

PEMODELAN DATA DERET WAKTU DENGAN
VARIANS TIDAK KONSTAN MENGGUNAKAN
*GENERALIZED AUTOREGRESSIVE
CONDITIONAL HETEROCEDASTICITY (GARCH)*

Skripsi
Disusun Untuk Melengkapi Syarat-syarat
Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains



AMBAR MANGESTI
3125111212

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA
2015

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

PEMODELAN DATA DERET WAKTU DENGAN VARIANS TIDAK KONSTAN MENGGUNAKAN *GENERALIZED AUTORE- GRESSIVE CONDITIONAL HETEROCEDASTICITY(GARCH)*

Nama : Ambar Mangesti

No. Registrasi : 3125111212

	Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab			
Dekan	: Prof. Dr. Suyono, M.Si. NIP. 19671218 199303 1 005
Wakil Penanggung Jawab			
Pembantu Dekan I	: Dr. Muktiningsih, M.Si NIP. 19600408 199003 2 002
Ketua	: Drs. Sudarwanto, M.Si., DEA NIP. 19650325 199303 1 003
Sekretaris	: Vera Maya Santi, M.Si. NIP. 19790531 200501 2 006
Penguji	: Dra. Widyanti Rahayu, M.Si. NIP. 19661103 200112 2 001
Pembimbing I	: Prof. Dr. Suyono, M.Si. NIP. 19671218 199303 1 005
Pembimbing II	: Dian Handayani, M.Si. NIP. 19740415 199803 2 001

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal: 23 Juni 2015

ABSTRACT

AMBAR MANGESTI, 3125111212. Modelling Time Series Data with Non-Constant Variance Using Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity (GARCH). Thesis. Faculty of Mathematics and Natural Sciences. State University of Jakarta. 2015.

This thesis study about modeling of time series data which has a non-constant residual variance (heterocedasticity). The Heterocedasticity is caused by the high volatility in time series data. A non-constant residual variance can be modeled by Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity (GARCH), which is a generalization of Autoregressive Conditional Heterocedasticity (ARCH) model. Residual variance in the ARCH model depends only on the squared of past residual. On the other hand, residual variance in the GARCH model not only depends on the squared of past residual but also past residual variance. This thesis discuss about modeling time series data with non-constant variance, where the non-constant condition resolved by modeling the residual using GARCH. Beside estimating parameter of GARCH model, in this thesis is also discussed the application of GARCH on modeling of daily closing stock price PT. Unilever Indonesia, Tbk period of May 6,2010 - January 16,2015. The result of analysis showed that ARMA(1,1) model with residual model GARCH(1,1) is the best estimation model to modeling daily closing stock price on PT. Unilever Indonesia, Tbk.

Keywords : Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity (GARCH), Autoregressive Conditional Heterocedasticity (ARCH), heterocedasticity, volatility.

ABSTRAK

AMBAR MANGESTI, 3125111212. **Pemodelan Data Deret Waktu dengan Varians Tidak Konstan Menggunakan *Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity (GARCH)*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. 2015.**

Skripsi ini membahas tentang pemodelan data deret waktu yang mempunyai varians residual tidak konstan (heterokedastisitas). Kondisi heterokedastisitas ini disebabkan adanya volatilitas yang tinggi pada data deret waktu. Varians residual yang tidak konstan dapat dimodelkan dengan *Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity (GARCH)*, yang merupakan pengembangan dari model *Autoregressive Conditional Heterocedasticity (ARCH)*. Pada model *ARCH*, varians residual hanya bergantung pada kuadrat residual masa lalu, sedangkan pada model *GARCH*, varians residual tidak hanya bergantung pada kuadrat residual masa lalu tetapi juga bergantung pada varians residual masa lalu. Dalam penulisan skripsi ini dijelaskan tentang pemodelan data deret waktu dengan varians residual tidak konstan, dimana kondisi tidak konstan tersebut diatasi dengan memodelkan residual menggunakan *GARCH*. Selain pendugaan parameter dari model *GARCH*, pada skripsi ini juga dibahas aplikasi *GARCH* pada pemodelan data penutupan harga saham harian PT. Unilever Indonesia, Tbk periode 6 Mei 2010 - 16 Januari 2015. Hasil analisis menunjukkan bahwa model *ARMA (1,1)* dengan model residual *GARCH(1,1)* merupakan model dugaan terbaik untuk memodelkan penutupan harga saham pada PT. Unilever Indonesia, Tbk.

Kata kunci : *Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity (GARCH)*, *Autoregressive Conditional Heterocedasticity (ARCH)*, heterokedastisitas, volatilitas.

PERSEMBAHANKU...

"....Minta tolonglah (kepada Allah s.w.t untuk mencapai cita-citamu) dengan sifat sabar dan salat. Dan sesungguhnya salat itu berat sekali, kecuali bagi orang-orang yang khusuk..."

(QS. Al Baqarah : 45)

"...Sukses bukanlah hasil dari ledakan yang instan, kita harus menyalakan kayu api diri kita sendiri..."

(Arnold H. Glasow)

Skripsi ini kupersembahkan untuk....

kedua orangtuaku,

kakakku Wulan, Niken dan Glenn serta keluarga besarku.

"Terima kasih atas dukungan, do'a, serta kasih sayang kalian..."

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT atas pemberian pengetahuan dan kemampuan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pemodelan Data Deret Waktu dengan Varians Tidak Konstan Menggunakan *Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity (GARCH)*" yang merupakan salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Jurusan Matematika Universitas Negeri Jakarta.

Skripsi ini berhasil diselesaikan tak lepas dari bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Suyono, M.Si. selaku Dosen Pembimbing I dan Dian Handayani, M. Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, saran, nasehat, serta pengarahan dalam pengerjaan skripsi ini sehingga menjadi lebih baik. Terima kasih banyak dan mohon maaf atas segala kekuranganku, semoga kesehatan selalu tercurah kepada Bapak, Ibu dan keluarga.
2. Drs. Makmuri, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNJ dan Ratna Widianti, S.Si, M.Kom. selaku Ketua Prodi Matematika FMIPA UNJ. Terima kasih atas segala bantuan dan kerja sama Bapak dan Ibu selama masa pengerjaan skripsi ini.
3. Drs. Bambang Irawan, M. Si selaku Pembimbing Akademik atas segala bimbingan dan kerja sama Bapak selama perkuliahan penulis dan seluruh Bapak/Ibu dosen Jurusan Matematika atas pengajaran yang telah diberikan, serta karyawan/karyawati FMIPA UNJ lainnya atas informasi dan bantuan yang diberikan selama masa pengerjaan skripsi ini.

4. Mama dan Papa tercinta, serta kakak-kakakku tersayang Mbak Wulan, Mbak Niken dan Mas Glenn terima kasih atas do'a dan dukungan tulus ikhlas yang diberikan selama ini. Tanpa do'a dan semangat dari kalian, penulis tidak akan mampu menyelesaikan skripsi ini tepat pada waktunya.
5. Oom, Tante dan Mbah Putri tersayang yang selalu memberi semangat dan do'a selama pengerjaan skripsi ini.
6. Sahabat - sahabatku Vira, Riska, Nida, Syifa, Idam, Desya dan Indah dwi terima kasih telah menjadi teman terdekat selama kurang lebih 4 tahun ini. Terima kasih atas bantuan, do'a dan dukungan ikhlas yang telah diberikan selama ini. Terima kasih telah memberikan canda tawa di sela 4 tahun perkuliahan yang cukup melelahkan. Semoga persahabatan ini dapat terus terjalin.
7. Sahabat-sahabatku tercinta dari prodi Matematika 2011. Terima kasih CTT, Bons, D.O.T + Danu, Nancy, Monic, Fitri, Debora, dan Rizky Anugrah atas bantuan, dukungan dan pertemanannya selama ini. Terima kasih juga ingin penulis ucapkan kepada rekan sesama satu dosen pembimbing, Anti dan Dytta. Terima kasih karena sudah menjadi teman menunggu setiap bimbingan dan menjadi teman tukar pikiran selama pengerjaan skripsi ini.
8. Sahabatku Efah dan Anis terima kasih atas semua dukungan, semangat, dan do'a selama ini. Terima kasih karena selalu ada setiap penulis membutuhkan semangat selama pengerjaan skripsi ini. Semoga persahabatan kita tetap terjalin selamanya.
9. Kepada semua pihak yang telah membantu baik secara langsung maupun

tidak langsung. Tanpa kalian skripsi ini tidak akan selesai tepat pada waktunya.

Penulis menyadari skripsi ini masih jauh dari sebuah kesempurnaan. Oleh karena itu masukan dan kritik yang membangun akan sangat berarti. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Jakarta, Juni 2015

Ambar Mangesti

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	iv
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR TABEL	ix
DAFTAR GAMBAR	x
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Pembatasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penulisan	3
1.5 Manfaat Penulisan	3
1.6 Metode Penelitian	3
II LANDASAN TEORI	4
2.1 <i>Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA)</i>	4
2.1.1 <i>Autoregressive (AR)</i>	4
2.1.2 <i>Moving Average (MA)</i>	5
2.1.3 <i>Autoregressive Moving Average (ARMA)</i>	5
2.2 <i>Autoregressive Conditional Heterocedastic (ARCH)</i>	6
2.2.1 Distribusi dari Orde Pertama Proses <i>ARCH</i> Linear	9
2.2.2 Proses <i>ARCH</i> orde ke- q	13
2.3 Fungsi <i>Likelihood</i>	17

2.4	Model Regresi <i>ARCH</i>	20
2.4.1	Estimasi Model Regresi <i>ARCH</i>	22
III PEMBAHASAN		24
3.1	<i>Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity (p,q)</i> . . .	24
3.1.1	Proses <i>GARCH (1,1)</i>	30
3.2	Estimasi model <i>GARCH (p,q)</i>	36
3.2.1	Estimasi model <i>GARCH (1,1)</i>	38
3.3	Uji <i>Unit Root</i>	44
3.4	Uji Heterokedastisitas	46
3.5	<i>Akaike Information Criteria (AIC)</i>	47
3.6	Langkah-Langkah Proses <i>GARCH</i>	47
3.7	Penerapan Model <i>GARCH</i> pada Data Riil	50
3.7.1	Uji Stasioneritas Data	52
3.7.2	Pendugaan orde dan parameter model ARIMA	54
3.7.3	Uji Heterokedastisitas	56
3.7.4	Penentuan Model dan Estimasi Model <i>GARCH</i>	57
IV PENUTUP		65
4.1	Kesimpulan	65
4.2	Saran	67
DAFTAR PUSTAKA		69
LAMPIRAN-LAMPIRAN		70

DAFTAR TABEL

3.1	Nilai <i>AIC</i> Model <i>ARIMA</i>	55
3.2	Nilai <i>AIC</i> Model <i>ARCH</i>	60
3.3	Estimasi Parameter dan Uji Signifikansi Model <i>GARCH</i> (1,1) . . .	62

DAFTAR GAMBAR

2.1	Grafik Residual Inflasi Bahan Makanan Indonesia	7
3.1	Diagram Alir Proses <i>GARCH</i>	49
3.2	Grafik Data Penutupan Saham Harian PT. Unilever Indonesia, Tbk	50
3.3	Grafik Return Saham Harian PT. Unilever Indonesia, Tbk	51
3.4	Plot <i>ACF Return</i> Harga Saham	52
3.5	Plot <i>PACF Return</i> Harga Saham	53
3.6	Grafik Residual <i>ARMA(1,1)</i>	57
3.7	Grafik Residual Kuadrat <i>ARMA(1,1)</i>	58
3.8	Plot <i>ACF Residual Kuadrat ARMA(1,1)</i>	59
3.9	Plot <i>PACF Residual Kuadrat ARMA(1,1)</i>	59

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Volatilitas merupakan suatu kondisi dimana nilai dari suatu variabel dapat naik dengan cepat lalu secara tiba-tiba turun dengan cepat. Volatilitas dapat menyebabkan varians residual dari suatu model deret waktu klasik menjadi tidak konstan (berubah dari waktu ke waktu sebagai fungsi dari residual masa lalu). Volatilitas atau varians yang tidak konstan banyak terjadi pada data ekonomi. Model yang memiliki kemungkinan varians residual tidak konstan dinamakan model heterokedastisitas. Banyak pendekatan yang dapat digunakan untuk mengatasi heterokedastisitas, salah satunya adalah *Autoregressive Conditional Heterocedasticity (ARCH)* (Engle, 1982).

Model deret waktu *Autoregressive Conditional Heterocedasticity (ARCH)* merupakan suatu model residual dari deret waktu klasik. Pada umumnya, residual dari model deret waktu klasik memiliki asumsi varians residual konstan, tetapi pada model *ARCH* varians residual diperbolehkan untuk tidak konstan. Model *ARCH* menggambarkan bahwa varians residual saat ini bergantung pada kuadrat residual periode sebelumnya.

Model *ARCH* memiliki kelemahan, yaitu seringkali memiliki *lag* yang cukup panjang sehingga dapat mengakibatkan varians menjadi negatif dan model menjadi tidak sederhana. *lag* yang dimaksud di sini adalah periode sebelum-

nya. Untuk mengatasi hal tersebut maka Bollerslev (1986) mengembangkan model *ARCH* menjadi model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic (GARCH)* dengan struktur *lag* yang lebih fleksibel. Pengembangan model *ARCH* menjadi model *GARCH* mengakibatkan varians residual saat ini tidak hanya bergantung pada kuadrat residual periode sebelumnya tetapi juga bergantung pada varians residual periode sebelumnya.

Perilaku dari model *ARCH* dan *GARCH* sudah banyak dikaji oleh beberapa peneliti, seperti Engle (1982) memodelkan tingkat inflasi yang mengalami ketidakpastian dan cenderung berubah dari waktu ke waktu. Di Indonesia, Santoso (2011) mengaplikasikan model *ARCH* dan *GARCH* pada data inflasi bahan makanan Indonesia. Sementara itu, Ristiyan (2010) membahas tentang karakteristik model *GARCH*, serta menerapkannya pada data harga saham PT. Telkom, Tbk. Pengembangan model ini terus dilakukan, dan umumnya diaplikasikan pada bidang ekonomi, seperti pemodelan indeks harga saham gabungan dan volatilitas harga aset.

1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah yang akan dikaji adalah:

1. Bagaimana penentuan model dari *GARCH*?
2. Bagaimana estimasi parameter dari model *GARCH*?

1.3 Pembatasan Masalah

Agar pembahasan tidak terlalu luas, masalah akan dibatasi dengan hanya menggunakan model deret waktu *GARCH* (p, q), dimana $p = 1$ dan $q = 1$.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan yang ingin dicapai dalam penulisan ini adalah:

1. Mengkaji proses pemodelan menggunakan *GARCH*
2. Mengkaji proses estimasi parameter dari model *GARCH*
3. Menerapkan model *GARCH* pada data riil

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari penulisan ini adalah:

1. Bagi penulis dan pembaca, dapat bermanfaat dalam memberi wawasan baru mengenai analisis deret waktu dan estimasi parameter model *GARCH*
2. Bagi universitas, dapat menambah referensi karya tulis khususnya untuk Jurusan Matematika dan menjadi bahan rujukan untuk penelitian selanjutnya

1.6 Metode Penelitian

Skripsi ini merupakan kajian teori tentang pemodelan dan estimasi parameter dari metode *GARCH*, yang didasarkan pada buku dan jurnal tentang statistika dan ekonometrika. Referensi utama adalah jurnal *Econometrica* (Engle, 1982).

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 *Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA)*

Model Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) biasa disebut juga dengan model Box-Jenkins. Model ini memiliki empat langkah dalam menentukan model yang tepat, yaitu identifikasi, estimasi, pemeriksaan diagnostik, dan peramalan (Gujarati dalam Santoso, 2003). Model *ARIMA* dibagi dalam tiga kelompok, yaitu *Autoregressive (AR)*, *Moving Average (MA)* dan model campuran *ARMA* yang mempunyai karakteristik dari dua model pertama.

2.1.1 *Autoregressive (AR)*

Model *autoregressive* menggambarkan bahwa nilai variabel saat ini (Z_t) dipengaruhi oleh nilai variabel periode sebelumnya (Z_{t-1}, \dots, Z_{t-p}). Bentuk umum dari model *autoregressive* orde p atau $AR(p)$ adalah:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t$$

dimana ϕ_1, \dots, ϕ_p adalah vektor dari parameter yang tidak diketahui dan ε_t adalah residual pada waktu t . Model di atas menunjukkan bahwa jika terjadi peningkatan nilai dari variabel pada periode sebelumnya ($t - 1, \dots, t - p$) sebesar 1 satuan,

maka variabel pada waktu t akan meningkat sebesar nilai dari parameter periode sebelumnya (ϕ_1, \dots, ϕ_p) .

