, J. A., & Lamata, M. T. (2006). Consistency in the analytic hierarchy process: a new approach. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 14(04), 445-459.

Anton, H., & Rorres, C. (2014). *Applications Chapter: Elementary Linear Algebra*. Edisi 11. Wiley.

Farkas, A. (2007). The analysis of the principal eigenvector of pairwise comparison matrices. *Acta Polytechnica Hungarica, 4*(2), 99-115.

Garminia, H., Hafiyusholeh, M. Astuti, P. (2010). Pengaruh Gangguan pada Perubahan Prioritas dan Indeks Konsistensi Matriks Perbandingan Berpasangan dalam Analytical Hierarchy Process. *Jurnal Matematika dan Sains*. Vol. 15 No. 3.143.

Hafiyusholeh, M., & Asyhar, A. H. (2016). Vektor Prioritas dalam Analytical Hierarchy Process (AHP)dengan Metode Nilai Eigen. *Jurnal Matematika" MANTIK", 1*(2), 44-49.

Hafiyusholeh, M., Asyhar, A. H., & Komaria, R. (2015). Aplikasi Metode Nilai Eigen Dalam Analytical Hierarchy Process Untuk Memilih Tempat Kerja. *Jurnal Matematika" MANTIK", 1*(1), 6-16.

Horn, Roger dan Johnson, Charles. (1985). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press.

Kuttler, Kenneth. 2012. Elementary Linear Algebra . Ventus Publishing ApS. ISBN 978-87-403-0018-5

Mulyono, S. (2004). *Riset Operasi*. Edisi Kedua. Jakarta: Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia

Saaty, T. L. (1980). *Decision Making for leaders: The analytical hierarchy* *process for decisions in a complex work*. Lifetime Learning Publications.

Saaty, T.L. (1988) *Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process. Planning, Priority Setting, Resource Allocation*. University of Pittsburg.

Sibaroni, Y. (2002). Buku Ajar Aljabar Linier. *IT Telkom, Bandung*.

Supranto, J. (2005). *Teknik Pengambilan Keputusan (edisi revisi)*. Penerbit RINEKA CIPTA.

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama	:	Rizka Annisa Fitri
No. Registrasi	:	3125121987
Program Studi	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul "**Nilai dan Vektor Eigen dalam Metode *Analytical Hierarchy Process* (AHP)**" adalah :

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, Mei 2017

Rizka Annisa Fitri

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

RIZKA ANNISA FITRI. Lahir di Jakarta, 03 Februari 1995. Putri bungsu (anak ke empat dari empat bersaudara) dari pasangan Bapak Drs. Darmawan dan Ibu Lasmi Gunarti, S.H. Saat ini bertempat tinggal di Jalan Cinta Damai No 17 RT 009/ RW 021 , Depok II Tengah 16431.

No. Ponsel	:	085718888592
Email	:	rizkaannisaf@gmail.com

Riwayat Pendidikan : Penulis mengawali pendidikan di TKA Dzaratul Muthmainnah selama 1 tahun. Penulis menyelesaikan studi sekolah dasar di SDN Cempaka Putih Barat 09 Pagi, Jakarta Pusat. Kemudian untuk sekolah menengah pertama dan menengah atas, penulis melanjutkan ke SMPN 76 Jakarta dan SMAN 109 Jakarta. Di tahun 2012, penulis melanjutkan studi di Universitas Negeri Jakarta (UNJ), program studi Matematika, melalui jalur tertulis. Tahun 2017, penulis telah memperoleh gelar Sarjana Sains untuk Program Studi Matematika, FMIPA, UNJ.

Riwayat Organisasi : Selama di bangku perkuliahan, penulis aktif di berbagai organisasi pemerintahan mahasiswa maupun organisasi mahasiswa. Dalam dua tahun pertama, penulis menjadi Biro Kesekretariatan di BEM tingkat Jurusan Matematika, serta menjadi bagian dari Unit Kegiatan Mahasiswa (UKM) Kelompok Mahasiwa Pecinta Fotografi (KMPF) UNJ. Tahun ke-tiga, penulis aktif sebagai staff Departemen KOMINFO di BEM tingkat Universitas UNJ, dan menjadi bagian dalam UKM *Educational Radio* (ERA FM) UNJ, menjadi penyiar serta staff Departemen *Public Relations.* Di tahun keempat, penulis dipercaya untuk mengemban amanah sebagai *General Manager* di UKM ERA FM UNJ. Di tahun ke-empat juga, penulis tergabung dalam kegiatan Ekspedisi Beranda Indonesia.

Riwayat Pekerjaan : Penulis mulai menjadi pengajar matematika sejak tahun 2008 saat masih dibangku sekolah menengah atas. Mulai tahun 2014 penulis memutuskan untuk berkecimpung di berbagai kegiatan dan organisasi non-profit seperti menjadi relawan (*volunteer*), panitia, tim ekspedisi, *master of ceremony* (MC) berbagai acara, dan sebagainya.