ANALISIS MODEL ANTRIAN M/M/s/K

(Studi Kasus di BPJS Kesehatan Jakarta Timur)

Skripsi

Disusun untuk melengkapi syarat-syarat

guna memperoleh gelar Sarjana Sains

SYARIFAH HANUN

3125136331

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA

2017

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

ANALISIS MODEL ANTRIAN M/M/s/K

(Studi Kasus di BPJS Kesehatan Jakarta Timur)

Nama : Syarifah Hanun

No. Registrasi : 3125136331

	Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab			
Dekan	: Prof. Dr. Suyono, M.Si.	....	16-08-17
	NIP. 19671218 199303 1 005		
Wakil Penanggung Jawab			
Wakil Dekan I	: Dr. Muktiningsih, M.Si.	....	16-08-17
	NIP. 19640511 198903 2 001		
Ketua	: Drs. Mulyono, M.Kom.	....	14-08-17
	NIP. 19660517 199403 1 003		
Sekretaris	: Vera Maya Santi, M.Si.	....	15-08-17
	NIP. 19790531 200501 2 006		
Penguji	: Dra. Widyanti Rahayu, M.Si.	....	14-08-17
	NIP. 19661103 200112 2 001		
Pembimbing I	: Ir. Fariani Hermin, MT.	....	15-08-17
	NIP. 19600211 198703 2 001		
Pembimbing II	: Dr. Eti Dwi Wiraningsih, S.Pd, M.Si.	....	15-08-17
	NIP. 19810203 200604 2 001		

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal: 10 Agustus 2017

ABSTRACT

SYARIFAH HANUN, 3125136331. Analysis of M/M/s/K Queueing Model (Case Study at BPJS Health of East Jakarta). Thesis. Faculty of Mathematics and Natural Science Jakarta State University. 2017.

Waiting in queueing is a common occur in the society. Queue areses because the numbers of user s is not comprable with existing service facilities. One of queueing models that exist in the society is M/M/s/K (queues with truncation). The M/M/s/K queueing model is queueing model which has queue more than one server with limited capacity, queueing process follows the Markov chain, arrival customers is Poisson distributed, and service time is Exponentially distributed. The steady state probability is applied to determine the formulation from the average performance of the number and the average waiting time in the queueing system. Moreover, this thesis discusses about the application of queueing model in the society. The case study was taken from the BPJS locket queue in East Jakarta, the model is M/M/30/120 with the average rate of arrivals is 17 people per hour. Performance measures of model is the average number participants in queueing system (L) = 10 people, the average number in queue lenght (L_q) *= 7 people, the average participants waiting time in queueing system (W) = 36.13 minutes, as well as average participants waiting time in queue* (W_q) *= 24,74 minutes.*

Keywords *: queueing system, queues with truncation, steady state probability, performance measures.*

ABSTRAK

SYARIFAH HANUN, 312516331. Analisis Model Antrian M/M/s/K (Studi Kasus di BPJS Kesehatan Jakarta Timur). Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. 2017.

Menunggu dalam suatu antrian adalah hal yang sering terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Antrian timbul karena jumlah pengguna tidak sebanding dengan fasilitas layanan yang ada. Salah satu model antrian yang ada dalam kehidupan sehari-hari adalah M/M/s/K (antrian dengan pembatasan). Model antrian M/M/s/K adalah model antrian yang memiliki sistem antrian lebih dari satu pelayan (*server*) dengan kapasitas yang terbatas, proses antrian mengikuti rantai Markov, pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, dan waktu pelayanan pelanggan berdistribusi Eksponensial. Probabilitas *steady state* dari sistem antrian dicari untuk menentukan formulasi dari ukuran performansi rata-rata jumlah antrian dan rata-rata waktu tunggu antrian dalam sistem. Selain itu, penelitian ini membahas tentang penerapan model antrian tersebut di kehidupan sehari-hari. Contoh kasus yang diambil adalah pada loket pelayanan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur yang memiliki model antrian M/M/3/120, dengan rata-rata kedatangan 17 orang per jam. Ukuran performansi model antrian tersebut yaitu rata-rata jumlah peserta dalam sistem (L) = 10 orang, rata-rata jumlah peserta dalam antrian (L_q) = 7 orang, rata-rata waktu tunggu peserta dalam sistem (W) = 36,13 menit, serta rata-rata waktu tunggu peserta dalam antrian (W_q) = 24,74 menit.

Kata kunci : sistem antrian, antrian dengan pembatasan, probabilitas *steady state*, ukuran performansi.

PERSEMBAHANKU...

"...karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan..." (Q.S Al-Insyirah: 5-6)

"Pure mathematics: you won't know whether or not you like a certain type of mathematics until you've tried it."
-Julie Rowlett-

Skripsi ini kupersembahkan untuk Alm. Drs. Sariman, M.Si., (abi atau ayah saya) yang jika beliau melihat pasti akan sangat senang sekali karena dari awal sampai saat ini saya tetap di sini *because of you*, umi (ibu saya), saudara-saudara, serta sahabat-sahabat yang selalu ada dikala susah maupun senang
..."Terima kasih atas dukungan, do'a, dan kasih sayang kalian"...

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT atas rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Analisis Model Antrian M/M/s/K (Studi Kasus di BPJS Kesehatan Jakarta Timur)" yang merupakan salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Sains Program Studi Matematika Universitas Negeri Jakarta.

Skripsi ini berhasil diselesaikan tidak terlepas dari adanya bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin menyampaikan terima kasih terutama kepada:

1. Ibu Ir. Fariani Hermin, MT selaku Dosen Pembimbing I dan Ibu Dr. Eti Dwi Wiraningsih, S.Pd, M.Si selaku Dosen Pembimbing II, yang telah meluangkan waktunya dalam memberikan bimbingan, saran, nasihat, serta arahan sehingga skripsi ini dapat menjadi lebih baik dan terarah.

2. Ibu Dr. Lukita Ambarwati, S.Pd, M.Si selaku Koordinator Program Studi Matematika FMIPA UNJ yang telah banyak membantu penulis.

3. Ibu Dian Handayani, M.Si selaku Pembimbing Akademik atas segala bimbingan, doa, motivasi, dan kerjasama Ibu selama perkuliahan.