2.1.2 *Moving Average (MA)*

Model *moving average* menggambarkan bahwa nilai variabel saat ini (Z_t) dipengaruhi oleh nilai residual periode sebelumnya ($\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}$). Bentuk umum dari model *moving average* orde q atau $MA(q)$ adalah:

$$Z_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

dimana $\theta_1, \dots, \theta_q$ adalah vektor dari parameter yang tidak diketahui dan ε_t adalah residual pada waktu t . Model di atas menunjukkan bahwa variabel pada waktu t dipengaruhi oleh residual periode sebelumnya ($t - 1, \dots, t - q$) sebesar nilai dari parameter periode sebelumnya ($\theta_1, \dots, \theta_q$).

2.1.3 *Autoregressive Moving Average (ARMA)*

Model *ARMA* adalah model gabungan antara model *autoregressive* dan *moving average*. Model ini menggambarkan bahwa variabel saat ini (Z_t) dipengaruhi oleh nilai variabel periode sebelumnya (Z_{t-1}, \dots, Z_{t-p}) dan juga dipengaruhi oleh nilai residual periode sebelumnya ($\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}$). Bentuk umum dari model *ARMA* orde p dan q atau $ARMA(p,q)$ adalah:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

dimana ϕ_1, \dots, ϕ_p dan $\theta_1, \dots, \theta_q$ adalah vektor dari parameter yang tidak diketahui dan ε_t adalah residual pada waktu t . Model di atas menunjukkan bahwa

jika terjadi peningkatan nilai dari variabel pada periode sebelumnya $(t-1, \dots, t-p)$ sebesar 1 satuan, maka variabel pada waktu t akan meningkat sebesar nilai dari parameter periode sebelumnya (ϕ_1, \dots, ϕ_p) . Model tersebut juga menunjukkan bahwa variabel pada waktu t dipengaruhi oleh residual periode sebelumnya $(t-1, \dots, t-q)$ sebesar nilai dari parameter periode sebelumnya $(\theta_1, \dots, \theta_q)$.

2.2 Autoregressive Conditional Heterocedastic (ARCH)

Pada umumnya, pemodelan data deret waktu seperti model *Autoregressive (AR)*, *Moving Average (MA)* ataupun model *Autoregressive Moving Average (ARMA)*, memiliki asumsi varians residual konstan dan tidak tergantung dengan t (waktu), atau yang biasa disebut dengan homokedastisitas. Pada kenyataannya, banyak data deret waktu terutama pada bidang ekonomi dan bisnis yang mempunyai varians residual yang tidak konstan.

Model yang memiliki kemungkinan varians residual tidak konstan dinamakan model heterokedastisitas. Banyak pendekatan yang dapat digunakan untuk model heterokedastisitas. Regresi berbobot merupakan salah satu analisis regresi yang sering digunakan jika varians residual pada waktu yang berbeda diketahui. Pada kenyataannya varians residual biasanya tidak diketahui, sehingga model untuk heterokedastisitas dibutuhkan. Engle (1982) memperkenalkan model untuk heterokedastisitas yang dinamakan *Autoregressive Conditional Heterocedastic (ARCH)*.

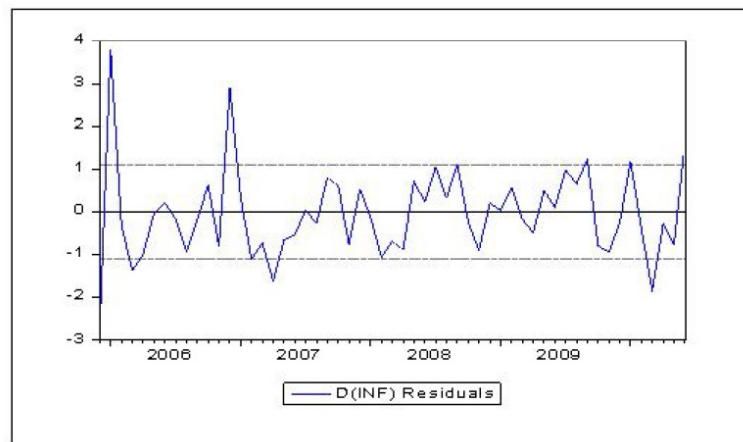
Model *ARCH* merupakan model residual dari deret waktu klasik, dimana residual tersebut memiliki varians yang tidak konstan. Model deret waktu klasik

tersebut meliputi model *autoregressive* dan *moving average*. Suatu proses autoregresi textitAR(p) $\phi(B)z_t = \varepsilon_t$ (yang selalu invertibel) dapat ditulis sebagai proses *MA* (∞), $Z_t = \phi^{-1}(B)\varepsilon_t$, sehingga proses autoregresi ekuivalen dengan proses *moving average* (Soejoeti, 1987). Oleh karena itu, pada sub bab ini hanya akan dibahas model *ARCH* yang dibentuk dari residual *autoregressive*.

Misalkan model *autoregressive* orde pertama

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

dimana ε_t merupakan residual dengan varians yang tidak konstan atau berubah dari waktu ke waktu. Residual dengan varians tidak konstan dapat diilustrasikan dengan grafik berikut (Santoso, 2011):



Gambar 2.1: Grafik Residual Inflasi Bahan Makanan Indonesia

Grafik di atas merupakan grafik residual dari data bulanan inflasi bahan makanan Indonesia periode Januari 2005-Juni 2010. Dari grafik tersebut terlihat bahwa pada akhir tahun 2005 terjadi lonjakan residual inflasi yang tinggi dan terjadi penurunan inflasi yang tinggi pada maret 2006. Lonjakan dan penu-

runan inflasi yang tinggi dalam waktu yang berdekatan tersebut menggambarkan adanya volatilitas (nilai yang berubah-ubah) yang tinggi pada residual inflasi bahan makanan Indonesia. Volatilitas tersebut mengakibatkan varians residual menjadi tidak konstan. Dari grafik terlihat bahwa residual menyebar di sekitar nol, sehingga rata-rata dari residual tersebut adalah nol. Garis putus-putus antara 1 hingga -1 menggambarkan jika residual berada di dalam interval garis tersebut memiliki volatilitas yang rendah, sedangkan yang melewati atau di luar garis interval tersebut memiliki volatilitas yang tinggi.

Menurut Engle(1982) residual dengan varians tidak konstan dapat dimodelkan dengan mengikuti model yang memperbolehkan varians bersyarat bergantung pada realisasi deret periode sebelumnya, yaitu model *bilinear* yang diberikan sebagai berikut:

$$\varepsilon_t = a_t \varepsilon_{t-1}$$

dengan varians bersyarat $\sigma^2 \varepsilon_{t-1}^2$. Meskipun tidak sepenuhnya mengikuti model *bilinear*, model *ARCH* yang diperkenalkan oleh Engle(1982) merupakan model yang mirip dengan model *bilinear*. Model *ARCH* tersebut diberikan sebagai berikut:

$$\varepsilon_t = a_t h_t^{1/2}$$

dimana a_t variabel acak dengan rata-rata 0 dan varians 1, saling bebas dan

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$$

dimana $\alpha_0, \dots, \alpha_q$ adalah vektor parameter yang tidak diketahui. Model tersebut menunjukkan bahwa varians residual saat ini (h_t) bergantung pada residual kuadrat periode sebelumnya ($\varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2$) sebesar parameter dari periode

sebelumnya $(\alpha_0, \dots, \alpha_q)$.

Selanjutnya dengan menambahkan asumsi kenormalan yang merupakan asumsi umum dari model deret waktu, model *ARCH* orde pertama dapat lebih langsung dinyatakan dalam himpunan informasi (*information set*) $\psi_t = (\dots, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t)$. Dengan menggunakan kepadatan bersyarat,

$$\varepsilon_t \mid \psi_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (2.1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \quad (2.2)$$

Fungsi varians dari model *ARCH* orde ke- q dapat dinyatakan dengan

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (2.3)$$

dimana $\alpha_0, \dots, \alpha_i$ adalah vektor dari parameter yang tidak diketahui.

Penentuan orde q pada model *ARCH*(q) dilakukan dengan membandingkan semua model *ARCH*(q) yang mungkin digunakan dengan memenuhi beberapa kriteria, yakni uji t dan *AIC* (Santoso, 2011). Berdasarkan kriteria tersebut model yang terbaik adalah model yang mempunyai *AIC* yang minimum. Kriteria Uji t dan *AIC* akan dibahas pada bab selanjutnya.

2.2.1 Distribusi dari Orde Pertama Proses *ARCH* Linear

Model *ARCH* yang paling sering digunakan dan paling sederhana adalah model linear orde pertama yang diberikan pada persamaan (2.1) dan (2.2). Jika $\alpha_1 = 0$, maka ε adalah *Gaussian white noise* dan jika α_1 adalah bilangan positif maka pengamatan akan bergantung pada saat orde tingkat tinggi. Jika α_1 terlalu

besar, maka varians dari proses *ARCH* akan menjadi tak berhingga.

Karena ε_t biasanya berdistribusi simetri, maka momen ganjil akan bernilai nol, dan momen genap dihitung menggunakan teorema berikut.

Teorema 2.2.1. Untuk bilangan bulat r , momen ke $2r$ dari orde pertama proses *ARCH* linear dengan $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, ada jika dan hanya jika,

$$\alpha_1^r \prod_{j=1}^r (2j - 1) < 1$$

Bukti. Untuk setiap variabel acak normal u dengan rata-rata nol, dan varians σ^2 , maka momen genap proses *ARCH* dapat dicari dengan rumus sebagai berikut

$$E(u^{2r}) = \sigma^{2r} \prod_{j=1}^r (2j - 1)$$

Karena distribusi bersyarat dari ε normal, maka

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^{2m} | \psi_{t-1}) &= h_t^m \prod_{j=1}^m (2j - 1) \\ &= (\alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_0)^m \prod_{j=1}^m (2j - 1) \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \alpha_0^{m-j} \alpha_1^j \varepsilon_{t-1}^{2j} \prod_{j=1}^m (2j - 1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

dimana $m = 1, \dots, r$. Selanjutnya, misalkan vektor galat \mathbf{w}_t

$$\mathbf{w}'_t = (\varepsilon_t^{2r}, \varepsilon_t^{2(r-1)}, \dots, \varepsilon_t^2).$$

maka dari persamaan (2.4), ada matriks segitiga atas A berukuran $r \times r$ dan

vektor \mathbf{b} berukuran $r \times 1$, dimana $\mathbf{b}' = (\alpha_0^r, \alpha_0^{r-1}, \dots, \alpha_0)$ dan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1^r \prod_{j=1}^r (2j-1) & \binom{r}{r-1} \alpha_0 \alpha_1^{r-1} \prod_{j=1}^{r-1} (2j-1) & \dots & \binom{r}{1} \alpha_0^{r-1} \alpha_1 \\ 0 & \alpha_1^{r-1} \prod_{j=1}^{r-1} (2j-1) & \dots & \binom{r-1}{1} \alpha_0^{r-2} \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

sehingga

$$E(\mathbf{w}_t | \psi_{t-1}) = \mathbf{b} + A\mathbf{w}_{t-1}$$

Sekarang,

$$E(\mathbf{w}_t | \psi_{t-2}) = \mathbf{b} + A(\mathbf{b} + A\mathbf{w}_{t-2})$$

dengan ekspektasi berturut-turut maka secara umum dapat dituliskan sebagai berikut

$$E(\mathbf{w}_t | \psi_{t-k}) = (I + A + A^2 + \dots + A^{k-1})\mathbf{b} + A^k \mathbf{w}_{t-k}$$

Karena deret tersebut dimulai dari amatan yang jauh di masa lalu dan momen awal terbatas di $2r$, maka limit k akan menuju tak terhingga, jika dan hanya jika semua nilai eigen dari A terletak diantara lingkaran satuan (lingkaran dengan jari-jari atau radius sebesar 1 satuan). Limit tersebut dituliskan sebagai

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(\mathbf{w}_t | \psi_{t-k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} [(I + A + A^2 + \dots + A^{k-1})\mathbf{b} + A^k \mathbf{w}_{t-k}]$$

karena $(I + A + A^2 + \dots + A^{k-1})\mathbf{b}$ merupakan deret geometri dengan $a = \mathbf{b}$ dan

$r = A$ maka

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} E(\mathbf{w}_t | \psi_{t-k}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (I + A + A^2 + \dots + A^{k-1})\mathbf{b} + \lim_{k \rightarrow \infty} A^k \mathbf{w}_{t-k} \\
&= \frac{a}{I - r} + A^\infty \mathbf{w}_{t-k} \\
&= \frac{\mathbf{b}}{I - A} + 0 \\
&= (I - A)^{-1} \mathbf{b}
\end{aligned}$$

sehingga

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(\mathbf{w}_t | \psi_{t-k}) = (I - A)^{-1} \mathbf{b}$$

dimana limit tidak bergantung pada variabel bersyarat dan pada t . Oleh karena itu, ini merupakan pernyataan untuk momen stasioner dari distribusi tak bersyarat ε ,

$$E(\mathbf{w}_t) = (I - A)^{-1} \mathbf{b}$$

Teorema ini memiliki syarat perlu dan syarat cukup, yaitu mempunyai seluruh nilai eigen diantara lingkaran satuan. Karena matriks A adalah matriks segitiga atas, maka elemen diagonal adalah nilai eigen. Dari persamaan (2.4), terlihat bahwa elemen-elemen diagonal adalah

$$\alpha_1^m \prod_{j=1}^m (2j - 1) = \prod_{j=1}^m \alpha_1 (2j - 1) \equiv \theta_m$$

untuk $m = 1, \dots, r$. Jika θ_r melebihi atau sama dengan satu, nilai eigen tidak terletak di lingkaran satuan. Pembuktian tersebut belum cukup, karena masih harus dibuktikan bahwa jika $\theta_r < 1$, maka $\theta_m < 1$ untuk semua $m < r$. Perhatikan bahwa θ_m adalah hasil dari faktor-faktor m yang naik secara monoton. Jika faktor ke- m lebih besar dari satu, maka θ_{m-1} perlu lebih kecil dari θ_m . Jika faktor ke- m

kurang dari satu, maka semua faktor lain harus kurang dari satu, dengan demikian θ_{m-1} harus mempunyai semua faktor yang kurang dari satu dan mempunyai nilai yang kurang dari satu. Hal ini menetapkan syarat perlu dan syarat cukup untuk semua elemen diagonal kurang dari satu adalah $\theta_r < 1$, sesuai dengan pernyataan pada teorema. \square

2.2.2 Proses *ARCH* orde ke- q

Proses *ARCH* linear orde ke- q yang dituliskan pada persamaan (2.1) dan (2.3) memiliki kondisi dimana kovarians akan stasioner jika memenuhi syarat dari teorema berikut.

Teorema 2.2.2. Proses *ARCH* linear orde ke- q , dengan $\alpha_0 > 0, \alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0$, adalah kovarians yang stasioner jika dan hanya jika persamaan karakteristik yang terkait memiliki semua akar diluar lingkaran satuan. Varians yang stasioner dituliskan sebagai

$$E(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0}{(1 - \sum_{j=1}^q \alpha_j)}.$$

Bukti. Ambil $\mathbf{w}'_t = (\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2)$ Maka

$$E(\mathbf{w}_t | \psi_{t-1}) = \mathbf{b} + A\mathbf{w}_{t-1}$$

dimana $\mathbf{b}' = (\alpha_0, 0, \dots, 0)$ dan A adalah *companion matrix*, yaitu matriks persegi berukuran $r \times r$ yang mempunyai *subdiagonal* berisikan angka 1 dan baris pertama

berisikan vektor parameter $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$, yang diberikan sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_q & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dengan ekspektasi berturut-turut

$$E(\mathbf{w}_t | \psi_{t-k}) = (I + A + A^2 + \dots + A^{k-1})\mathbf{b} + A^k \mathbf{w}_{t-k}$$

Karena deret tersebut dimulai dari amatan yang jauh di masa lalu dengan varians terbatas, maka limitnya ada, jika dan hanya jika semua nilai eigen terletak diantara lingkaran satuan, dan dituliskan sebagai berikut

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(\mathbf{w}_t | \psi_{t-k}) = (I - A)^{-1} \mathbf{b}$$

Karena hal ini tidak bergantung pada kondisi awal atau pada t , vektor ini adalah varians bersama untuk semua t . Seperti yang telah diketahui pada analisis deret waktu, kondisi ini ekuivalen untuk kondisi dimana semua akar dari persamaan karakteristik, yang terbentuk dari α , terletak di luar lingkaran satuan. Limit dari elemen pertama dapat dituliskan pula sebagai

$$E(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0}{(1 - \sum_{j=1}^q \alpha_j)}$$

□

Walaupun model linear orde ke- q merupakan suatu spesifikasi yang bagus, namun untuk aplikasi tertentu model linier ini kurang tepat, maka diperlukan perumusan model varians lain. Dua alternatif model selain model linier orde- q yang dapat digunakan adalah bentuk eksponensial dan nilai mutlak, yaitu

$$h_t = \exp(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2) \quad (2.5)$$

dan

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 |\varepsilon_{t-1}| \quad (2.6)$$

Bentuk eksponensial memiliki kelebihan yaitu varians adalah positif untuk semua nilai dari alfa, tetapi data yang dihasilkan dari model tersebut memiliki varians yang tak terbatas untuk setiap nilai dari $\alpha_1 \neq 0$. Bentuk nilai mutlak membutuhkan kedua parameter untuk menjadikannya positif, tetapi memiliki varians yang terbatas untuk setiap nilai-nilai parameter.

Misalkan $\boldsymbol{\xi}_t$ adalah vektor acak berukuran $q \times 1$ yang diambil dari ruang sampel Ξ , yang memiliki elemen $\boldsymbol{\xi}'_t = (\xi_{t-1}, \dots, \xi_{t-p})$. Untuk setiap $\boldsymbol{\xi}_t$, ambil $\boldsymbol{\xi}_t^*$ identik, kecuali elemen ke- m yang telah dikalikan dengan -1 , dimana m terletak di antara 1 dan q .

Definisi 2.2.1. Proses *ARCH* didefinisikan oleh (2.1) dan (2.2) akan simetri jika

1. untuk setiap m dan $\boldsymbol{\xi}_t \in \Xi$, $h(\boldsymbol{\xi}_t) = h(\boldsymbol{\xi}_t^*)$
2. untuk setiap m, i dan $\boldsymbol{\xi}_t \in \Xi$

$$\frac{\partial h(\boldsymbol{\xi}_t)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial h(\boldsymbol{\xi}_t^*)}{\partial \alpha_i}$$

3. untuk setiap m dan $\boldsymbol{\xi}_t \in \Xi$

$$\frac{\partial h(\boldsymbol{\xi}_t)}{\partial \xi_{t-m}} = -\frac{\partial h(\boldsymbol{\xi}_t^*)}{\partial \xi_{t-m}}$$

Definisi 2.2.2. Proses *ARCH* yang didefinisikan oleh (2.1) dan (2.2) akan *regular* jika

1. $\min h(\boldsymbol{\xi}_t) \geq \delta$, untuk beberapa $\delta > 0$ dan $\boldsymbol{\xi}_t \in \Xi$
2. $E(|\frac{\partial h(\boldsymbol{\xi}_t)}{\partial \alpha_i}| |\frac{\partial h(\boldsymbol{\xi}_t)}{\partial \xi_{t-m}}| | \psi_{t-m-1})$, ada untuk semua i, m, t .

Teorema 2.2.3. Model *ARCH* linear orde ke- q memenuhi kondisi *regular*, jika $\alpha_0 > 0$ dan $\alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0$

Bukti:

1. Dengan kondisi $h(\boldsymbol{\xi}_t) \geq \alpha_0 > 0$, yang merupakan pengembangan dari Definisi 2.1.2 bagian 1, maka definisi pertama dari kondisi *regular* telah terbukti.
2. Ambil

$$\begin{aligned} \phi_{i,m,t} &= E(|\partial h(\boldsymbol{\xi}_t)/\partial \alpha_1| |\partial h(\boldsymbol{\xi}_t)/\partial \xi_{t-m}| | \psi_{t-m-1}) \\ &= 2\alpha_m E(|\xi_{t-i}|^2 |\xi_{t-m}| | \psi_{t-m-1}) \end{aligned}$$

Terdapat tiga kasus yaitu, $i > m$, $i = m$, dan $i < m$:

- Jika $i > m$, maka $\xi_{t-i} \in \psi_{t-m-1}$ dan ekspektasi bersyarat dari $|\xi_{t-m}|$ terbatas, karena kepadatan bersyarat menyebar normal.
- Jika $i = m$, maka espektasi menjadi $E(|\xi_{t-m}|^3 | \psi_{t-m-1})$. Karena kepadatan bersyarat menyebar normal, semua momen ada termasuk ekspektasi dari $|\xi_{t-m}|^3$.

- Jika $i < m$, maka ekspektasi diambil dari dua bagian, pertama terhadap $t - i - 1$:

$$\begin{aligned}
\phi_{i,m,t} &= 2\alpha_m E\{(|\xi_{t-m}| E(\xi_{t-i}^2 | \psi_{t-i-1}) | \psi_{t-m-1})\} \\
&= 2\alpha_m E\{(|\xi_{t-m}| \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \xi_{t-i-j}^2) | \psi_{t-m-1}\} \\
&= 2\alpha_m \alpha_0 E\{\xi_{t-m} | \psi_{t-m-1}\} + \sum_{j=1}^q \alpha_j \phi_{i+j,m,t}
\end{aligned}$$

Karena semua *lag* terbatas, $\phi_{i,m,t}$ dapat dituliskan sebagai konstanta dikalikan dengan momen mutlak ketiga dari ξ_{t-m} yang bergantung pada ψ_{t-m-1} , ditambah konstanta lain yang dikalikan dengan momen mutlak pertama. Karena keduanya menyebar normal bersyarat, dan konstanta harus terbatas karena memiliki jumlah terbatas, definisi bagian kedua dari kondisi *regular* telah terbukti.

2.3 Fungsi *Likelihood*

Misalkan ε_t adalah hasil dari proses *ARCH*, yang dijelaskan pada persamaan (2.1) dan (2.3). Sifat dari proses ini dapat dengan mudah ditentukan oleh hubungan $E(x) = E(E(x)|\psi)$. Rata-rata dari ε_t sama dengan nol, autokovarians juga sama dengan nol, sedangkan varians tak bersyaratnya adalah $\sigma_t^2 = E[\varepsilon_t^2] = E[h_t]$. Varians ini umumnya tidak tergantung pada t untuk beberapa fungsi h dan nilai-nilai α tertentu. Pada kondisi seperti ini, ε_t merupakan kovarians yang stasioner.

Walaupun proses yang didefinisikan pada persamaan (2.1) dan (2.3) mensyaratkan seluruh pengamatannya berdistribusi normal, namun vektor dari ε_t

tersebut tidak berdistribusi normal bersama (*jointly normally distributed*). Misalkan l sebagai rata-rata dari *log likelihood*, l_t sebagai *log likelihood* pengamatan ke- t , dan T sebagai ukuran sampel. Maka dari persamaan (2.3) didapatkan

$$q(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{-\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t}}$$

sehingga persamaan rata-rata *likelihood* nya menjadi

$$l = \sum_{t=q+1}^T l_t \quad (2.7)$$

dengan $l_t = -\frac{1}{2} \log h_t - \frac{1}{2} \varepsilon_t^2 / h_t$. Persamaan tersebut tidak mengikutsertakan konstanta yang terdapat dalam fungsi *likelihood*.

Penggunaan metode *likelihood* untuk mengestimasi parameter $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q)$ pada persamaan (2.3), dapat dilakukan dengan memaksimalkan fungsi *likelihood*. Turunan pertama fungsi l_t terhadap $\boldsymbol{\alpha}$ diberikan oleh:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}} &= -\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \\ &= \frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

dan *Hessian*-nya adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_t}{\partial \boldsymbol{\alpha} \partial \boldsymbol{\alpha}'} &= \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}'} - \frac{1}{2h_t} \frac{\partial^2 h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha} \partial \boldsymbol{\alpha}'} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}'} + \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} \frac{\partial^2 h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha} \partial \boldsymbol{\alpha}'} \\ &= \left[\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} - \frac{1}{2h_t} \right] \frac{\partial^2 h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha} \partial \boldsymbol{\alpha}'} + \left[\frac{1}{2h_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3} \right] \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}'} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Karena $E[\varepsilon_t^2] = E[h_t]$, maka $E\left[\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} - \frac{1}{2h_t}\right] = 0$ dan $E\left[\frac{1}{2h_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3}\right] = E\left[-\frac{1}{2h_t^2}\right]$. Oleh karena itu, *information matrix* yang merupakan espektasi negatif dari *Hes-*

sian, menjadi

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\alpha &= \sum_{t=q+1}^T \{-E[\frac{\partial^2 l_t}{\partial \boldsymbol{\alpha} \partial \boldsymbol{\alpha}'}]\} \\ &= \sum_{t=q+1}^T E[\frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}'}]\end{aligned}\quad (2.10)$$

yang secara konsisten diestimasi dengan

$$\hat{\mathcal{I}}_\alpha = \sum_{t=q+1}^T [\frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}'}]\quad (2.11)$$

Jika fungsi h adalah linear order q , yaitu :

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-q}^2 \quad (2.12)$$

maka, *information matrix* dan gradien yang merupakan turunan pertama dari l terhadap t mempunyai bentuk yang sederhana. Jika $\mathbf{z}_t = (1, \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2)$ dan $\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q)$ maka persamaan (2.12) dapat dituliskan sebagai

$$h_t = \mathbf{z}_t \boldsymbol{\alpha} \quad (2.13)$$

Maka gradien yang merupakan turunan pertama dari l terhadap α menjadi lebih sederhana, yaitu

$$\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \sum_{t=q+1}^T [\frac{1}{2h_t} \mathbf{z}_t (\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1)] \quad (2.14)$$

dan estimasi dari *information matrix* adalah

$$\hat{\mathcal{I}}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{t=q+1}^T [\mathbf{z}_t' \mathbf{z}_t / h_t^2] \quad (2.15)$$

2.4 Model Regresi *ARCH*

Model regresi pada *ARCH* diperoleh dengan mengasumsikan bahwa rata-rata dari ε_t adalah $x_t\boldsymbol{\beta}$, yaitu kombinasi linear dari variabel respon dengan *lag* dan variabel penjelas yang termasuk ke dalam *information set* ψ_{t-1} dengan $\boldsymbol{\beta}$ sebagai vektor dari parameter yang tidak diketahui. Persamaan model regresi *ARCH* dituliskan sebagai berikut:

$$\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(x_t\boldsymbol{\beta}, h_t),$$

dimana

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q\varepsilon_{t-q}^2,$$

$$\varepsilon_t = y_t - x_t\boldsymbol{\beta} \tag{2.16}$$

likelihood pada kasus linear orde ke- q untuk model regresi *ARCH* diberikan sebagai berikut:

$$l = \sum_{t=q+1}^T l_t$$

$$l_t = -\frac{1}{2} \log h_t - \frac{1}{2} \varepsilon_t^2 / h_t$$

Jika variabel penjelas tidak memuat lag dari variabel respon dan proses adalah stasioner, maka misalkan y dan x adalah vektor $T \times 1$ dan $T \times K$, dan merupakan matriks dari variabel respon dan variabel penjelas, yang masing-masing

$$E(y | x) = x\boldsymbol{\beta}$$

$$\text{Var}(y | x) = \sigma^2 l \quad (2.17)$$

maka asumsi dari Gauss-Markov terpenuhi. *Ordinary Least Square* adalah estimator terbaik dari koefisien regresi yang linear dan tidak bias, atau yang biasa dikenal dengan *Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)*, tetapi menurut Engle (1982) *Maximum-Likelihood Estimator* lebih efisien daripada *OLS* dalam mengestimasi proses *ARCH*. *Maximum-Likelihood Estimator* dihasilkan dengan memecahkan kondisi pada orde pertama model *ARCH*, yaitu pertama menurunkan l_t terhadap β

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_t}{\partial \beta} &= \frac{\varepsilon_t x'_t}{h_t} - \frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \beta} + \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \beta} \\ &= \frac{\varepsilon_t x'_t}{h_t} + \frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \beta} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

dengan *Hessian*

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial \beta \partial \beta'} = -\frac{x_t x'_t}{h_t} - \frac{2\varepsilon_t x'_t}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \beta} + \left[\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} - \frac{1}{2h_t} \right] \frac{\partial^2 h_t}{\partial \beta \partial \beta'} + \left[\frac{1}{2h_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3} \right] \frac{\partial h_t}{\partial \beta} \frac{\partial h_t}{\partial \beta'}$$

Dengan menggunakan espektasi bersyarat dari *Hessian*, $E\left[\frac{2\varepsilon_t x'_t}{h_t^2}\right]$ dan $E\left[\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} - \frac{1}{2h_t}\right]$ akan sama dengan nol, dan $E\left[\frac{1}{2h_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3}\right] = E\left[-\frac{1}{2h_t^2}\right]$.

Maka gradien yang merupakan turunan dari l terhadap β adalah

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \sum_{q+1}^T \left[\frac{\varepsilon_t x'_t}{h_t} + \frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \beta} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \right] \quad (2.19)$$

dimana

$$\frac{\partial h_t}{\partial \beta} = -2 \sum_{j=1}^p \alpha_j \varepsilon_{t-j} x'_{t-j}$$

dan *Information matrix* menjadi

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\beta &= \sum_{t=q+1}^T \{-E[(\frac{\partial^2 l_t}{\partial \beta \partial \beta'} | \psi_{t-1})]\} \\ &= \sum_{t=q+1}^T E[\frac{x'_t x_t}{h_t} + \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \beta} \frac{\partial h_t}{\partial \beta'}]\end{aligned}\quad (2.20)$$

Untuk model regresi *ARCH* linear orde ke- q , *information matrix* dapat diestimasi dengan

$$\hat{\mathcal{I}}_\beta = \sum_{t=q+1}^T [\frac{x'_t x_t}{h_t} + \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \beta} \frac{\partial h_t}{\partial \beta'}]\quad (2.21)$$

Dengan cara yang sama, *off-diagonal blocks* dari *information matrix* dinyatakan sebagai

$$\mathcal{I}_{\alpha\beta} = \sum_{t=q+1}^T E(\frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha} \frac{\partial h_t}{\partial \beta'})\quad (2.22)$$

2.4.1 Estimasi Model Regresi *ARCH*

Estimasi dari α dan β dapat dilakukan secara terpisah tanpa menghilangkan *asymptotic efficiency*, karena adanya *off-diagonal blocks* dari *information matrix*. Estimasi β menggunakan *Ordinary Least Square (OLS)*, menghasilkan residual. Residual tersebut dapat membangun estimasi yang efisien dari α dan menghasilkan $\hat{\alpha}$, sehingga akhirnya estimasi yang efisien dari β pun didapatkan. Iterasi dilakukan dengan *scoring algorithm*, setiap langkah dari parameter vektor ϕ menghasilkan estimasi ϕ^{i+1} berdasarkan ϕ^i menurut

$$\phi^{i+1} = \phi^i + [\hat{\mathcal{I}}_\phi]^{-1} \sum_{t=q+1}^T \frac{\partial l_t^i}{\partial \phi}\quad (2.23)$$

Untuk model linear orde ke- q , langkah *scoring* untuk α dapat dituliskan

kembali dengan mensubstitusi persamaan (2.14) dan (2.15) kedalam persamaan (2.23) sehingga iterasi menjadi

$$\boldsymbol{\alpha}^{i+1} = \boldsymbol{\alpha}^i + \left(\frac{1}{2} \sum_{t=q+1}^T [z'_t z_t / h_t^2] \right)^{-1} \sum_{t=q+1}^T \left[\frac{1}{2h_t} z_t \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \right] \quad (2.24)$$

Dengan menggunakan $\boldsymbol{\theta}$ sebagai kriteria konvergensi dari parameter vektor $\boldsymbol{\phi}$, maka $\boldsymbol{\theta}$ dapat dinyatakan sebagai

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\partial l'}{\partial \boldsymbol{\phi}} \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \boldsymbol{\phi} \partial \boldsymbol{\phi}'} \right)^{-1} \frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\phi}} \quad (2.25)$$

Dari estimasi yang telah dilakukan pada $\boldsymbol{\alpha}$, langkah *scoring* dapat dihitung untuk meningkatkan estimasi dari $\boldsymbol{\beta}$. *Scoring algorithm* untuk $\boldsymbol{\beta}$ adalah

$$\boldsymbol{\beta}^{i+1} = \boldsymbol{\beta}^i + [\hat{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{\beta}}]^{-1} \frac{\partial l^i}{\partial \boldsymbol{\beta}} \quad (2.26)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.19) dan (2.21), maka

$$\boldsymbol{\beta}^{i+1} = \boldsymbol{\beta}^i + \left(\sum_{t=q+1}^T \left[\frac{x'_t x_t}{h_t} + \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\beta}} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\beta}'} \right] \right)^{-1} \sum_{t=q+1}^T \left[\frac{\varepsilon_t x'_t}{h_t} + \frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\beta}} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \right] \quad (2.27)$$

dimana

$$\left(\sum_{t=q+1}^T \left[\frac{x'_t x_t}{h_t} + \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\beta}} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\beta}'} \right] \right)^{-1}$$

adalah matriks varians-kovarians dari *MLE* untuk $\boldsymbol{\beta}$. Proses *scoring algorithm* terus diulangi hingga $\boldsymbol{\alpha}$ dan $\boldsymbol{\beta}$ konvergen.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 *Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity (p,q)*

Pada aplikasi-aplikasi nyata model *ARCH*, *lag* yang terlalu panjang pada persamaan varians bersyarat sering terjadi. Jika *lag* menjadi semakin besar maka masalah varians negatif dapat terjadi, jika perkiraan tidak dibatasi dengan tepat. Oleh karena itu, pengembangan model *ARCH* untuk memperbolehkan memori yang lebih panjang dan struktur *lag* yang lebih fleksibel perlu dilakukan. Pengembangan model *ARCH* yang diperkenalkan oleh Bollerslev (1986) dinamakan proses *Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity*. Jika pada model *ARCH* varians berubah dari waktu ke waktu sebagai fungsi dari kuadrat residual masa lalu, pada model *GARCH* varians residual tidak hanya bergantung dari kuadrat residual masa lalu tetapi juga bergantung pada varians residual masa lalu (Wei, 2006).