4. Seluruh Bapak/Ibu dosen atas ilmu yang telah diberikan. Serta karyawan/karyawati FMIPA UNJ yang telah memberikan informasi yang penulis butuhkan dalam menyelesaikan skripsi.

5. Umi yang selalu mendukung, memberi doa, motivasi, dan setia membantu penulis dengan penuh cinta dan kasih sayang yang tulus.

6. Nenek, tante, kakak, dan adik-adik yang terus memberi semangat dan mendoakan penulis penulis untuk kelancaran dalam penulisan skripsi ini.

7. Pihak BPJS Kesehatan Pusat dan BPJS Kesehatan Jakarta Timur yang telah mengizinkan dan bersedia membantu penulis untuk mendapatkan data penelitian.

8. Teman-teman di matematika 2013. Khususnya Defy, Syevie, Ayunda, Tias, Trias, Ezania, Rania, Nanda, dan Daniel, mereka yang selalu ada dikala senang maupun susah. Serta Umam, Nurul, Laity, dan Irena, yang juga sebagai teman seperjuangan skripsi yang kerap saling membantu dalam penulisan skripsi.

9. Kakak-kakak tingkat di matematika 2012. Khususnya Kak Vinna, Kak Anggita, dan Kak Bobby yang telah memberi motivasi dan membantu penulis.

10. Fadil, teman baik yang telah memberikan doa, motivasi, perhatian, dukungan, dan mendengarkan keluh kesah penulis.

11. Teman-teman dekat di SD, SMP, dan SMA yang sampai sekarang masih mengirimkan doa dan motivasi untuk penulis.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Masukan dan kritikan akan sangat berarti. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca sekalian.

Jakarta, Agustus 2017

Syarifah Hanun

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab pendahuluan akan dibahas mengenai latar belakang, rumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, dan metode penelitian dari masalah yang mencakup model antrian M/M/s/K.

1.1 Latar Belakang Masalah

Menunggu dalam suatu antrian adalah hal yang sering terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Bagi sebagian besar orang menunggu adalah hal yang membosankan, merugikan, dan sesuatu yang tidak menyenangkan, apalagi harus menunggu dalam antrian yang panjang. Masalah antrian adalah salah satu masalah yang harus diperhatikan dalam kehidupan sehari-hari.

Antrian disebabkan oleh kebutuhan pengguna akan layanan melebihi kemampuan (kapasitas) pelayanan atau fasilitas layanan, dengan kata lain antrian timbul karena jumlah pengguna tidak sebandingan dengan fasilitas layanan yang ada, sehingga pengguna fasilitas yang tiba tidak bisa segera mendapat layanan disebabkan kesibukan layanan. Pada banyak kasus, tambahan fasilitas layanan dapat diberikan untuk mengurangi antrian atau untuk mencegah timbulnya antrian. Akan tetapi solusi tersebut kurang efektif karena berkaitan dengan biaya yang harus dikeluarkan dengan memberikan pelayanan tambahan.

Teori antrian adalah studi dalam proses stokastik tentang kejadian garis tunggu pelanggan yang memerlukan layanan dari sistem antrian yang ada

(Gross, 2008). Komponen utama dari suatu sistem antrian adalah pelanggan dan pelayanan. Jika laju kedatangan hampir mendekati laju pelayanan maka akan menimbulkan penumpukan pelanggan yang berada dalam barisan tunggu antrian. Penumpukan tersebut akan menyebabkan waktu tunggu bagi pelanggan dalam sistem antrian sebelum mendapatkan pelayanan. Waktu tunggu dalam sistem antrian harus diminimalkan agar pelanggan merasa puas dengan fasilitas yang diberikan. Laju kedatangan dan pelayanan pelanggan umumnya dijelaskan melalui suatu bentuk distribusi yang dipelajari dalam proses stokastik, salah satu bentuk distribusi kedatangan pelanggan yang umum dikenal adalah kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson dan pelayanan pelanggan berdistribusi Eksponensial. Model antrian seperti ini dinamakan model antrian Markovian secara matematis dilambangkan M/M/s dengan M yang pertama menyatakan antrian Markovian dengan laju kedatangan mengikuti distribusi Poisson, M yang kedua menyatakan antrian Markovian dengan laju pelayanan mengikuti distribusi Eksponensial, dan s menyatakan banyaknya fasilitas layanan (*server*) yang melayani.

Model antrian M/M/s/K yang dibahas dalam skripsi ini merupakan kasus khusus dari model antrian M/M/s yang terdiri dari beberapa fasilitas layanan (*server*) namun membatasi jumlah kapasitas pelanggan sebanyak K. Model antrian ini merupakan salah satu solusi penyelesaian masalah antrian selain harus menambah jumlah *server*. Jika sudah ada K pelanggan dalam sistem antrian, maka pelanggan yang tiba berikutnya akan ditolak. Pembatasan jumlah pelanggan dapat menjadi solusi yang lebih efektif ketika suatu fasilitas mempunyai luas tempat yang terbatas dan minimnya biaya untuk menambah fasilitas pelayanan.

Contoh kasus model antrian M/M/s/K dalam kehidupan sehari-hari adalah loket pelayanan di BPJS Kesehatan. BPJS Kesehatan (Badan Penyelenggara

Jaminan Sosial Kesehatan) merupakan badan hukum publik yang bertanggung jawab langsung kepada presiden dan memiliki tugas menyelenggarakan jaminan kesehatan nasional bagi seluruh rakyat Indonesia (melalui kartu jaminan kesehatan), terutama untuk Pegawai Negeri Sipil (PNS), penerima pensiun PNS dan TNI/POLRI, veteran, perintis kemerdekaan beserta keluarganya, badan usaha lainnya, serta rakyat biasa. Proses antrian di loket pelayanan BPJS Kesehatan Jakarta Timur dimulai dari peserta yang datang membutuhkan pelayanan mengambil karcis antrian, kemudian masuk ke dalam sistem antrian, peserta yang mendapat nomor antrian awal maka terlebih dahulu mendapat pelayanan di loket, diikuti peserta selanjutnya menuju ke loket yang kosong, dan setelah dilayani peserta meninggalkan loket pelayanan. Namun, setiap harinya loket pelayanan BPJS kesehatan Jakarta Timur membatasi jumlah peserta yang akan dilayani yaitu sebanyak 120 peserta. Berdasarkan apa yang telah diketahui bahwa sistem antrian di BPJS Kesehatan memiliki model antrian M/M/s/K.