Misalkan ε_t adalah galat pada waktu t dari model deret waktu klasik yang tidak berkorelasi tetapi memiliki varians yang berubah dari waktu ke waktu, dan ψ_t adalah himpunan informasi (*information set*), maka proses *GARCH* (p,q) diberikan sebagai berikut

$$\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t) \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_t = a_t h_t^{1/2}$$

dimana a_t variabel acak dengan rata-rata 0 dan varians 1, saling bebas dan

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (3.2)$$

dimana

$$p \geq 0, q > 0$$

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q,$$

$$\beta_i \geq 0, i = 1, \dots, p.$$

Untuk $p = 0$ proses menjadi proses $ARCH(q)$, dan untuk $p = q = 0$ proses adalah *white noise*. Dengan menggunakan *lag* polinomial

$$A(L) = \alpha_1 L + \dots + \alpha_q L^q \quad (3.3)$$

$$B(L) = \beta_1 L + \dots + \beta_p L^p \quad (3.4)$$

maka persamaan (3.2) menjadi

$$h_t = \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)h_t \quad (3.5)$$

Model regresi $GARCH(p, q)$ diperoleh dengan menjadikan ε_t dalam regresi linear sebagai berikut:

$$\varepsilon_t = y_t - x_t' \mathbf{b}, \quad (3.6)$$

dimana y_t variabel respon, x_t vektor dari variabel penjelas, dan \mathbf{b} adalah vektor

dari parameter yang tidak diketahui.

Jika semua akar dari $1 - B(z) = 0$ terletak diluar lingkaran satuan, maka persamaan (3.5) dapat dituliskan kembali sebagai distribusi *lag* dari ε_t^2 masa lalu

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0(1 - B(1))^{-1} + A(L)(1 - B(L))^{-1}\varepsilon_t^2 \\ &= \alpha_0\left(1 - \sum_{i=1}^p \beta_i\right)^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

dimana

$$\begin{aligned} \delta_i &= \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j \delta_{i-j} \quad i = 1, \dots, q \\ &= \sum_{j=1}^n \beta_j \delta_{i-j} \quad i = q + 1, \dots, \end{aligned} \quad (3.8)$$

dengan $n = \min\{p, i - 1\}$. Persamaan (3.1) jika bersama dengan persamaan (3.7) dapat dilihat sebagai proses *ARCH* (∞).

Teorema 3.1.1. Proses *GARCH*(p, q) yang didefinisikan (3.1) dan (3.2) bersifat stasioner *wide-sense* dengan $E(\varepsilon_t) = 0$, $\text{Var}(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - A(1) - B(1)}$ dan $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ untuk $t \neq s$ jika dan hanya jika $A(1) + B(1) = \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$

Bukti. Substitusikan $\varepsilon_t = \eta_t h_t^{1/2}$ dimana $\eta_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1)$ ke dalam

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}$$

didapatkan

$$\begin{aligned}
h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 h_{t-i} + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \\
&= \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-j}^2 (\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j} + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i-j}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^p \beta_j (\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j} + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i-j}) \\
&\quad \vdots \\
&= \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} M(t, k),
\end{aligned}$$

dimana

$$\begin{aligned}
M(t, 0) &= 1 \\
M(t, 1) &= \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \\
M(t, 2) &= \sum_{j=1}^q \alpha_j \eta_{t-j}^2 (\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i) + \sum_{j=1}^p \beta_j (\sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i) \\
&\quad \vdots \\
M(t, k) &= \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 M(t-i, k-1) + \sum_{i=1}^p \beta_i M(t-i, k-1) \quad ; k \geq 1
\end{aligned}$$

Karena $E(\eta_{t-i}^2) = Var(\eta_t) = 1$ maka harapan dari $M(t, k)$ adalah

$$\begin{aligned}
E(M(t, 0)) &= 1 \\
E(M(t, 1)) &= \sum_{i=1}^q (\alpha_i E(\eta_{t-i}^2)) + \sum_{i=1}^p \beta_i = \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \\
E(M(t, 2)) &= \sum_{j=1}^q (\alpha_j E(\eta_{t-j}^2)) \left(\sum_{i=1}^q (\alpha_i E(\eta_{t-i-j}^2)) + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^p \beta_j \left(\sum_{i=1}^q (\alpha_i E(\eta_{t-i-j}^2)) + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \\
&= \sum_{j=1}^q \alpha_j \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) + \sum_{j=1}^p \beta_j \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^q \alpha_j + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) = \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^2 \\
&\vdots \\
&= \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^k \quad ; k \geq 0
\end{aligned}$$

Karena $\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t)$, maka

$$E(\varepsilon_t) = E(E(\varepsilon_t | \psi_{t-1})) = 0$$

Fungsi autokovariansi antara ε_t dan ε_s , yaitu

$$\begin{aligned}
Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) &= E(\varepsilon_t \varepsilon_s) \\
&= E(E(\varepsilon_t \varepsilon_s | \psi_{t-1})) \\
&= E(\varepsilon_s E(\varepsilon_t | \psi_{t-1})) = 0; \quad t \neq s
\end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} \text{Var}(\varepsilon_t) &= E(\text{Var}(\varepsilon_t|\psi_{t-1}) + \text{Var}(E(\varepsilon_t|\psi_{t-1}))) \\ &= E(h_t) \end{aligned}$$

maka,

$$\begin{aligned} E(h_t) &= E(\alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} M(t, k)) \\ &= \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} (E(M(t, k))) \\ &= \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^k \end{aligned}$$

Deret geometri tak hingga $\alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^k$ konvergen jika dan hanya jika $|\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i| < 1$, deret geometri tersebut jika diuraikan akan menjadi

$$\alpha_0 + \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right) + \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^2 + \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^3 + \dots$$

sehingga dengan menggunakan rumus deret geometri konvergen $\sum_{k=1}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$ dengan $a = \alpha_0$ dan $r = \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i$ maka akan dihasilkan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\varepsilon_t) &= \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^k \\ &= \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{i=1}^p \beta_i} \end{aligned}$$

karena menurut definisi dari $GARCH(p, q)$ telah ditentukan bahwa $\alpha_i \geq 0$ dan $\beta_i \geq 0$; $i = 1, 2, \dots, n$ maka syarat $|\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i| < 1$, dapat dituliskan

menjadi $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$.

□

Pernyataan setara dari $GARCH(p, q)$ diberikan sebagai berikut

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \varepsilon_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^p \beta_j \nu_{t-j} + \nu_t \quad (3.9)$$

$$\nu_t = \varepsilon_t^2 - h_t = (\eta_t^2 - 1)h_t \quad (3.10)$$

dimana $\eta_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1)$. Menurut definisi ν_t tidak berkorelasi dan memiliki rata-rata nol. Oleh karena itu, proses $GARCH(p, q)$ dapat diinterpretasikan sebagai proses $ARMA$ pada ε_t^2 dari orde $m = \max(p, q)$ dan p .

3.1.1 Proses $GARCH(1,1)$

Proses $GARCH(1,1)$ adalah kasus khusus dari proses $GARCH(p, q)$ dimana $p = q = 1$. Dengan mengacu pada persamaan (3.1) dan (3.2), maka proses $GARCH(1,1)$ merupakan proses dimana

$$\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$\varepsilon_t = a_t h_t^{1/2}$$

dan

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad (3.11)$$

dimana, $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0$. Formula rekursif untuk $GARCH(1,1)$ didapatkan dengan mensubstitusikan persamaan (3.11) ke dalam persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t^2 &= a_t^2 h_t \\
&= a_t^2 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}) \\
&= a_t^2 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 h_{t-2})) \\
&= a_t^2 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-3}^2 + \beta_1 h_{t-3}))) \\
&\vdots \\
&= a_t^2 (\alpha_0 + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_0 \beta_1^2 + \dots) + a_t^2 (\alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1 \beta_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \alpha_1 \beta_1^2 \varepsilon_{t-3}^2 + \dots) \\
&= a_t^2 \alpha_0 (1 + \beta_1 + \beta_1^2 + \dots) + a_t^2 \alpha_1 (\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1^2 \varepsilon_{t-3}^2 + \dots)
\end{aligned}$$

Jika $-1 < \beta_1 < 1$ maka $(1 + \beta_1 + \beta_1^2 + \dots)$ adalah deret geometri dan akan sama dengan $\frac{1}{1-\beta_1}$ sehingga,

$$\varepsilon_t^2 = \frac{a_t^2 \alpha_0}{1 - \beta_1} + a_t^2 \alpha_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^{i-1} \varepsilon_{t-i}^2 \quad (3.12)$$

Untuk proses $GARCH(1,1)$ rumus pada persamaan (3.3) dan (3.4) menjadi

$$A(L) = \alpha_1 L \quad (3.13)$$

dan

$$B(L) = \beta_1 L \quad (3.14)$$

Selanjutnya untuk proses $GARCH(1,1)$ dari persamaan (3.9) diperoleh

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 - \beta_1 \nu_{t-1} + \nu_t \quad (3.15)$$

dimana

$$\nu_t = \varepsilon_t^2 - h_t = (\eta_t^2 - 1)h_t \quad (3.16)$$

dengan $\eta_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1)$ sebagaimana pada persamaan (3.10).

Menurut Teorema 3.1.1 dan dengan menggunakan persamaan (3.13) dan (3.14), proses $GARCH(1,1)$ akan stasioner *wide sense* jika dan hanya jika $A(1) + B(1) = \alpha_1 + \beta_1 < 1$. Teorema berikut membahas tentang syarat perlu dan syarat cukup untuk keberadaan momen ke- $2m$ dari proses $GARCH(1,1)$.

Teorema 3.1.2. Untuk proses $GARCH(1,1)$ syarat perlu dan syarat cukup dari keberadaan momen ke- $2m$ adalah

$$\mu(\alpha_1, \beta_1, m) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{m-j} < 1 \quad (3.17)$$

dimana

$$a_0 = 1, \quad a_j = \prod_{j=1}^m (2j - 1) \quad (3.18)$$

Momen ke- $2m$ dapat dituliskan dengan formula rekursif berikut

$$E(\varepsilon_t^{2m}) = a_m \left[\sum_{n=0}^{m-1} a_n^{-1} E(\varepsilon_t^{2n}) \alpha_0^{m-n} \binom{m}{m-n} \mu(\alpha_1, \beta_1, n) \right] \times [1 - \mu(\alpha_1, \beta_1, m)]^{-1}$$

Bukti. Karena $\varepsilon_t = a_t h_t^{1/2}$ maka,

$$E(\varepsilon_t^{2m}) = a_m E(h_t^m), \quad (3.19)$$

dimana a_m didefinisikan pada (3.18). Formula binomial untuk h_t^m adalah

$$\begin{aligned} h_t^m &= (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^m \\ &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \alpha_0^{m-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \alpha_1^j \beta_1^{n-j} \varepsilon_{t-1}^{2j} h_{t-1}^{n-j} \end{aligned}$$

Karena

$$E(\varepsilon_{t-1}^{2j} h_{t-1}^{n-j} \mid \psi_{t-2}) = a_j h_{t-1}^n,$$

maka

$$E(h_t^m \mid \psi_{t-2}) = \sum_{n=0}^m h_{t-1}^n \binom{m}{n} \alpha_0^{m-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{n-j} \quad (3.20)$$

Misalkan $\mathbf{w}_t = (h_t^m, h_t^{m-1}, \dots, h_t)'$, maka dari (3.20) didapatkan

$$E(\mathbf{w}_t \mid \psi_{t-2}) = \mathbf{d} + C\mathbf{w}_{t-1} \quad (3.21)$$

dimana $\mathbf{d}' = (\alpha_0^m, \alpha_0^{m-1}, \dots, \alpha_0)$ dan C adalah $m \times m$ matriks segitiga atas yang diberikan sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{m-j} & \binom{m}{m-1} \alpha_0 \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{(m-1)-j} & \dots & \binom{m}{1} \alpha_0^{m-1} \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{1-j} \\ 0 & \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{(m-1)-j} & \dots & \binom{m-1}{1} \alpha_0^{m-2} \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{1-j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{1-j} \end{pmatrix}$$

dari matriks tersebut dapat terlihat elemen diagonalnya adalah

$$\mu(\alpha_1, \beta_1, i) = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{i-j}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.22)$$

Bentuk umum dari (3.21) adalah

$$E(\mathbf{w}_t \mid \psi_{t-k-1}) = (I + C + C^2 + \dots + C^{k-1})d + C^k \mathbf{w}_{t-k}$$

Selama proses diasumsikan dimulai dari amatan yang jauh di masa lalu dengan terbatas momen $2m$, limit k menuju tak terhingga, ada dan tidak bergantung pada t , jika dan hanya jika semua nilai eigen dari C berada diantara lingkaran satuan,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(\mathbf{w}_t \mid \psi_{t-k-1}) = (I - C)^{-1}d = E(\mathbf{w}_t)$$

Karena C adalah matriks segitiga atas, nilai eigen akan sama dengan elemen diagonal yang diberikan (3.22). Dengan melakukan perhitungan sederhana dapat ditunjukkan bahwa $\mu(\alpha_1, \beta_1, i) < 1$ berarti $\mu(\alpha_1, \beta_1, i - 1) < 1$ untuk $\alpha_1 + \beta_1 \leq 1$, dan $\mu(\alpha_1, \beta_1, m) < 1$ yang merupakan syarat cukup dari keberadaan momen $2m$. Formula rekursif dari momen ke- $2m$ didapatkan dari substitusi persamaan (3.20) ke dalam (3.19)

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^{2m}) &= a_m E(h_t^m) \\ &= a_m E(E(h_t^m \mid \psi_{t-2})) \\ &= a_m E\left(\sum_{n=0}^m h_{t-1}^n \binom{m}{n} \alpha_0^{m-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{n-j}\right) \\ &= a_m E\left(\left(\sum_{n=0}^{m-1} h_{t-1}^n \binom{m}{n} \alpha_0^{m-n} + h_{t-1}^m\right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{n-j}\right)\right) \\ &= a_m \left(\sum_{n=0}^{m-1} a_n^{-1} E(\varepsilon_t^{2n}) \alpha_0^{m-n} \binom{m}{m-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{n-j}\right) \\ &\quad + a_m (a_m^{-1} E(\varepsilon_t^{2m}) \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{m-j}) \end{aligned}$$

Karena $\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{m-j} = \mu(\alpha_1, \beta_1, m)$, maka

$$E(\varepsilon_t^{2m}) - E(\varepsilon_t^{2m}) \mu(\alpha_1, \beta_1, m) = a_m \left(\sum_{n=0}^{m-1} a_n^{-1} E(\varepsilon_t^{2n}) \alpha_0^{m-n} \binom{m}{m-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{n-j} \right)$$

sehingga

$$E(\varepsilon_t^{2m}) = a_m \left[\sum_{n=0}^{m-1} a_n^{-1} E(\varepsilon_t^{2n}) \alpha_0^{m-n} \binom{m}{m-n} \mu(\alpha_1, \beta_1, n) \right] \times [1 - \mu(\alpha_1, \beta_1, m)]^{-1}$$

□

Seperti pada proses *ARCH*, proses *GARCH* juga mengikuti sifat dari distribusi simetri yaitu jika momen ke- $2m$ ada, maka $E(\varepsilon_t^{2m-1}) = 0$.

Untuk $m = 2$ dari persamaan (3.17) diperoleh

$$\begin{aligned} \mu(\alpha_1, \beta_1, 2) &= \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{2-j} < 1 \\ &= \binom{2}{0} a_0 \alpha_1^0 \beta_1^{2-0} + \binom{2}{1} a_1 \alpha_1^1 \beta_1^{2-1} + \binom{2}{2} a_2 \alpha_1^2 \beta_1^{2-2} < 1 \\ &= \beta_1^2 + 2\alpha_1 \beta_1 + 3\alpha_1^2 < 1 \end{aligned}$$

persamaan di atas merupakan syarat perlu dan syarat cukup untuk keberadaan nilai momen orde ke-4 proses *GARCH*(1,1) (Posedel, 2005). Menurut Teorema 3.1.2, untuk $m = 1$ maka

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^2) &= a_1 \left[\sum_{n=0}^0 a_n^{-1} E(\varepsilon_t^{2n}) \alpha_0^{1-n} \binom{1}{1-n} \mu(\alpha_1, \beta_1, n) \right] \times [1 - \mu(\alpha_1, \beta_1, 1)]^{-1} \\ &= a_1 [a_0^{-1} E(\varepsilon_t^0) \alpha_0^1 \binom{1}{1} \sum_{j=0}^0 \binom{0}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{0-j}] \times [1 - \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{1-j}]^{-1} \\ &= \alpha_0 (1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1} \end{aligned}$$

dan untuk $m = 2$

$$\begin{aligned}
E(\varepsilon_t^4) &= a_2 \left[\sum_{n=0}^1 a_n^{-1} E(\varepsilon_t^{2n}) \alpha_0^{2-n} \binom{2}{2-n} \mu(\alpha_1, \beta_1, n) \right] \times [1 - \mu(\alpha_1, \beta_1, 2)]^{-1} \\
&= 3 \left[\alpha_0^2 \binom{2}{2} + E(\varepsilon_t^2) \alpha_0 \binom{2}{1} \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{1-j} \right] \times \left[1 - \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{2-j} \right]^{-1} \\
&= 3 \left[\alpha_0^2 + \frac{2\alpha_0^2}{1 - \alpha_1 - \beta_1} (\beta_1 + \alpha_1) \right] \times [1 - (\beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1^2)]^{-1} \\
&= 3\alpha_0^2 \left[1 + \frac{2}{1 - \alpha_1 - \beta_1} (\beta_1 + \alpha_1) \right] \times [1 - (\beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1^2)]^{-1} \\
&= 3\alpha_0^2 \left[\frac{1 - \alpha_1 - \beta_1 + 2\alpha_1 + 2\beta_1}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \right] \times [1 - (\beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1^2)]^{-1} \\
&= 3\alpha_0^2 (1 + \alpha_1 + \beta_1) [(1 - \alpha_1 - \beta_1)(1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2)]^{-1}
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, koefisien kurtosis dari ε_t^2 adalah

$$\begin{aligned}
\kappa &= (E(\varepsilon_t^4) - 3E(\varepsilon_t^2)^2) E(\varepsilon_t^2)^{-2} \\
&= 6\alpha_1^2 (1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2)^{-1}
\end{aligned}$$

yang menurut asumsi lebih besar dari nol, sehingga proses $GARCH(1,1)$ adalah *leptokurtic* atau distribusi yang memiliki kurva dengan puncak yang lebih lancip daripada kurva normal.

3.2 Estimasi model $GARCH(p, q)$

Seperti pada model $ARCH$, estimasi pada model $GARCH$ yang diberikan pada persamaan (3.1) dan (3.2) pun menggunakan *Maximum Likelihood Estimation (MLE)* dengan

$$q(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{-\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t}}$$

Misalkan $\mathbf{z}'_t = (1, \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2, h_{t-1}, \dots, h_{t-p})$, $\boldsymbol{\theta}' = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p)$ maka $h_t = \mathbf{z}'_t \boldsymbol{\theta}$ dan fungsi *log-likelihood* dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{t=q+1}^T l_t(\boldsymbol{\theta}) \\ l_t(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{1}{2} \log h_t - \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Turunan pertama $l_t(\boldsymbol{\theta})$ terhadap $\boldsymbol{\theta}$ adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= -\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ &= \frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

dan *Hessian* adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} &= \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'} - \frac{1}{2h_t} \frac{\partial^2 h_t}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'} + \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} \frac{\partial^2 h_t}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} \\ &= \left[\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} - \frac{1}{2h_t} \right] \frac{\partial^2 h_t}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} + \left[\frac{1}{2h_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3} \right] \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \end{aligned} \quad (3.25)$$

turunan pertama dan *Hessian* pada model *GARCH* terlihat mirip seperti pada model *ARCH*, yang membedakan adalah jika pada model *ARCH* $\frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{z}_t$, sedangkan pada model *GARCH*

$$\frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{z}_t + \sum_{i=1}^p \beta_i \frac{\partial h_{t-i}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad (3.26)$$

sehingga gradiennya adalah

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2} \sum_{t=q+1}^T \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - \frac{1}{h_t} \right) \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad (3.27)$$

dan *information matrix* adalah

$$\mathcal{I}_{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2} \sum_{t=q+1}^T E\left[\frac{1}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'}\right] \quad (3.28)$$

yang secara konsisten diestimasi dengan

$$\hat{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2} \sum_{t=q+1}^T \left(\frac{1}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'}\right) \quad (3.29)$$

Selanjutnya, seperti model *ARCH*, untuk memaksimalkan estimasi parameter $\boldsymbol{\theta}$ dari model *GARCH* dilakukan dengan prosedur iterasi metode *scoring algorithm*, yang diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}^{i+1} &= \boldsymbol{\theta}^i + [\hat{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}}]^{-1} \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \\ &= \boldsymbol{\theta}^i + \left[\frac{1}{2} \sum_{t=q+1}^T \left(\frac{1}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}'}\right)\right]^{-1} \frac{1}{2} \sum_{t=q+1}^T \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - \frac{1}{h_t}\right) \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

proses iterasi terus diulangi hingga $\boldsymbol{\theta}$ konvergen.

3.2.1 Estimasi model *GARCH* (1,1)

Setelah mengetahui langkah-langkah estimasi untuk model *GARCH* (p, q), maka selanjutnya akan dibahas mengenai estimasi pada model yang paling sering diaplikasikan pada data ekonomi, yaitu model *GARCH* (1,1) yang diberikan pada persamaan (3.1) dan (3.11). Parameter dari model *GARCH*(1,1) yang akan

diestimasi adalah $\boldsymbol{\theta}' = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ dan fungsi *likelihood*-nya adalah:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{t=2}^T l_t(\boldsymbol{\theta}) \\
&= \sum_{t=2}^T \left(-\frac{1}{2} \log h_t - \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t} \right) \\
&= \sum_{t=2}^T \left(-\frac{1}{2} \log(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}) - \frac{\varepsilon_t^2}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})} \right)
\end{aligned}$$

Turunan parsial dari $L(\boldsymbol{\theta})$ terhadap $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ adalah

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_0} &= \sum_{t=2}^T \left(\frac{-(1 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_0})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})} + \frac{\varepsilon_t^2 (1 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_0})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - \frac{1}{h_t} \right) \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \\
\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1} &= \left(\sum_{t=2}^T \frac{-(\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_1})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})} + \frac{\varepsilon_t^2 (\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_1})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - \frac{1}{h_t} \right) \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} \\
\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1} &= \sum_{t=2}^T \left(\frac{-(h_{t-1} + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \beta_1})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})} + \frac{\varepsilon_t^2 (h_{t-1} + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \beta_1})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - \frac{1}{h_t} \right) \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1}
\end{aligned}$$

Maka gradien untuk proses $GARCH(1,1)$ adalah

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_0} \\ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - \frac{1}{h_t} \right) \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \\ \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - \frac{1}{h_t} \right) \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} \\ \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - \frac{1}{h_t} \right) \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - \frac{1}{h_t} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \\ \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} \end{pmatrix} \\
\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - \frac{1}{h_t} \right) \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, turunan kedua dari masing-masing parameter adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_0^2} &= \frac{(1 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_0})(1 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_0})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^2} - \frac{(\beta_1 \frac{\partial^2 h_{t-1}}{\partial \alpha_0 \alpha_0})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})} - \\
&\quad \frac{\varepsilon_t^2 (1 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_0})(1 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_0})}{(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^3} + \frac{\varepsilon_t^2 (\beta_1 \frac{\partial^2 h_{t-1}}{\partial \alpha_0 \alpha_0})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^2} \\
&= \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} - \frac{1}{2h_t} \frac{\partial^2 h_t}{\partial \alpha_0 \alpha_0} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} + \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} \frac{\partial^2 h_t}{\partial \alpha_0 \alpha_0}
\end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_0^2}\right] &= E\left[\left(\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} - \frac{1}{2h_t}\right)\frac{\partial^2 h_t}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_0} + \left(\frac{1}{2h_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3}\right)\frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0}\right] \\ &= E\left[-\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1^2} &= \frac{(\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_1})(\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_1})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^2} - \frac{(\beta_1 \frac{\partial^2 h_{t-1}}{\partial \alpha_1 \alpha_1})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})} - \\ &\quad \frac{\varepsilon_t^2 (\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_1})(\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_1})}{(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^3} + \frac{\varepsilon_t^2 (\beta_1 \frac{\partial^2 h_{t-1}}{\partial \alpha_1 \alpha_1})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^2} \\ &= \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{2h_t} \frac{\partial^2 h_t}{\partial \alpha_1 \alpha_1} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} + \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} \frac{\partial^2 h_t}{\partial \alpha_1 \alpha_1} \end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1^2}\right] &= E\left[\left(\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} - \frac{1}{2h_t}\right)\frac{\partial^2 h_t}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1} + \left(\frac{1}{2h_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3}\right)\frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1}\right] \\ &= E\left[-\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1^2} &= \frac{(h_{t-1} + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \beta_1})(h_{t-1} + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \beta_1})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^2} - \frac{(\beta_1 \frac{\partial^2 h_{t-1}}{\partial \beta_1 \beta_1})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})} - \\ &\quad \frac{\varepsilon_t^2 (h_{t-1} + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \beta_1})(h_{t-1} + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \beta_1})}{(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^3} + \frac{\varepsilon_t^2 (\beta_1 \frac{\partial^2 h_{t-1}}{\partial \beta_1 \beta_1})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^2} \\ &= \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} - \frac{1}{2h_t} \frac{\partial^2 h_t}{\partial \beta_1 \beta_1} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} + \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} \frac{\partial^2 h_t}{\partial \beta_1 \beta_1} \end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1^2}\right] &= E\left[\left(\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t^2} - \frac{1}{2h_t}\right)\frac{\partial^2 h_t}{\partial \beta_1 \partial \beta_1} + \left(\frac{1}{2h_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3}\right)\frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1}\right] \\ &= E\left[-\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_0 \alpha_1} &= \frac{(1 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_0})(\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_1})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^2} - \frac{\varepsilon_t^2(1 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_0})(\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_1})}{(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^3} \\ &= \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} \\ &= \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1 \alpha_0} \end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_0 \alpha_1}\right] &= E\left[\left(\frac{1}{2h_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3}\right)\frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1}\right] \\ &= E\left[-\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(v)} \quad \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_0 \beta_1} &= \frac{(1 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_0})(h_{t-1} + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \beta_1})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^2} - \frac{\varepsilon_t^2(1 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_0})(h_{t-1} + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \beta_1})}{(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^3} \\ &= \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} \\ &= \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1 \alpha_0} \end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_0 \partial \beta_1}\right] &= E\left[\left(\frac{1}{2h_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3}\right) \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1}\right] \\ &= E\left[-\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(vi)} \quad \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1 \beta_1} &= \frac{(\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_1})(h_{t-1} + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \beta_1})}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^2} - \frac{\varepsilon_t^2 (\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \alpha_1})(h_{t-1} + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \beta_1})}{(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1})^3} \\ &= \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} \\ &= \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1 \alpha_1} \end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1 \beta_1}\right] &= E\left[\left(\frac{1}{2h_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{h_t^3}\right) \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1}\right] \\ &= E\left[-\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1}\right] \end{aligned}$$

Sebagai akibatnya *information matrix* untuk *GARCH* (1,1) adalah

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\boldsymbol{\theta}} &= \sum_{t=2}^T -E\left[\frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'}\right] \\ &= \sum_{t=2}^T -E \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_0} & \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_0 \partial \beta_1} \\ \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_0} & \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_1 \partial \beta_1} \\ \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1 \partial \alpha_0} & \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1 \partial \beta_1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=2}^T E \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} & \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} \\ \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} & \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} \\ \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_0} & \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} \frac{\partial h_t}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} \end{array} \right) \\
\mathcal{I}_{\theta} &= \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T E \left[\frac{1}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \theta} \frac{\partial h_t}{\partial \theta'} \right] \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan rumus (3.29) *information matrix* di atas secara konsisten diestimasi dengan

$$\hat{\mathcal{I}}_{\theta} = \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left(\frac{1}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \theta} \frac{\partial h_t}{\partial \theta'} \right) \tag{3.33}$$

dimana

$$\frac{\partial h_t}{\partial \theta} = (1, \varepsilon_{t-1}^2, h_{t-1})' + \beta_1 \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \theta} \tag{3.34}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (3.30) prosedur iterasi untuk memaksimumkan estimasi θ dengan metode *scoring algorithm* diberikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\theta^{i+1} &= \theta^i + [\hat{\mathcal{I}}_{\theta}]^{-1} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} \\
&= \theta^i + \left[\frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left(\frac{1}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \theta} \frac{\partial h_t}{\partial \theta'} \right) \right]^{-1} \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2} - \frac{1}{h_t} \right) \frac{\partial h_t}{\partial \theta} \tag{3.35}
\end{aligned}$$

proses iterasi terus diulangi hingga θ konvergen.

3.3 Uji *Unit Root*

Uji *unit root* digunakan untuk menguji kestasioneran data deret waktu (Dickey-Fuller dalam Purnomo, 2010). Salah satu uji *unit root* adalah uji *Augmented Dickey-Fuller (ADF)*, yang merupakan uji yang paling sering digunakan untuk menguji kestasioneran data. Hipotesis dari uji *ADF* adalah :

$H_0 : \rho = 0$ (data mengandung *unit root* atau tidak stasioner)

$H_1 : \rho \neq 0$ (data tidak mengandung *unit root* atau stasioner)

Dalam uji ini dibentuk persamaan regresi dari data aktual pada periode ke- t dan $t + 1$. Dalam uji *ADF* digunakan model berikut :

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.36)$$

dengan statistik uji *ADF*

$$DF_\tau = \frac{\hat{\rho}}{SE(\hat{\rho})}$$

Pada uji *Augmented Dickey-Fuller (ADF)*, H_0 ditolak jika nilai dari $p\text{-value} < \alpha$ atau nilai statistik uji *ADF* lebih kecil dari nilai kritis Mackinnon (Lampiran 8).

Jika hasil pengujian menunjukkan bahwa data tidak stasioner maka dilakukan proses *differencing*, yaitu mengurangi nilai suatu periode dengan nilai periode sebelumnya, dengan rumusan sebagai berikut :

$$Y_t - Y_{t-1} = \rho Y_{t-1} - Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.37)$$

$$\Delta Y_t = (\rho - 1)Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.38)$$

atau dapat ditulis dengan

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.39)$$

dimana :

ΔY_t = hasil *difference* data pada periode ke- t

Y_t = data aktual periode ke- t

Y_{t-1} = data aktual periode ke- $t - 1$

δ = koefisien regresi

ε_t = residual yang *white noise* dengan rata-rata nol dan varians σ^2 .

Dari persamaan (3.39) dapat dibentuk hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \delta = 0$ (data mengandung *unit root* atau tidak stasioner)

$H_1 : \delta \neq 0$ (data tidak mengandung *unit root* atau stasioner)

dengan statistik uji *ADF*

$$DF_\tau = \frac{\hat{\delta}}{SE(\hat{\delta})}$$

Kriteria keputusannya adalah H_0 ditolak jika nilai dari $p - value < \alpha$ atau nilai statistik uji *ADF* lebih kecil dari nilai kritis Mackinnon (Lampiran 8).