Model antrian M/M/s/K telah banyak diteliti, pada penelitian sebelumnya yang berjudul "Analisis Kinerja Sistem Antrian M/M/1/N" ditulis oleh Florensa Br Ginting (2014). Dalam penulisannya, penulis membahas tentang penerapan dari model antrian M/M/1/N yang terdapat pada simpul *switching* untuk menyelesaikan kasus dalam jaringan data. Penelitian kedua dilakukan oleh Juniron Sitepu dan Kasmir Tanjung pada tahun 2015, penelitian itu berjudul "Perancang dan Analisis Kinerja Antrian M/M/1/N pada Wireless LAN Menggunakan Simulator Opnet", sama seperti penelitian sebelumnya, penelitian tersebut juga membahas tentang penerapan dari sistem antrian M/M/1/N. Perbedaan antara penelitan ini dengan penelitian sebelumnya adalah terletak pada banyaknya *server* yaitu lebih dari satu (s), membahas tentang analisis formulasi untuk probabilitas jumlah pelanggan dan ukuran performansi pada sistem antrian dalam model antrian M/M/s/K, serta penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.

Berdasarkan permasalahan di atas, penelitian dilakukan melalui kajian pustaka yang akan membahas ukuran performansi sistem antrian yaitu mencari formulasi dari probabilitas jumlah pelanggan, formulasi ukuran performansi seperti rata-rata jumlah pelanggan dan waktu tunggu pada sistem antrian dalam model antrian M/M/s/K. Selain itu, skripsi ini akan membahas penerapan model antrian M/M/s/K untuk kasus antrian pada loket pelayanan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur, tujuannya adalah untuk mengetahui tingkat performa dari sistem antrian yang sudah ditetapkan. Dengan demikian, dalam penulisan skripsi ini penulis mengangkat judul "**ANALISIS MODEL ANTRIAN M/M/s/K (Studi Kasus di BPJS Kesehatan Jakarta Timur).**"

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas rumusan masalah yang akan dibahas sebagai berikut:

1. Bagaimana formulasi untuk probabilitas jumlah pelanggan pada sistem antrian dalam model antrian M/M/s/K?
2. Bagaimana formulasi untuk ukuran performansi pada sistem antrian dalam model antrian M/M/s/K?
3. Bagaimana penerapan model antrian M/M/s/K pada sistem antrian di BPJS Kesehatan Jakarta Timur?

1.3 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah dalam penulisan ini adalah:

1. Ukuran performansi yang dicari yaitu formulasi rata-rata panjang antrian dan waktu tunggu pelanggan dalam sistem antrian.

2. Kasus yang diambil adalah antrian pada loket pelayanan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur.

3. Pengumpulan data hanya dibatasi pada data jumlah kedatangan, waktu pelanggan mulai dilayani, dan waktu pelanggan selesai dilayani di loket pelayanan.

4. Pelayanan di loket selalu tersedia setiap saat.

1.4 Tujuan Penulisan

Dengan memperhatikan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini antara lain:

1. Mengetahui formulasi untuk probabilitas jumlah pelanggan pada sistem antrian dalam model antrian M/M/s/K.

2. Mengetahui formulasi untuk ukuran performansi pada sistem antrian dalam model antrian M/M/s/K.

3. Mengetahui penerapan model antrian M/M/s/K pada sistem antrian di BPJS Kesehatan Jakarta Timur.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat penulisan dalam skripsi ini adalah untuk membantu dalam menentukan penyelesaian kasus-kasus yang melibatkan model antrian M/M/s/K untuk mendapatkan formulasi probabilitas jumlah pelanggan dalam antrian, formulasi ukuran performansi sistem antrian, serta untuk mengetahui performa sistem antrian yang telah ditetapkan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur yaitu model antrian M/M/s/K.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang dilakukan dalam skripsi ini merupakan kajian teori dalam bidang antrian yang didasarkan pada literatur bacaan berupa jurnal, internet, dan *textbook* tentang teori masalah model antrian M/M/s/K. Model matematika yang akan dicari adalah probabilitas dan ukuran performansi dari model antrian tersebut.

Metode studi kasus yang digunakan adalah, pengamatan langsung dan data sekunder yang diperoleh dari sub bagian data di BPJS Kesehatan Jakarta Timur, data yang diambil berupa waktu kedatangan dan waktu pelayanan. Kemudian, data tersebut akan dilakukan uji distribusi untuk mengetahui apakah laju kedatangan berdistribusi Poisson dan laju pelayanan berdistribusi Eksponensial. Selanjutnya, akan dicari performa pada loket pelayanan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur dengan formulasi yang didapat sebelumnya.

BAB II

LANDASAN TEORI

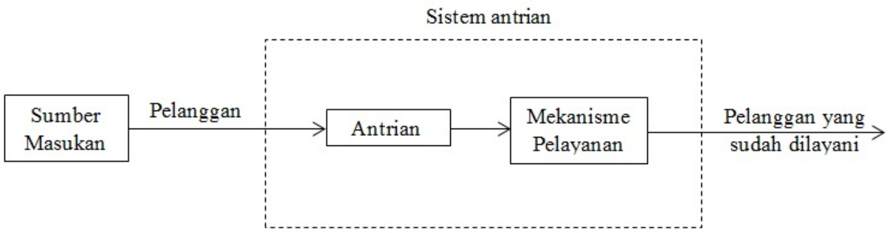
Pada bab landasan teori akan dibahas mengenai teori antrian, distribusi dalam proses antrian, rantai Markov waktu kontinu, formula *little*, model antrian M/M/s, M/M/s/K, dan diagram alir yang akan digunakan dalam menganalisis formulasi probabilitas jumlah pelanggan dan ukuran performansi pada model antrian M/M/s/K.