3.4 Uji Heterokedastisitas

Uji heterokedastisitas digunakan untuk mendeteksi adanya heterokedastisitas dan efek *ARCH/GARCH* pada residual suatu model deret waktu. Uji yang digunakan adalah uji *Arch-LM* yang diperkenalkan oleh Engle (1982), dengan hipotesis :

H_0 : Homokedastisitas atau tidak terdapat efek *ARCH/GARCH* pada residual

H_1 : Heterokedastisitas atau terdapat efek *ARCH/GARCH* pada residual

dengan uji statistik

$$LM = T \frac{(\mathbf{g}' \mathbf{Z} (\mathbf{Z}' \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}' \mathbf{g})}{\mathbf{g}' \mathbf{g}} = TR^2 \quad (3.40)$$

dimana

T = Banyaknya sampel yang digunakan

R^2 = koefisien determinasi antara \mathbf{g} dan \mathbf{Z}

\mathbf{z}'_t = vektor turunan pertama varians residual h_t terhadap parameter

\mathbf{Z}' = vektor dari $\mathbf{z}'_t = (z'_{q+1}, \dots, z'_t)$

$$\mathbf{g} = \left(\frac{\varepsilon_{q+1}^2}{h_{q+1}^2} - 1, \dots, \frac{\varepsilon_T^2}{h_T^2} - 1 \right)$$

Kriteria keputusan dari uji *ARCH-LM* ini adalah H_0 ditolak jika $TR^2 > \chi_q^2(\alpha)$ atau *p-value* $< \alpha$.

3.5 Akaike Information Criteria (AIC)

Akaike Information Criteria merupakan kriteria yang digunakan untuk memilih model terbaik dari beberapa kemungkinan model. Jika sebuah model dibandingkan dengan model lainnya, maka model yang memiliki nilai *AIC* terkecil adalah model yang terbaik. Rumusan AIC (Akaike dalam Bozdogan, 2000) adalah sebagai berikut:

$$AIC = -2\log L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2k \quad (3.41)$$

dimana,

$L(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ = fungsi likelihood dari estimasi parameter $\boldsymbol{\theta}$.

k = jumlah parameter dalam model

3.6 Langkah-Langkah Proses *GARCH*

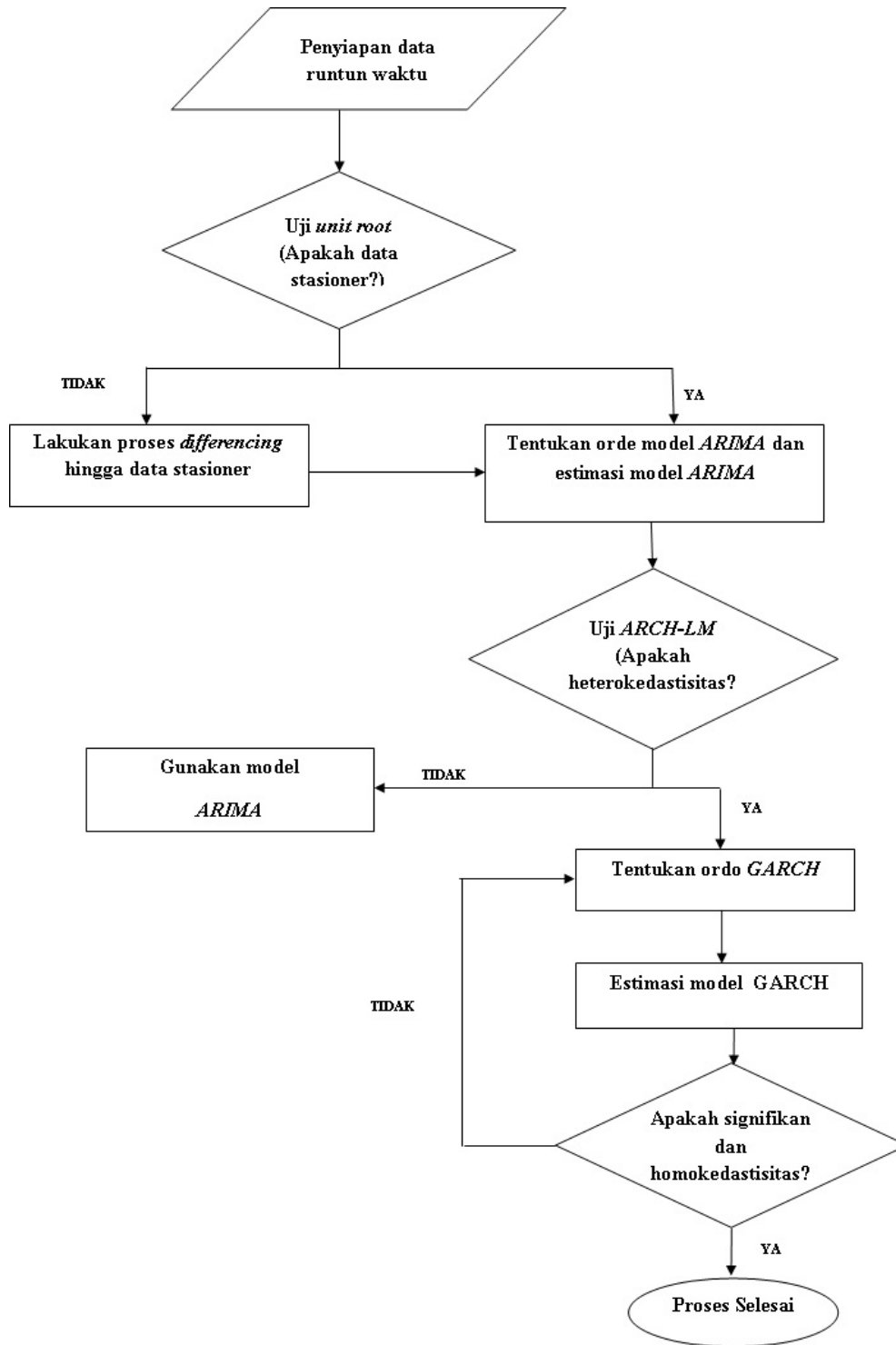
Seperti layaknya model deret waktu lainnya, model *GARCH* juga memerlukan beberapa tahapan untuk mendapatkan model yang tepat. Berikut adalah langkah-langkah yang dapat dilakukan dalam proses *GARCH*:

1. Mengidentifikasi data untuk mengetahui kestasioneran deret data dengan

uji *unit root*, jika data tidak stasioner maka dilakukan proses *differencing*

2. Menentukan orde model *ARIMA* dan mengestimasi model *ARIMA*
3. Melakukan uji heterokedastisitas terhadap residual dari model *ARIMA* dengan menggunakan uji *ARCH-LM*. Jika residual bersifat heterokedastisitas maka akan digunakan model *GARCH*
4. Menentukan orde model *ARCH* dan *GARCH* yang mungkin digunakan dan tentukan model dugaan terbaik dengan membandingkannya menggunakan *Akaike Information Criteria*
5. Mengestimasi parameter dari model *GARCH* yang mungkin digunakan
6. Pengujian signifikansi dari parameter model, untuk mengetahui ketepatan model yang didapat. Jika parameter bersifat signifikan maka model *GARCH* tersebut sudah tepat
7. Melakukan uji heterokedastisitas terhadap residual dari model *GARCH* dengan menggunakan uji *ARCH-LM*. Jika residual bersifat homokedastisitas maka model tersebut sudah layak untuk digunakan

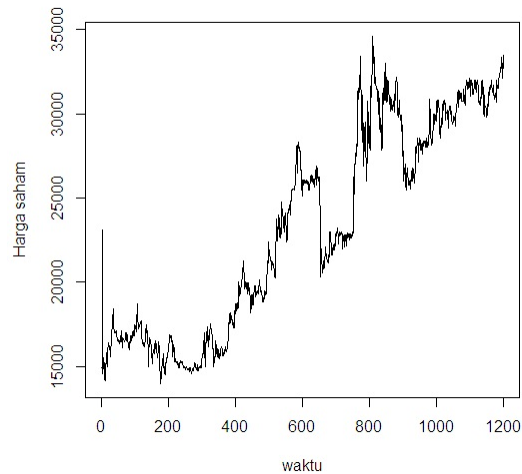
Langkah-langkah pada proses *GARCH* dapat lebih mudah dipahami dengan pembentukan *flowchart* atau diagram alir yang dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1: Diagram Alir Proses *GARCH*

3.7 Penerapan Model *GARCH* pada Data Riil

Model *Generalized Autoregressive Heterocedasticity* banyak diaplikasikan pada data ekonomi, salah satunya adalah indeks harga saham. Berikut ini akan dibahas penerapan model *GARCH* pada indeks harga saham PT. Unilever Indonesia, Tbk dengan data deret waktu yang digunakan adalah data harga penutupan saham harian, periode 6 Mei 2010 - 16 Januari 2015 (1200 data) yang diambil dari <http://www.finance.yahoo.com/q/hp?s=UNVR.JK+Historical+Prices> (diakses: 9 Maret 2015). Dengan menggunakan program *R* 3.1.0 didapatkan grafik dari harga penutupan saham harian PT. Unilever Indonesia, Tbk sebagai berikut:



Gambar 3.2: Grafik Data Penutupan Saham Harian PT. Unilever Indonesia, Tbk

Dari grafik di atas terlihat bahwa harga saham tertinggi sebesar Rp.34600 terjadi pada data ke-810 yaitu pada tanggal 19 Juli 2013, harga saham terendah terjadi pada data ke-176 tanggal 24 Januari 2011 sebesar Rp.14000, dan rata-rata harga saham tersebut bernilai Rp.23200. Grafik di atas juga menggambarkan bahwa data harga saham tersebut tidak stasioner. Untuk membuat data

indeks harga saham tersebut menjadi stasioner, maka indeks harga saham akan diubah menjadi *return*. *Return* merupakan pendekatan yang sering digunakan untuk mengatasi perubahan atau fluktuasi harga yang mengakibatkan ketidakstasioneran data. Data dari harga saham ditransformasi menjadi *return* dengan menggunakan persamaan berikut:

$$R_t = \left(\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right) \quad (3.42)$$

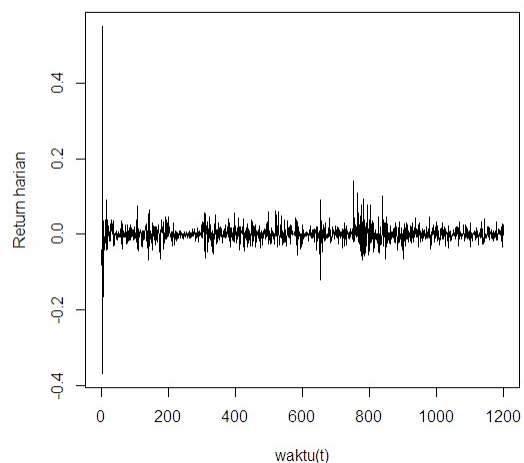
dimana,

R_t = tingkat *return* pada waktu t

P_t = indeks saham pada waktu t

P_{t-1} = indeks saham pada waktu $t - 1$

Dari persamaan di atas, maka *return* harga saham harian PT. Unilever Indonesia, Tbk dapat dilihat pada grafik berikut:

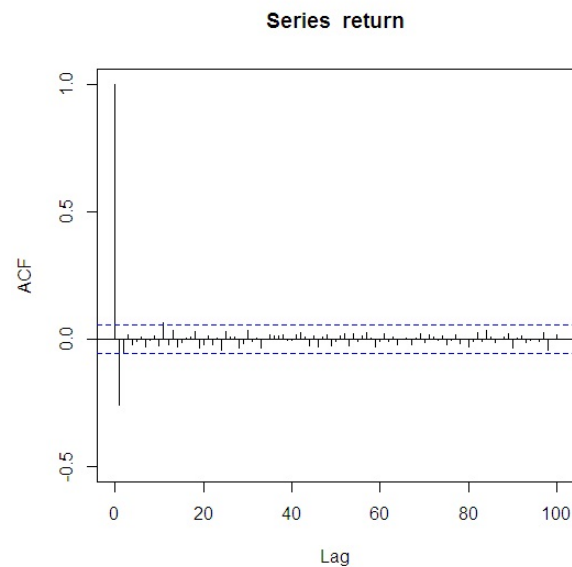


Gambar 3.3: Grafik Return Saham Harian PT. Unilever Indonesia, Tbk

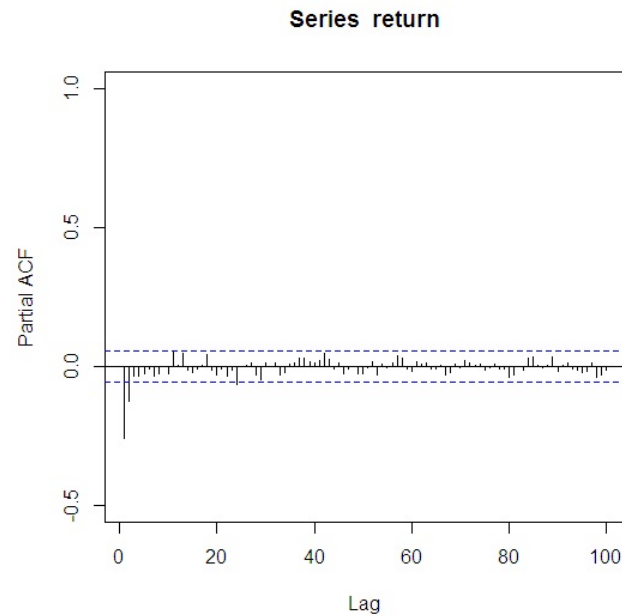
Dari grafik di atas terlihat bahwa nilai *return* tertinggi terjadi pada data ke-3 yaitu tanggal 10 Mei 2010 sebesar 0.5501, nilai *return* terendah terjadi pada data ke-4 yaitu tanggal 11 Mei 2010 sebesar $-0,3679$, dan rata-rata sebesar 0,00099. Grafik *return* tersebut juga menggambarkan adanya volatilitas yang tinggi pada *return* harga saham PT. Unilever Indonesia, Tbk selama periode penelitian, dimana lonjakan tertinggi terjadi pada nilai *return* tertinggi yaitu pada tanggal 10 Mei 2010.

3.7.1 Uji Stasioneritas Data

Uji kestasioneran data dapat dilakukan dengan dengan melihat plot *ACF* dan *PACF* *timelag* 2 atau *timelag* 3 menuju nol, dan juga dapat dilakukan dengan dengan uji *unit root*. Berikut adalah plot dari *ACF* dan *PACF* dari *return* harga saham PT. Unilever:



Gambar 3.4: Plot *ACF* *Return* Harga Saham



Gambar 3.5: Plot *PACF Return* Harga Saham

Dari plot *ACF* dan *PACF* terlihat pada *timelag* 3 sudah menuju nol atau melewati garis signifikan, sehingga data *return* harga saham tersebut sudah stasioner. Pengujian kestasioneran dengan melihat plot *ACF* dan *PACF* memiliki kelemahan karena pengambilan keputusan diambil secara subjektif, sehingga memungkinkan perbedaan pengambilan keputusan. Oleh karena itu, maka perlu juga dilakukan uji *unit root* sebagai berikut:

1. Hipotesis

$H_0 : \rho = 0$ (data mengandung *unit root* atau tidak stasioner)

$H_1 : \rho \neq 0$ (data tidak mengandung *unit root* atau stasioner)

2. Taraf signifikansi $\alpha = 0,05$

3. Statistik uji

$$DF_{\tau} = \frac{\hat{\rho}}{SE(\hat{\rho})}$$

4. Kriteria keputusan H_0 ditolak jika nilai dari $p - value < \alpha$ atau nilai t-statistik ADF lebih kecil dari nilai kritis *Mackinnon*.
5. Perhitungan menggunakan program R dengan hasil sebagai berikut