2.1 Teori Antrian

Teori antrian pertama kali dikemukakan dan dikembangkan oleh AK. Erlang, seorang insinyur ahli matematika asal Denmark pada tahun 1913 dalam bukunya "*Solution of Some Problem in the Theory of Probability of Significance in Automatic Telephone Exchange*". Teori antrian adalah teori yang menyangkut studi matematis dari antrian-antrian atau dapat disebut sebagai proses antrian. Antrian dimulai saat pelanggan-pelanggan yang memerlukan pelayanan mulai datang, pelanggan berasal dari suatu populasi yang disebut sumber masukan. Salah satu populasi adalah jumlah pelanggan yang datang pada fasilitas pelayanan. Antrian terjadi karena kebutuhan pelayanan melebihi kapasitas pelayanan, sehingga pengguna fasilitas tidak bisa segera dilayani disebabkan kesibukan pelayanan. Setelah terjadi antrian maka timbul suatu proses dasar yang terjadi dalam antrian yaitu proses antrian yang akan dibahas pada subbab berikut.

2.1.1 Proses Antrian

Proses antrian adalah suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu dalam baris tunggu jika belum dapat dilayani, dilayani, dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut setelah selesai dilayani. Ilustrasi proses antrian dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1: Proses Antrian Dasar
(Sumber: Hiller & Lieberman, 1980)

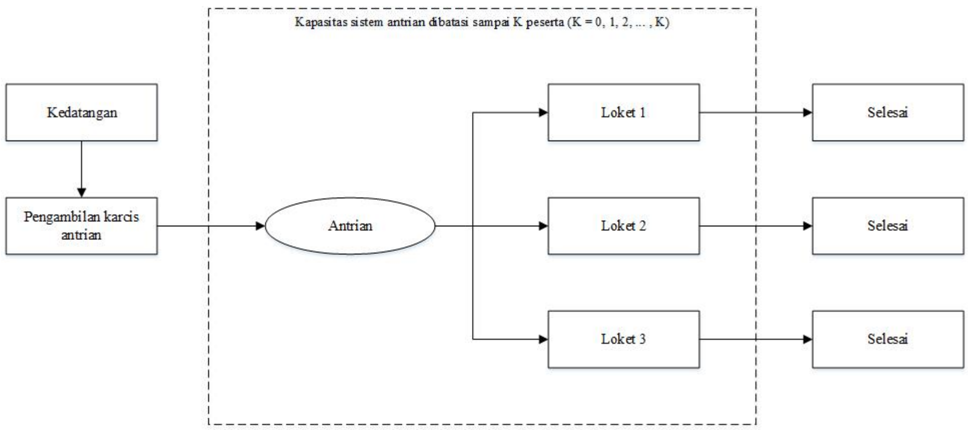
Berdasarkan ilustrasi tersebut, proses antrian dimulai dari sumber masukan yaitu kedatangan pelanggan yang membutuhkan pelayanan pada interval waktu oleh sumber masukan, lalu pelanggan memasuki sistem antrian, kemudian menunggu dalam antrian hingga pelayan memilih pelanggan sesuai dengan disiplin antrian dan mekanisme pelayanan, dan akhirnya pelanggan yang sudah dilayani meninggalkan sistem antrian. (Hiller & Lieberman, 1980). Selanjutnya pada proses antrian terdapat sistem antrian yang akan dibahas pada subbab berikut.

2.1.2 Sistem Antrian

Sistem antrian adalah himpunan pelanggan, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur kedatangan pelanggan dalam proses antrian (Bronson, 1996). Sistem antrian merupakan bagian dari proses antrian. Sistem antrian terdiri atas antrian, pelanggan yang sedang dilayani, fasilitas pelayanan, dan mekanisme pelayanan. Mekanisme pelayanan terdiri dari satu atau lebih fasilitas pelayanan, setiap fasilitas terdiri dari satu atau lebih jalur pelayanan paralel yang disebut pelayan.

Salah satu komponen dari sistem antrian adalah pola kedatangannya. Tipe pola kedatangan ada dua macam, yaitu kedatangan dalam sistem antrian secara individu pada satu waktu dan yang datang bersamaan pada satu waktu atau berkelompok. Dalam masalah antrian biasanya diasumsikan bahwa pelanggan tiba disuatu fasilitas pelayanan secara individu.

Contoh sistem antrian di kehidupan sehari-hari adalah seperti sistem antrian pada loket pelayanan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur yang ilustrasinya dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 2.2: Sistem Antrian Pada BPJS Kesehatan Jakarta Timur (Loket Pelayanan Umum)

Berdasarkan Gambar 2.2 sistem antrian pada loket pelayanan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur memiliki sumber masukan yaitu peserta BPJS dengan pola kedatangan individu. Sistem antrian di BPJS Kesehatan terdiri atas antrian peserta yang ingin dilayani, peserta yang sedang dilayani pada loket pelayanan, pegawai di loket yang melayani peserta, dan mekanisme pelayanannya peserta datang secara individu dalam satu jalur antian dengan ketentuan yang pertama datang maka pertama dilayani.

2.1.3 Karakteristik dalam Sistem Antrian

Karakteristik dalam sistem antrian merupakan ciri khusus yang membedakan antara antrian satu dengan antrian lainnya dalam sistem antrian. Karakteristik dalam sistem antrian tersebut diuraikan sebagai berikut.

- Sumber Masukan

  Sumber masukan adalah asal kedatangan pelanggan atau barang untuk dilayani (Hillier & Lieberman, 1980). Satu karakteristik sumber masukan adalah ukurannya. Ukuran adalah total jumlah pelanggan yang mungkin membutuhkan pelayanan dari waktu ke waktu, misalnya total jumlah pelanggan potensial. Ukurannya dapat diasumsikan tak berhingga atau berhingga (sehingga sumber masukan dapat dikatakan tidak terbatas atau terbatas). Ukuran populasi dikatakan tidak terbatas apabila jumlah pelanggan cukup besar dan dikatakan terbatas apabila jumlah pelanggan sedikit.

- Pola Kedatangan

  Pola kedatangan adalah pola pembentukan antrian akibat kedatangan pelanggan dalam selang waktu tertentu. Pola kedatangan dapat diketahui secara pasti atau berupa suatu variabel acak yang distribusi peluangnya dianggap telah diketahui.

  Bentuk pola kedatangan pelanggan biasanya diperkirakan melalui waktu antar kedatangan pelanggan yang pada umumnya pola kedatangan di notasikan dengan lambda (λ), yaitu waktu antara kedatangan dua pelanggan berurutan pada suatu fasilitas pelayanan. Bentuk ini dapat bergantung pada jumlah pelanggan yang berada dalam sistem ataupun tidak bergantung pada kapasitas sistem. Bila bentuk kedatangan ini tidak disebut secara khusus, maka dianggap pelanggan tiba satu per satu.