Augmented Dickey-Fuller Test

```
data: return
Dickey-Fuller = -45.2838, Lag order = 0, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```

6. Kesimpulan:

Berdasarkan hasil perhitungan menggunakan program R di atas, nilai $p - value$ lebih kecil dari $\alpha = 0,05$. Nilai t-statistik ADF adalah $-45,2838$, nilai tersebut lebih kecil dari nilai kritis *Mackinnon* untuk $\alpha = 0,05$ sehingga dapat disimpulkan bahwa H_0 ditolak, yang berarti data *return* tidak mengandung *unit root* atau stasioner.

3.7.2 Pendugaan orde dan parameter model ARIMA

Setelah melakukan uji *unit root* dan disimpulkan bahwa data *return* harga saham PT.Unilever bersifat stasioner, maka selanjutnya adalah menentukan model dari *ARIMA*. Orde yang mungkin digunakan untuk model *ARIMA* ini adalah $AR(1)$, $AR(2)$, $MA(1)$, $MA(2)$, dan $ARMA(1,1)$, karena data *return* stasioner tanpa proses *differencing* dan dengan melihat plot dari *ACF* dan *PACF*

yang melewati garis signifikan pada *lag* 1 dan *lag* 2. Dengan menggunakan uji *Akaike Information Criteria* maka dapat disimpulkan bahwa model yang terbaik adalah *ARMA* (1,1), karena memiliki nilai *AIC* terkecil yaitu sebesar $-5247,69$. Hasil perhitungan *AIC* dapat dilihat pada Tabel 3.1.

Model	<i>Log likelihood</i>	<i>AIC</i>
<i>AR</i> (1)	2616,469	$-5226,94$
<i>AR</i> (2)	2626,531	$-5245,06$
<i>MA</i> (1)	2625,966	$-5245,93$
<i>MA</i> (2)	2627,78	$-5247,56$
<i>ARMA</i> (1,1)	2627,846	$-5247,69$

Tabel 3.1: Nilai *AIC* Model *ARIMA*

Estimasi untuk model *ARMA*(1,1) dihasilkan dengan bantuan program *R*. Hasil dari estimasi tersebut menghasilkan model *ARMA* (1,1) sebagai berikut:

$$R_t = 0,001 + 0,193R_{t-1} + 0,4928\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.43)$$

Model tersebut menunjukkan bahwa jika terjadi peningkatan harga *return* saham pada satu periode sebelumnya sebesar 1 satuan maka *return* saham pada periode t secara rata-rata akan meningkat sebesar 0,193 satuan, selain itu model tersebut juga menunjukkan bahwa *return* saham periode t dipengaruhi oleh residual satu periode sebelumnya ($t - 1$) (Arini, 2012), dengan nilai koefisien sebesar $-0,4928$.

3.7.3 Uji Heterokedastisitas

Untuk mengetahui apakah terdapat heterokedastisitas pada model $ARMA(1,1)$, maka dilakukan uji $ARCH-LM$ terhadap residual dari model $ARMA(1,1)$ yang diberikan sebagai berikut:

1. Hipotesis

H_0 : Homokedastisitas atau tidak terdapat efek $ARCH/GARCH$ pada residual

H_1 : Heterokedastisitas atau terdapat efek $ARCH/GARCH$ pada residual

2. Taraf signifikansi $\alpha = 0,05$

3. Statistik uji

$$LM = T \frac{(\mathbf{g}'\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{g})}{\mathbf{g}'\mathbf{g}} = TR^2$$

4. Kriteria keputusan H_0 ditolak jika nilai dari $p\text{-value} < \alpha$ atau $TR^2 > \chi_q^2(\alpha)$
5. Perhitungan menggunakan program R dengan hasil sebagai berikut

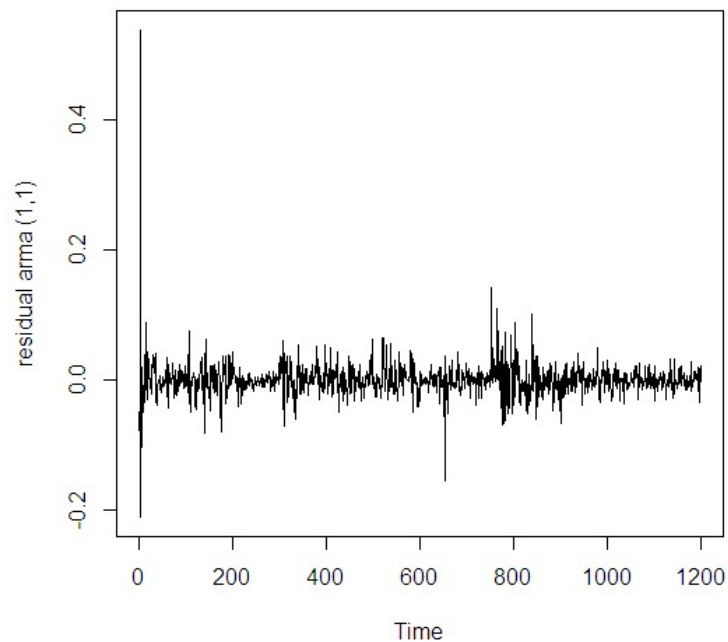
```
ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects
data: res.fit
Chi-squared = 26.751, df = 1, p-value = 2.314e-07
```

6. Kesimpulan:

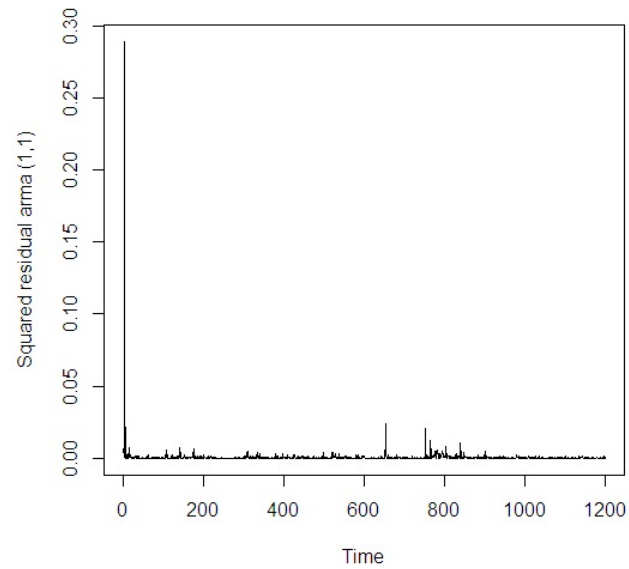
Berdasarkan hasil perhitungan menggunakan program R di atas, nilai $p\text{-value}$ lebih kecil dari $\alpha = 0,05$, sehingga dapat disimpulkan bahwa H_0 ditolak, yang berarti residual bersifat heterokedastisitas atau terdapat efek $ARCH/GARCH$.

3.7.4 Penentuan Model dan Estimasi Model *GARCH*

Pada Uji *ARCH-LM* disimpulkan bahwa residual model *ARMA(1,1)* mengandung heterokedastisitas atau terdapat efek *ARCH/GARCH*, sehingga residual tersebut harus diestimasi dengan model *GARCH*. Residual dan residual kuadrat dari model *ARMA(1,1)* diberikan pada Gambar 3.6 dan Gambar 3.7.

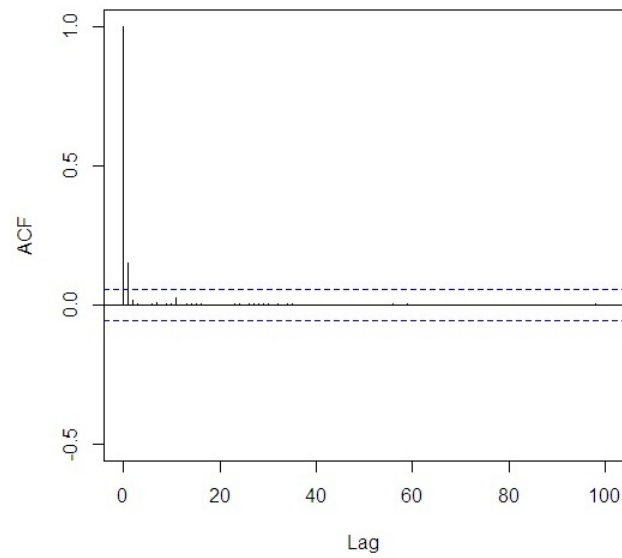


Gambar 3.6: Grafik Residual *ARMA(1,1)*

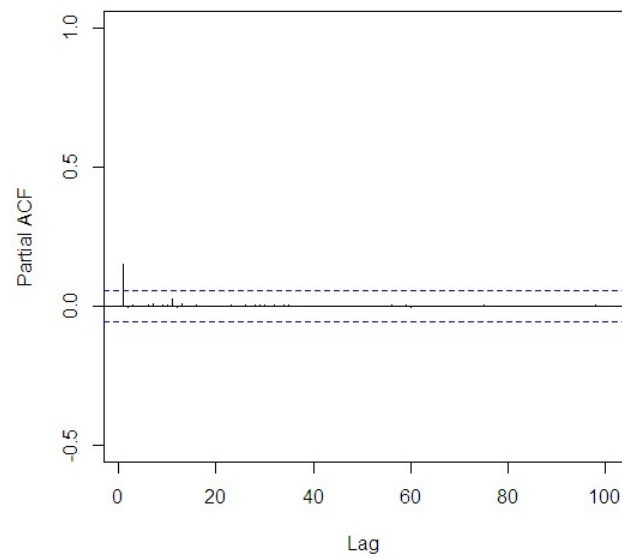


Gambar 3.7: Grafik Residual Kuadrat $ARMA(1,1)$

Dari kedua grafik di atas dapat terlihat bahwa residual pada model $ARMA(1,1)$ memiliki volatilitas yang cukup tinggi, terutama pada data ke-3 menuju data ke-4. Volatilitas tersebut menyebabkan varians dari residual menjadi tidak konstan, hal ini sesuai dengan asumsi dari model $GARCH$. Plot ACF dan $PACF$ dari residual kuadrat model $ARMA(1,1)$ diberikan sebagai berikut:



Gambar 3.8: Plot *ACF* Residual Kuadrat *ARMA*(1,1)



Gambar 3.9: Plot *PACF* Residual Kuadrat *ARMA*(1,1)

Dari plot *ACF* terlihat bahwa nilai *ACF* melewati garis signifikan pada *lag* 1 dan *lag* 2, sedangkan pada plot *PACF* terlihat nilai *PACF* melewati garis signifikan pada *lag* 1. Sebelum menentukan orde model *GARCH* dilakukan dengan terlebih dahulu membandingkan model *ARCH* yang mungkin digunakan, menggunakan *Akaike Information Criteria* yang hasilnya diberikan pada tabel berikut:

Model	<i>Log likelihood</i>	<i>AIC</i>
<i>ARCH</i> (1)	2735, 119	-5466, 239
<i>ARCH</i> (2)	2907, 9591	-5809, 918
<i>ARCH</i> (3)	2976, 18	-5944, 36
<i>ARCH</i> (4)	2980, 875	-5951, 75
<i>ARCH</i> (5)	2981, 549	-5951, 098
<i>ARCH</i> (6)	2981, 736	-5949, 472
<i>ARCH</i> (7)	2980, 685	-5945, 37
<i>ARCH</i> (8)	2973, 696	-5929, 393
<i>ARCH</i> (9)	2986, 693	-5953, 385
<i>ARCH</i> (10)	2989, 702	-5957, 404

Tabel 3.2: Nilai *AIC* Model *ARCH*

Dari tabel di atas terlihat bahwa nilai *AIC* model *ARCH* terkecil dimiliki oleh *ARCH*(10). Uji signifikansi (uji t) pada estimasi parameter model *ARCH*(10) dengan hipotesis:

$H_0 : \boldsymbol{\theta} = 0$ (estimasi parameter tidak signifikan dalam model)

$H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq 0$ (estimasi parameter signifikan dalam model)

menghasilkan kesimpulan sebagai berikut: Berdasarkan lampiran 6, hanya parameter α_0 , α_1 , α_3 dan α_9 pada model *ARCH*(10) yang memiliki nilai *p-value* lebih kecil dari $\alpha = 0,05$ dan memiliki $|t_{hitung}| > t_{tabel}$ sehingga dapat disimpulkan bahwa H_0 ditolak, yang berarti estimasi parameter signifikan.

Bentuk model dari *ARCH* (10) sebagai berikut:

$$\varepsilon_t = a_t h_t^{1/2}$$

dimana

$$\begin{aligned} h_t = & 2,120 \times 10^{-4} + 0,1296\varepsilon_{t-1}^2 + 0,05675\varepsilon_{t-2}^2 + 0,06011\varepsilon_{t-3}^2 + 0,04942\varepsilon_{t-4}^2 \\ & + 0,04162\varepsilon_{t-5}^2 + 0,01393\varepsilon_{t-6}^2 + 0,01688\varepsilon_{t-7}^2 + 1,669 \times 10^{-15}\varepsilon_{t-8}^2 \\ & + 0,07593\varepsilon_{t-9}^2 + 0,03853\varepsilon_{t-10}^2 \end{aligned}$$

Model di atas menggambarkan bahwa varians residual saat ini (t) bergantung pada kuadrat residual periode $t - 1$ hingga $t - 10$.

Menurut Bollerslev (1986), jika suatu model *ARCH* memiliki *lag* yang cukup panjang, maka untuk menghindari varians yang negatif akibat *lag* yang panjang sebaiknya menggunakan model alternatif, yaitu model *GARCH*. Model dugaan *GARCH* yang akan digunakan adalah model *GARCH*(1,1) dengan bentuk umum modelnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= a_t h_t^{1/2} \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \end{aligned}$$

Setelah menentukan orde maka langkah selanjutnya adalah mengestimasi model tersebut. Estimasi untuk model *GARCH*(1,1) dihasilkan dengan bantuan program *R*. Hasil dari estimasi untuk model *GARCH* (1,1) diberikan sebagai berikut:

Berikut ini adalah uji hipotesis untuk mengetahui signifikansi dari esti-

Parameter	Estimasi Parameter	<i>t-value</i>	<i>p-value</i>
α_0	$6,821 \times 10^{-5}$	16,05	0,0000
α_1	0,3458	28,56	0,000
β_1	0,621	38,12	0,000

Tabel 3.3: Estimasi Parameter dan Uji Signifikansi Model *GARCH*(1,1)

masi parameter model *GARCH*(1,1):

1. Hipotesis

$H_0 : \boldsymbol{\theta} = 0$ (estimasi parameter tidak signifikan dalam model)

$H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq 0$ (estimasi parameter signifikan dalam model)

2. Taraf signifikansi $\alpha = 0,05$

3. Statistik uji

$$t_{hitung} = \frac{estimator}{SE(estimator)}$$

4. Kriteria keputusan H_0 ditolak jika nilai dari $p - value < \alpha$ atau $|t_{hitung}| >$

$$t_{\frac{\alpha}{2}, df}$$

5. Perhitungan dapat dilihat pada tabel 3.3

6. Kesimpulan:

Berdasarkan hasil dari tabel 3.3, parameter $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ memiliki nilai *p-value* lebih kecil dari $\alpha = 0,05$ dan memiliki $|t_{hitung}| > t_{tabel}$. sehingga dapat disimpulkan bahwa H_0 ditolak, yang berarti estimasi parameter $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ signifikan dalam model.

Karena semua parameter model *GARCH*(1,1) sudah signifikan, maka model *GARCH*(1,1) untuk data *return* harga saham PT. Unilever Indonesia, Tbk

adalah

$$\varepsilon_t = a_t h_t^{1/2} \quad (3.44)$$

dimana a_t variabel acak dengan rata-rata 0 dan varians 1, saling bebas dan

$$h_t = 6,821 \times 10^{-5} + 0,3458\varepsilon_{t-1}^2 + 0,621h_{t-1} \quad (3.45)$$

Model tersebut menunjukkan bahwa varians residual periode saat ini (t) dipengaruhi kuadrat residual satu periode sebelumnya ($t - 1$) dengan nilai koefisien (α_1) sebesar 0,3458 dan dipengaruhi varians residual satu periode sebelumnya ($t - 1$) dengan nilai koefisien (β_1) sebesar 0,621. Model tersebut juga menunjukkan bahwa *return* saham mengalami volatilitas yang tinggi dan terus menerus karena penjumlahan dari α_1 dan β_1 nilainya mendekati 1 (Nawatmi, 2012), yaitu sebesar 0,9668. Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (3.12) maka model $GARCH(1,1)$ menjadi

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^2 &= \frac{a_t^2 \alpha_0}{1 - \beta_1} + a_t^2 \alpha_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^{i-1} \varepsilon_{t-i}^2 \\ &= \frac{6,821 \times 10^{-5} a_t^2}{1 - 0,621} + 0,3458 a_t^2 \sum_{i=1}^{\infty} 0,621^{i-1} \varepsilon_{t-i}^2 \\ &= 1,7997 \times 10^{-4} a_t^2 + 0,3458 a_t^2 \sum_{i=1}^{\infty} 0,621^{i-1} \varepsilon_{t-i}^2 \end{aligned}$$

Sebelum menarik kesimpulan bahwa model tersebut sudah layak untuk digunakan, masih perlu dilakukan pengujian heterokedastisitas kepada model $GARCH(1,1)$ untuk mengetahui apakah model tersebut masih mengandung efek $ARCH/GARCH$ atau tidak.

1. Hipotesis

H_0 : Tidak terdapat efek *ARCH/GARCH* pada model

H_1 : Terdapat efek *ARCH/GARCH* pada model

2. Taraf signifikansi $\alpha = 0,05$

3. Statistik uji

$$LM = T \frac{(\mathbf{g}'\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{g})}{\mathbf{g}'\mathbf{g}} = TR^2$$

4. Kriteria keputusan H_0 ditolak jika nilai dari $p\text{-value} < \alpha$ atau $TR^2 > \chi_q^2(\alpha)$

5. Perhitungan menggunakan program R dengan hasil sebagai berikut