Asumsinya ialah kedatangan pelanggan mengikuti suatu proses dengan distribusi probabilitas tertentu.

- Pola Pelayanan

  Pola pelayanan adalah banyak kepergian pelanggan selama periode waktu tertentu. Pola pelayanan biasanya dicirikan oleh waktu pelayanan, yaitu waktu yang dibutuhkan oleh seorang pelayan untuk melayani seorang pelanggan. Waktu pelayanan dapat bersifat deterministik dan dapat berupa suatu variabel acak dengan distribusi peluang tertentu.

  Waktu pelayanan bersifat deterministik berarti bahwa waktu yang dibutuhkan untuk melayani setiap pelanggan selalu tetap, sedangkan waktu pelayanan yang berupa variabel acak adalah waktu yang dibutuhkan untuk melayani setiap pelanggan berbeda-beda.

  Bentuk pelayanan ditentukan oleh waktu pelayanan yaitu waktu yang dibutuhkan untuk melayani pelanggan pada fasilitas pelayanan. Besarnya waktu pelayanan dapat bergantung pada jumlah pelanggan yang telah berada dalam fasilitas pelayanan atau tidak bergantung pada keadaan tersebut.

  Pelayanan dapat dilakukan satu atau lebih dalam fasilitas pelayanan yang masing-masing dapat mempunyai satu atau lebih fasilitas pelayanan yang disebut *servers*. Apabila terdapat lebih dari satu fasilitas pelayanan maka pelanggan dapat menerima pelayanan melalui suatu urutan tertentu atau fase tertentu.

  Pada suatu fasilitas pelayanan, pelanggan akan masuk dalam suatu tempat pelayanan dan menerima pelayanan secara tuntas dari pelayan. Bila tidak disebutkan secara khusus pada bentuk pelayanan ini, maka dianggap bahwa satu pelayan dapat melayani secara tuntas satu pelanggan.

Rata-rata pelayanan (*mean server rate*) diberi simbol (μ). Rata-rata pelayanan (μ) merupakan jumlah pelanggan yang dapat dilayani dalam satuan waktu.

- Disiplin Antrian

  Disiplin antrian mengacu pada cara di mana pelanggan dipilih untuk dilayani ketika antrian telah terbentuk. Disiplin antrian adalah aturan yang mengatur pelayanan kepada para pelanggan sejak pelanggan itu datang sampai pelanggan itu meninggalkan tempat pelayanan. Beberapa jenis disiplin pelayanan yang biasa digunakan adalah sebagai berikut:

  1. *First Come First Served (FCFS)* atau *First In First Out (FIFO)* adalah suatu aturan antrian di mana yang akan dilayani adalah pelanggan yang terlebih dulu datang maka lebih dulu keluar. Contohnya, antrian pada loket pembelian tiket bioskop.
  2. *Last Come First Served (LCFS)* atau *Last In First Out (LIFO)* adalah suatu aturan antrian di mana yang datang paling akhir adalah yang dilayani paling awal. Contohnya, sistem antrian dalam elevator untuk lantai yang sama.
  3. *Service In Random Order (SIRO)* adalah suatu aturan antrian di mana panggilan didasarkan pada peluang secara *random*, tidak soal siapa yang lebih dulu tiba. Contohnya, kertas-kertas undian yang menunggu untuk ditentukan pemenangnya yang diambil secara acak.
  4. *Priority Service (PS)* adalah suatu aturan antian prioritas pelayanan yang diberikan kepada pelanggan yang mempunyai prioritas lebih tinggi dibandingkan dengan pelanggan yang mempunyai prioritas lebih rendah, meskipun yang terakhir ini kemungkinan sudah

lebih dahulu tiba dalam garis tunggu. Contohnya, seseorang yang dalam keadaan penyakit lebih berat dibanding dengan orang lain dalam suatu tempat praktek dokter atau rumah sakit.

- Kapasitas Sistem

  Kapasitas sistem adalah adanya batas maksimum dalam suatu sistem dari banyak pelanggan, baik pelanggan yang sedang berada dalam pelayanan maupun dalam antrian, yang ditampung oleh fasilitas pelayanan pada waktu yang sama. Hal ini bisa berupa kapasitas yang terbatas seperti pada area tunggu antara dua mesin yang berurutan atau kapasitas yang tak terbatas seperti pada fasilitas pemesanan melalui pos.

- Jumlah Saluran Pelayanan

  Jumlah saluran pelayanan dapat mencangkup satu atau lebih fasilitas pelayanan. Jika semua fasilitas pelayanan menawarkan suatu pelayanan yang sama, maka mekanisme pelayanan ini dinamakan memiliki pelayanan sejajar atau paralel. Jika mekanisme tersebut terdiri dari serangkaian antrian, maka mekanisme pelayanan yang dihasilkan disebut antrian seri. Jika mekanisme tersebut terjadi bersama-sama, maka akan dihasilkan mekanisme pelayanan yang disebut dengan antrian jaringan.

Berdasarkan karakterstik di atas, yang akan dibahas pada skripsi ini untuk model antrian M/M/s/K adalah memiliki karakteristik pola kedatangan berdistribusi Poisson, pola pelayanan berdistribusi Eksponensial, disiplin antrian FCFS, kapasitas sistem terbatas, dan jumlah saluran pelayanan lebih dari satu.

2.1.4 Struktur Dasar Sistem Antrian

Proses antrian pada umumnya dikelompokkan ke dalam empat struktur dasar menurut sifat-sifat pelayanan dari fasilitas layanan yaitu sebagai berikut.

- *Single Server Single Phase*

  Single Server - Singel Phase adalah suatu bentuk antrian yang hanya terdapat satu antrian dan satu jalur untuk memasuki sistem pelayanan atau hanya ada satu pelayanan.

- *Single Server - Multi Phase*

  Single Server - Multi Phase adalah suatu bentuk antrian yang hanya terdapat satu antrian dan terdapat dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan dalam *phase-phase*.

- *Multi Server - Single Phase*

  Multi Server - Single Phase adalah suatu bentuk antrian yang terjadi jika ada dua atau lebih pelayanan dan dialiri oleh satu antrian.

- *Multi Server - Multi Phase*

  Multi Server - Multi Phase adalah suatu bentuk antrian yang terjadi jika ada dua atau lebih pelayanan dan antrian.

Struktur dasar sistem antrian yang akan digunakan dalam skripsi ini adalah *Multi Server - Single Phase* karena model antrian M/M/s/K dialiri satu jalur antrian, namun memiliki jumlah fasilitas (*server*) lebih dari satu yang disimbolkan dalam notasi s. Selanjutnya akan dibahas mengenai arti dari notasi yang ada pada teori antrian.

2.1.5 Notasi

Notasi dalam teori antrian dikembangkan sebagai singkatan untuk menjelaskan proses antrian. Notasi (a/b/c);(d/e/f) pada awalnya dirancang oleh D.G. Kendall (1953), dalam bentuk (a, b, c) dan sekarang dikenal dalam literatur sebagai notasi Kendall. Selanjutnya, A.M.Lee (1966) menambahkan simbol d dan e dalam notasi Kendall tersebut, kemudian Hamdy A.Taha juga menambahkan simbol f yang mewakili kapasitas sumber pemanggilan.

Simbol-simbol pada notasi seperti a (distribusi kedatangan), b (distribusi pelayanan), c (jumlah pelayanan paralel), d (disiplin antrian), e (jumlah maksimum kapasitas sistem), dan f (sumber masukan) adalah unsur-unsur dasar dari suatu model antrian yang akan dijelaskan pada Tabel 2.1 tentang notasi Kendall.

Tabel 2.1: Notasi Kendall

Karakteristik	Simbol	Keterangan
a dan b	M	Markov menyatakan waktu kedatangan atau keberangkatan berdistribusi Poisson. Waktu pelayanan atau waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial.
	D	Konstanta atau deterministik menyatakan waktu pelayanan atau waktu antar kedatangan konstan.
	E_k	Erlang menyatakan distribusi untuk waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan dengan parameter k.
	G	Distribusi umum dari *service time* atau keberangkatan (waktu pelayanan).
c	1, 2, ...	Jumlah pelayanan dalam bentuk paralel atau seri.
d	FCFS	Pertama datang, pertama dilayani.
	LCFS	Terakhir datang, terakhir dilayani.
	SIRO	Pelayanan dipilih acak.
	PR	Pelayanan dipilih berdasarkan prioritas.
e	1, 2, ...	Jumlah maksimum pelanggan dalam sistem.
f	1, 2, ...	

Apabila e dan f adalah nilai yang tidak ditentukan, maka diasumsikan tidak ada pembatasan kapasitas dan sumber masukan sistem. Berdasarkan pengertian tentang notasi Kendall, penelitian ini akan memakai asumsi untuk notasi a adalah distribusi waktu kedatangan yang mengikuti proses Markov, b adalah distribusi pelayanan yang mengikuti proses Markov, c adalah jumlah pelayanan lebih dari satu sebanyak s, fasilitas dalam bentuk paralel, d adalah disiplin antrian FCFS yaitu yang pertama datang adalah yang pertama dilayani, e adalah jumlah maksimum pelanggan yaitu dibatasi sebanyak K, dan f adalah sumber masukkan yang tidak terbatas. Selanjutnya, akan dibahas tentang ukuran performasi yang sering digunakan dalam sistem antrian.

2.1.6 Ukuran Performansi Antrian

Ukuran performansi sebuah sistem antrian dapat diperoleh dengan menganalisis suatu antrian. Heizer dan Render (2005) juga menambahkan komponen dasar antrian yaitu mengukur performansi antrian. Pengukuran yang biasa digunakan untuk menggambarkan sistem antrian:

- P_n : probabilitas terdapat n pelanggan dalam sistem antrian.
- L : rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem antrian $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} nP_n\right)$.
- L_q : rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n-s)P_n\right)$.
- W : rata-rata waktu tunggu dalam sistem antrian.
- W_q : rata-rata waktu tunggu dalam antrian.

Hubungan antara L, W, L_q, dan W_q yaitu diasumsikan λ_n adalah bernilai tetap sebesar λ untuk semua nilai n. Telah dibuktikan bahwa dalam proses antrian yang *steady-state*.

$$L = \lambda W.$$

Seperti yang sudah disebutkan oleh John D.C Little sebagai orang pertama yang membuktikannya. Persamaan tersebut sering disebut dengan formula *little*. Formula *little* berlaku juga untuk,

$$L_q = \lambda W_q.$$

Jika λ_n tidak sama dengan λ dalam persamaan dapat diganti dengan dengan λ_{eff} atau laju kedatangan efektif. Laju kedatangan efektif adalah jumlah dari perkalian laju kedatangan pelanggan pada keadaan tertentu dengan probabilitasnya. Misalkan diasumsikan rata-rata waktu pelayanan juga tetap, $1/\mu$ untuk semua $n \geq 1$, maka

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

Hubungan ukuran performansi ini sangat penting karena mampu menentukan secara langsung nilai dasar dari L, W, L_q, dan W_q secara analitis dalam suatu sistem antrian. Pada subbab selanjutnya akan dibahas tentang distribusi dalam proses antrian yang berfungsi untuk mengetahui distribusi laju kedatangan dan laju pelayanan yang terjadi pada model antrian.

2.2 Distribusi dalam Proses Antrian

Distribusi dalam proses antrian adalah peluang-peluang yang mungkin terjadi dalam proses antrian. Peluang-peluang tersebut menggambarkan laju kedatangan dan laju pelayanan pada suatu antrian. Distribusi dalam proses antrian juga dapat membantu untuk mengetahui model antrian dari suatu sistem antrian.

Terdapat berbagai macam distribusi dalam proses antrian, namun pada penelitian ini akan membahas model antrian Markovian. Model antrian Markovian adalah proses stokastik yang paling umum digunakan dalam masalah antrian, memiliki laju kedatangan berdistribusi Poisson, serta laju pelayanan berdistribusi Eksponensial. Pada bagian ini akan menjelaskan apa itu distribusi Poisson dan distribusi Eksponensial, karakteristik dari distribusi Poisson dan Eksponensial, serta akan dicari ekspektasi dan varians dari kedua distribusi tersebut.