```
ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects
data: res.garch
Chi-squared = 0.0635, df = 1, p-value = 0.8011
```

6. Kesimpulan:

Berdasarkan hasil perhitungan menggunakan program R di atas, nilai $p\text{-value}$ lebih besar dari $\alpha = 0,05$, sehingga dapat disimpulkan bahwa H_0 diterima, yang berarti sudah tidak terdapat efek *ARCH/GARCH* pada model.

Dari Uji *ARCH-LM* didapatkan kesimpulan bahwa model *GARCH*(1,1) sudah tidak mengandung efek *ARCH/GARCH* sehingga model tersebut sudah layak digunakan untuk data *return* harga saham PT. Unilever Indonesia, Tbk.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Suatu data deret waktu yang memiliki volatilitas yang tinggi, akan mengakibatkan varians residual yang tidak konstan. Varians residual yang tidak konstan tersebut melanggar asumsi dari model deret waktu klasik. Oleh karena itu model deret waktu klasik seperti model *ARIMA* tidak tepat jika digunakan untuk memodelkan deret waktu tersebut. Untuk mengatasi hal tersebut maka residual dari model deret waktu klasik akan dimodelkan dengan *GARCH*.

Model umum *GARCH*(p,q) adalah

$$\varepsilon_t = a_t h_t^{1/2}$$

dimana a_t variabel acak dengan rata-rata 0 dan varians 1, saling bebas dan

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}$$

Jika $p = 0$ maka proses menjadi proses *ARCH*(q), jika $p = q = 0$ maka proses adalah *white noise*. Jika $p = q = 1$ maka diperoleh *GARCH* (1,1) yang berbentuk

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

2. Estimasi parameter model *GARCH* dapat dilakukan dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation (MLE)*. Solusi pendugaan parameter *MLE* diperoleh dengan metode *scoring algorithm*.
3. Penerapan model *GARCH* dilakukan pada data penutupan harga saham harian PT. Unilever Indonesia, Tbk periode 6 Mei 2010 - 16 Januari 2015 (1200 data). Model *return* saham yang terbentuk adalah *ARMA(1,1)* sebagai berikut:

$$R_t = 0,001 + 0,193R_{t-1} + 0,4928\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

dengan model residual *GARCH(1,1)* sebagai berikut:

$$\varepsilon_t = a_t h_t^{1/2}$$

dimana a_t variabel acak dengan rata-rata 0 dan varians 1, saling bebas dan

$$h_t = 6,821 \times 10^{-5} + 0,3458\varepsilon_{t-1}^2 + 0,621h_{t-1}$$

Model tersebut menunjukkan bahwa varians residual periode saat ini (t) dipengaruhi kuadrat residual satu periode sebelumnya dengan nilai koefisien (α_1) sebesar 0,3458 dan dipengaruhi varians residual satu periode sebelumnya dengan nilai koefisien (β_1) sebesar 0,621.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, hanya dibahas tentang penentuan model dan estimasi untuk model $GARCH(p,q)$ dengan $p = q = 1$. Disarankan untuk penelitian selanjutnya, membahas tentang penentuan model dan estimasi untuk model $GARCH(p,q)$ dengan $p \neq q$, dan disarankan juga untuk membahas hingga tahap peramalan dari model $GARCH$.

DAFTAR PUSTAKA

- Arini, P.S dan Bendesa. 2012. *Pengaruh Hari Raya Galungan Pada Seasonal Adjustment IHK dan Penentuan Komoditas Utama yang Mempengaruhi Inflasi di Provinsi Bali : Analisis ARIMA*. Jurnal Ekonomi Kuantitatif Terapan vol.5 No.2 page 79-86.
- Bollerslev, T. 1985. *Generalized Autoregressive Conditional Heterokedasticity*. Journal of Econometrics vol 31 page 307-327.
- Bozdogan, Hamparsum. 2000. *Akaike's Information Criterion and Recent Developments in Information Complexity*. Journal of Mathematical Psychology vol 44 page 62-91.
- Engle, R.F. 1982. *Autoregressive Conditional Heterokedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. Econometrica vol 50 No.4 page 987-1007.
- Greene, W. 2011. *Econometric Analysis (7th Edition)*. New York University: Prentice Hall.
- Hurn, Stan. 2009. *Likelihood Methods in Financial Econometrics*. Economic Research Southern Africa University of Stellenbosch.
- Kirchgassner, Gebhard dan Wolters, Jurgen. 2007. *Introduction to Modern Time Series Analysis*. Verlag Berlin Heidelberg New York: Springer.
- Nawatmi, Sri. 2012. *Volatilitas Nilai Tukar dan Perdagangan Internasional*. Dinamika Akuntansi, Keuangan dan Perbankan, Vol.1 No.1 page 41-56.

- Posedel, Petra. 2005. *Properties and Estimation of GARCH (1,1) Model*. Metodoloski zvezki, Vol.2 No.2 page 243-257.
- Purnomo, Kuntarto. 2010. *Estimasi Underground Economy Periode 2000-2009 Melalui Pendekatan Moneter*. Universitas Indonesia.
- Ristiyan, Aris P. 2010. *Model Runtun Waktu Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*. Universitas Negeri Jakarta.
- Santoso, Teguh. 2011. *Aplikasi Model GARCH pada Data Inflasi Bahan Makanan Indonesia*. Jurnal ASET Vol.13 No.1 page 65-76.
- Soejoeti, Zanzawi. 1987. *Analisis Runtun Waktu*. Jakarta. Karunika Jakarta Universitas Terbuka.
- Wei, William W.S. 2006. *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods (2nd Edition)*. United States of America: Pearson Education, Inc.
- Yang, Yiyang. 2012. *Parameter Estimation of GARCH Model*. <http://www.ams.sunysb.edu/yiyang/research/computational-finance/Parameter-Estimation-of-GARCH-Model.pdf>.(diakses: 12 November 2014).

LAMPIRAN-LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

Daftar *syntax* yang Digunakan pada Program R 3.1.0

Package yang dibutuhkan adalah tseries, FinTS, fUnitRoots dan forecast

1. Untuk membuat grafik saham
`plot(saham,type="l", xlab="waktu", ylab="Harga saham")`
2. Untuk membuat grafik return
`plot(return,type="l", xlab="waktu(t)", ylab="Return saham")`
3. Untuk menguji normalitas dengan uji ADF
`adf.test(return, k=0)`
4. Tabel Mackinnon dengan intersep
`unitrootTable(trend = "c")`
5. Untuk membuat plot ACF dan PACF
`acf(return,ylim=c(-0.5,1))`
`pacf(return,ylim=c(-0.5,1))`
6. Untuk mengestimasi model ARIMA (p,d,q)
`Arma<- Arima(return, order=c(p,d,q))`
7. Untuk memanggil data residual ARMA
`res.Arma <- Arma$res`
8. Untuk menguji heterokedastisitas Arma dengan uji ARCH-LM
`ArchTest(res.Arma, lag=1)`
9. Untuk mengestimasi model GARCH (1,1)

```
garch<-garch(res.Arma,order=c(1,1))
```

```
summary(garch)
```

10. Untuk memanggil data residual ARMA

```
res.garch <- Arma$res
```

11. Untuk menguji heterokedastisitas Garch dengan uji ARCH-LM

```
ArchTest(res.garch, lag=1)
```

LAMPIRAN 2

Summary Data Harga Saham dan *Return* saham

PT. Unilever Indonesia. Tbk periode 6 Mei 2010 - 16 Januari 2015

Summary Data Harga Saham :

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
14000	16790	22800	23200	29500	34600

Summary Return saham :

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
-0.3679000	-0.0088500	0.0000000	0.0009922	0.0096540	0.5501000

LAMPIRAN 3Perhitungan *AIC* pada Model *ARIMA*

```
> logLik(Arma)
'log Lik.' 2627.846 (df=4)
AIC : -2*logLik(Arma)+ 8
      'log Lik.' -5247.692 (df=4)
> logLik(Ar1)
'log Lik.' 2616.469 (df=3)
AIC: -2*logLik(Ar1)+6
      'log Lik.' -5226.939 (df=3)
> logLik(Ma1)
'log Lik.' 2625.966 (df=3)
AIC: -2*logLik(Ma1)+6
      'log Lik.' -5245.932 (df=3)
> logLik(Ar2)
'log Lik.' 2626.531 (df=4)
AIC: -2*logLik(Ar2)+ 8
      'log Lik.' -5245.062 (df=4)
> logLik(Ma2)
'log Lik.' 2627.78 (df=4)
AIC: -2*logLik(Ma2)+8
      'log Lik.' -5247.56 (df=4)
```

LAMPIRAN 4

Estimasi Model *ARMA*(1,1) Menggunakan R 3.1.0

Series: return

ARIMA(1,0,1) with non-zero mean

Coefficients:

	ar1	ma1	intercept
	0.193	-0.4928	1e-03
s.e.	0.097	0.0872	5e-04

sigma² estimated as 0.0007335: log likelihood=2627.85

AIC=-5247.69 AICc=-5247.66 BIC=-5227.33

Training set error measures:

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1
Training set	1.021651e-05	0.02708274	0.01504061	NaN	Inf	0.6620065	0.0003791064

LAMPIRAN 5Perhitungan *AIC* pada Model *ARCH* dan *GARCH*

```
> logLik(arch1)
'log Lik.' 2735.119 (df=2)
AIC: -2*logLik(arch1)+ 4
      'log Lik.' -5466.239 (df=2)
> logLik(arch2)
'log Lik.' 2907.959 (df=3)
AIC: -2*logLik(arch2)+ 6
      'log Lik.' -5809.918 (df=3)
> logLik(arch3)
'log Lik.' 2976.18 (df=4)
AIC: -2*logLik(arch3)+ 8
      'log Lik.' -5944.36 (df=4)
> logLik(arch4)
'log Lik.' 2980.875 (df=5)
AIC: -2*logLik(arch4)+ 10
      'log Lik.' -5951.75 (df=5)
> logLik(arch5)
'log Lik.' 2981.549 (df=6)
AIC: -2*logLik(arch5)+ 12
      'log Lik.' -5951.098 (df=6)
> logLik(arch6)
'log Lik.' 2981.736 (df=7)
AIC: -2*logLik(arch6)+ 14
```

```
      'log Lik.' -5949.472 (df=7)
> logLik(arch7)
'log Lik.' 2980.685 (df=8)
AIC: -2*logLik(arch7)+ 16
      'log Lik.' -5945.37 (df=8)
> logLik(arch8)
'log Lik.' 2973.696 (df=9)
AIC: -2*logLik(arch8)+ 18
      'log Lik.' -5929.393 (df=9)
> logLik(arch9)
'log Lik.' 2986.693 (df=10)
AIC: -2*logLik(arch9)+ 20
      'log Lik.' -5953.385 (df=10)
> logLik(arch10)
'log Lik.' 2989.702 (df=11)
      -2*logLik(arch10)+ 22
      'log Lik.' -5957.404 (df=11)
> logLik(garch)
'log Lik.' 2920.027 (df=5)
AIC: -2*logLik(garch)+ 6
      'log Lik.' -5834.055 (df=5)
```

LAMPIRAN 6

Estimasi Model *ARCH*(10) Menggunakan R 3.1.0

Model:

GARCH(0,10)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-6.84115	-0.52479	-0.03734	0.46332	9.14557

Coefficient(s):

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
a0	2.120e-04	7.170e-06	29.568	< 2e-16	***
a1	1.296e-01	1.926e-02	6.730	1.7e-11	***
a2	5.675e-02	3.043e-02	1.865	0.06219	.
a3	6.011e-02	2.038e-02	2.949	0.00318	**
a4	4.942e-02	2.542e-02	1.944	0.05191	.
a5	4.162e-02	2.342e-02	1.777	0.07556	.
a6	1.393e-02	2.642e-02	0.527	0.59808	
a7	1.688e-02	2.004e-02	0.842	0.39976	
a8	1.669e-15	1.442e-02	0.000	1.00000	
a9	7.593e-02	1.346e-02	5.640	1.7e-08	***
a10	3.853e-02	2.066e-02	1.865	0.06217	.

Signif. codes: 0 *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1 1

LAMPIRAN 7

Estimasi Model *GARCH*(1,1) Menggunakan R 3.1.0

Model: GARCH(1,1)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-7.19046	-0.47181	-0.03939	0.41928	11.05716

Coefficient(s):

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
a0	6.821e-05	4.249e-06	16.05	<2e-16 ***
a1	3.458e-01	1.211e-02	28.56	<2e-16 ***
b1	6.210e-01	1.629e-02	38.12	<2e-16 ***

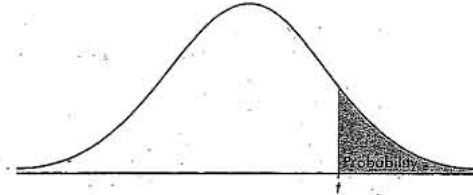
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

LAMPIRAN 8

Tabel Mackinnon dengan *Intercept*

	-----Taraf Signifikansi-----							
	0.010	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975	0.990
N								
25	-3.724	-3.314	-2.986	-2.633	-0.370	0.000	0.327	0.714
50	-3.568	-3.213	-2.921	-2.599	-0.406	-0.040	0.281	0.658
100	-3.497	-3.166	-2.891	-2.582	-0.423	-0.059	0.259	0.632
250	-3.456	-3.139	-2.873	-2.573	-0.433	-0.071	0.247	0.617
500	-3.443	-3.131	-2.867	-2.570	-0.437	-0.075	0.242	0.612
Inf	-3.430	-3.122	-2.861	-2.567	-0.440	-0.078	0.238	0.607

LAMPIRAN 9

Tabel *t-student*TABLE B: *t*-DISTRIBUTION CRITICAL VALUES

df	Tail probability <i>p</i>											
	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	.765	.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	.741	.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	.727	.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	.718	.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	.711	.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	.706	.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.703	.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.700	.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	.697	.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	.695	.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	.694	.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	.692	.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	.691	.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	.690	.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	.689	.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	.688	.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.611	3.922
19	.688	.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	.687	.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	.686	.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	.686	.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	.685	.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	.685	.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	.684	.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	.684	.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	.684	.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	.683	.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	.683	.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	.683	.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	.681	.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	.679	.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	.679	.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	.678	.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	.677	.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
1000	.675	.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.056	2.330	2.581	2.813	3.098	3.300
∞	.674	.841	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291
	50%	60%	70%	80%	90%	95%	96%	98%	99%	99.5%	99.8%	99.9%
	Confidence level <i>C</i>											

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama : Ambar Mangesti
No. Registrasi : 3125111212
Jurusan : Matematika
Program Studi : Matematika

Menyatakan bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul
”PEMODELAN DATA DERET WAKTU DENGAN VARIANS TIDAK
KONSTAN MENGGUNAKAN *GENERALIZED AUTOREGRESSIVE
CONDITIONAL HETEROCEDASTICITY (GARCH)*” adalah :

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

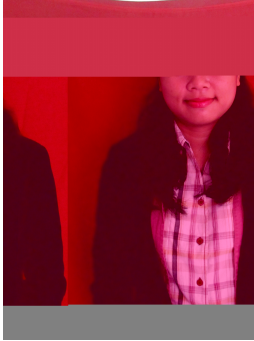
Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, Juni 2015

Yang membuat pernyataan

Ambar Mangesti

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



AMBAR MANGESTI. Lahir di Bekasi, 1 Agustus 1993.

Anak ketiga dari pasangan Bapak Hartadi dan Ibu Fatmawati.

Saat ini bertempat tinggal di Jalan Kiara Raya RT 07 RW 05

No.18 Jatirasa Jatiasih, Bekasi 17424.

No. Ponsel : 0857 1031 5614

Email : ambarmangesti@gmail.com

Riwayat Pendidikan : Penulis mengawali pendidikan di SDN Jatiasih X selama 6 tahun. Tahun 2005, penulis melanjutkan ke SMP Negeri 9 Bekasi hingga tahun 2008. Di tahun 2008 penulis melanjutkan ke SMA Negeri 6 Bekasi dan lulus tahun 2011. Di tahun itu pula penulis mengikuti Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN) dan mendapat Jurusan Matematika, Universitas Negeri Jakarta (UNJ). Di pertengahan tahun 2015, penulis telah memperoleh gelar Sarjana Sains untuk Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, FMIPA, UNJ.