2.2.1 Distribusi Poisson

Distribusi Poisson merupakan distribusi diskrit yang mempunyai variabel acak diskrit $(1, 2, 3, \ldots)$, yaitu banyaknya kejadian yang terjadi pada interval waktu tertentu. Distribusi Poisson disebut juga sebagai distribusi kedatangan dalam teori antrian. Distribusi Poisson memiliki karakteristik yaitu banyaknya kejadian yang satu tidak bergantung dengan banyaknya kejadian yang lainnya, peluang terjadinya kejadian pada interval waktu singkat sebanding dengan panjang interval waktu, dan peluang lebih dari satu kejadian pada waktu yang sangat singkat adalah mendekati nol atau dapat diabaikan.

Berdasarkan karakteristik tersebut, distribusi Poisson juga dapat mewakili distribusi kedatangan untuk contoh kasus yang diambil pada penelitian ini yaitu loket pelayanan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur. Kedatangan peserta BPJS tidak bergantung dengan kedatangan sebelumnya, semakin kecil interval waktu maka semakin kecil pula terdapat kedatangan peserta ke dalam sistem antrian, serta peluang terjadinya lebih dari satu peserta yang sudah memiliki karcis antrian tidak jadi masuk ke dalam pelayanan pada interval waktu yang sangat kecil mendekati nol.

Definisi 2.2.1. Suatu variabel acak diskrit X dikatakan memiliki distribusi Poisson dengan parameter $\lambda > 0$ jika mempunyai fungsi kepekatan peluang sebagai berikut:

$$P(X) = \frac{(\lambda)^x e^{-\lambda}}{x!}; \quad (x \geq 0).$$

Berdasarkan Definisi 2.2.1 didapat peluang distribusi Poisson dengan parameter λ yang memiliki jumlah kedatangan sebanyak x dan $P(X)$ adalah peluang terjadinya X kedatangan.

Fungsi kepekatan peluang distribusi Poisson dapat digunakan untuk menghitung ekspektasi atau rata-rata dari variabel acak. Variabel acak dalam sistem antrian menggambarkan jumlah kedatangan pelanggan dalam sistem. Jadi rata-rata jumlah kedatangan pelanggan dapat dihitung dengan nilai ekspektasi dari variabel acak distribusi Poisson.

Definisi 2.2.2. Ekspektasi dari suatu variabel acak diskrit X adalah sebagai berikut:

$$E(X) = \sum_{\text{semua } x} xP(X = x)$$

Distribusi Poisson merupakan variabel acak diskrit maka berdasarkan Definisi 2.2.2 ekspektasinya dihitung dengan menjumlahkan hasil kali dari semua nilai variabel acak dan peluangnya yang akan diuraikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} \end{aligned}$$

dengan menggunakan deret Mac Laurin didapat, $f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!}$ dapat ditulis menjadi $f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ maka $f(x) = e^{\lambda}$, sehingga

$$\begin{aligned} E(X) &= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas, ekspektasi dari distribusi Poisson adalah λ. Selanjutnya, akan dicari varians dari distribusi Poisson berdasarkan Definisi berikut.

Definisi 2.2.3. Misalkan X adalah variabel acak diskrit dengan fungsi peluang $P(X)$ dan nilai ekspektasi $E(X)$. Maka varians dari X, dinotasikan dengan $Var(X)$ adalah:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Distribusi Poisson mempunyai fungsi pembangkit momen yang bisa digunakan sebagai cara lain untuk mencari ekspektasi dan varians suatu distribusi. Oleh karena itu, akan dicari varians dari distribusi Poisson dengan menggunakan fungsi pembangkit momen sebagai berikut.

$$\begin{aligned} M(x) &= E(e^{kx}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k e^{kx}}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x\lambda)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^x} \\ &= e^{\lambda e^x - \lambda} \\ &= e^{\lambda(e^x-1)}. \end{aligned}$$

Turunan pertama dan kedua dari fungsi pembangkit momen distribusi Poisson adalah

$$M'(x) = \lambda e^x e^{\lambda(e^x-1)},$$

dan

$$\begin{aligned} M''(x) &= \lambda e^x e^{\lambda(e^x-1)} + \lambda e^x \lambda e^x e^{\lambda(e^x-1)} \\ &= \lambda e^x e^{\lambda(e^x-1)}(1 + \lambda e^x), \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$E(X) = M'(0) = \lambda e^x e^{\lambda(e^x - 1)} = \lambda.$$

$$E(X^2) = M''(0) = \lambda e^x e^{\lambda(e^x - 1)}(1 + \lambda e^x) = \lambda(1 + \lambda).$$

Maka, varians dari distribusi Poisson berdasarkan Definisi 2.2.3 dapat dicari sebagai berikut

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \lambda(1 + \lambda) - (\lambda)^2 \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Parameter λ pada distribusi Poisson merupakan laju kedatangan pelanggan ke dalam sistem antrian. Laju kedatangan tersebut digunakan untuk menghitung probabilitas *steady state* dan ukuran performansi dari sistem antrian.

2.2.2 Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial merupakan distribusi kontinu yang mempunyai variabel acak kontinu berupa interval yaitu banyak kejadian yang ada dalam sebuah interval waktu tertentu. Distribusi Eksponensial disebut juga sebagai distribusi pelayanan pada suatu fasilitas jasa atau *server*. Distribusi Eksponensial memiliki karakteristik yaitu waktu pelayanan diasumsikan bersifat bebas, artinya waktu untuk melayani pelanggan yang baru datang tidak bergantung pada lama waktu yang telah dihabiskan untuk melayani pelanggan sebelumnya, dan tidak bergantung pada jumlah pelanggan yang menunggu untuk dilayani.

Berdasarkan karakteristik tersebut, distribusi Eksponensial juga dapat mewakili distribusi pelayanan untuk contoh kasus yang diambil pada penelitian ini yaitu loket pelayanan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur. Waktu untuk melayani peserta BPJS yang baru datang tidak bergantung pada lama waktu yang telah dihabiskan untuk melayani peserta sebelumnya, dan tidak bergantung pada jumlah peserta yang menunggu untuk dilayani.

Definisi 2.2.4. Misalkan T adalah variabel acak waktu pelayanan berdistribusi kontinu. Variabel acak ini mempunyai distribusi Eksponensial dengan parameter λ dengan fungsi kepadatan peluangnya adalah

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0. \end{cases}$$

Dalam kasus ini fungsi kumulatif untuk $T \geq 0$ adalah

$$F(t) = P\{T \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = P\{T > t\} = e^{-\lambda t}.$$

dan 0 untuk nilai t lainnya, maka T disebut berdistribusi Eksponensial dengan parameter λ.

Fungsi kepadatan peluang dapat digunakan untuk menghitung nilai dari ekspektasi dari variabel acak T. Variabel acak T dalam sistem antrian menggambarkan laju pelayanan pelanggan dalam sistem.

Definisi 2.2.5. Ekspektasi dari suatu variabel acak kontinu T adalah sebagai berikut:

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt$$

Distribusi Eksponensial merupakan variabel acak kontinu. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2.2.5 ekspektasinya dapat dicari dengan menghitung integral dari perkalian nilai variabel acak dengan nilai fungsinya untuk semua nilai T yang akan diuraikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
E(T) &= \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} \frac{1}{\lambda} d(\lambda t) \\
&= \frac{1}{\lambda}(-t\lambda e^{-\lambda t}|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-\lambda t} d(\lambda t))) \\
&= \frac{1}{\lambda}(0 - e^{-\lambda t}|_0^\infty) \\
&= \frac{1}{\lambda}(0 - 0 + 1) \\
&= \frac{1}{\lambda} \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas, ekspektasi dari distribusi Eksponensial adalah μ. Selanjutnya, akan dicari varians dari distribusi Eksponensial berdasarkan definisi sebagai berikut.

Definisi 2.2.6. Misalkan T adalah variabel acak kontinu dengan fungsi kepadatan peluang $f(t)$ dan nilai ekspektasi $E(T)$. Maka varians dari T, dinotasikan dengan $Var(T)$ adalah:

$$Var(T) = E(T^2) - (E(T))^2.$$

Berdasarkan Definisi 2.2.6 dapat dicari nilai $E(T^2)$ terlebih dahulu,

$$\begin{aligned}
E(T^2) &= \int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} t^2\lambda^2 e^{-\lambda t} \frac{1}{\lambda} d(\lambda t) \\
&= \frac{1}{\lambda^2}(-(t\lambda^2)e^{-\lambda t}|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-\lambda t} 2(\lambda t) d(\lambda t))) \\
&= \frac{1}{\lambda^2}(0 - 2t\lambda e^{-\lambda t}|_0^\infty - \int_0^\infty 2e^{-\lambda t} d(\lambda t)) \\
&= \frac{1}{\lambda^2}(0 - 0 + 2e^{-\lambda t}|_0^\infty) \\
&= \frac{1}{\lambda^2}(0 - 0 - 0 + 2) \\
&= \frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Maka diperoleh nilai variansi sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
Var(T) &= E(T^2) - (E(T))^2 \\
&= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \\
&= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \mu^2.
\end{aligned}
$$

Parameter μ pada distribusi Eksponensial merupakan laju pelayanan pelanggan dalam sistem antrian. Laju pelayanan digunakan untuk menghitung probabilitas *steady state* dan ukuran performansi dari sistem antrian.

Selanjutnya akan dibahas mengenai rantai Markov waktu kontinu yang akan digunakan sebagai penghatar dari karakteristik model antrian yang memiliki, laju kedatangan (definisi M yang pertama) dan laju pelayanan (definisi M yang kedua) pada model antrian M/M/s/K.

2.3 Rantai Markov Waktu Kontinu

Rantai Markov pertama kali dikenalkan oleh Andrey A. Markov, ahli matematika dari Rusia yang lahir tahun 1856. Analisis rantai Markov adalah suatu teknik probabilitas yang menganalisis pergerakan probabilitas dari satu kondisi ke kondisi lainnya. Berikut akan diberikan definisi proses stokastik waktu kontinu yang mempunyai sifat Markovian.

Definisi 2.3.1. Proses stokastik waktu kontinu mempunyai sifat Markovian jika $P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i, X(r) = x(r)\} = P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\}$. Untuk semua $s, t \geq 0$ lalu $i, j, X(r) \geq 0$, dan $0 \leq r \leq s$.

Berdasarkan Definisi 2.3.1 proses stokastik dikatakan termasuk rantai Markov apabila memenuhi sifat Markov yaitu *memoryless* atau probabilitas bersyarat dari sebuah kejadian waktu X variabel acak yang akan datang $X(s+t)$, dengan diketahui waktu lampau $X(r)$ dan waktu masa kini $X(s)$, tidak bergantung pada kejadian di waktu lampau dan hanya bergantung oleh waktu masa kini.

Definisi 2.3.2. Diketahui $P\{X(t+s) = j|X(s) = i\}$ adalah probabilitas transisi. Jika probabilitas transisi independen terhadap s, maka $P\{X(t+s) = j|X(s) = i\} = P\{X(t) = j|X(0) = i\}$ untuk semua $s > 0$ dan probabilitas transisi rantai Markov waktu kontinu ini disebut probabilitas transisi stasioner (probabilitas transisi yang homogen). Secara sederhana probabilitas transisi stasioner dapat ditulis:

$$P_{ij}(t) = P\{X(t) = j|X(0) = i\},$$

dengan $P_{ij}(t)$ disebut fungsi probabilitas transisi waktu kontinu.

Berdasarkan Definisi 2.3.2 proses stokastik waktu kontinu adalah rantai Markov waktu kontinu jika mempunyai sifat Markovian. Sifat dari rantai Markov waktu kontinu adalah memiliki jumlah *state* yang terbatas dan probabilitas transisi stasioner.

Rantai Markov waktu kontinu memiliki probabilitas *steady state* yaitu untuk menunjukkan kondisi atau keadaan stabil yang terdapat pada model antrian.

2.3.1 Probabilitas *Steady State*

Kondisi *steady state* yaitu keadaan sistem yang tidak tergantung pada keadaan awal maupun waktu yang telah dilalui. Jika suatu sistem antrian telah mencapai kondisi *steady state* maka peluang terdapat n *customer* dalam sistem pada waktu $t(P_n(t))$ tidak tergantung pada waktu.

Probabilitas *steady state* untuk setiap *state* i dan j dalam waktu $t+s$ serta $0 \leq s \leq t$ adalah,

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(t+s) &\equiv P\{X(t+s)=j|X(0)=i\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t+s)=j, X(t)=k|X(0)=i\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t+s)=j|X(t)=k, X(0)=i\} \cdot P\{X(t)=k|X(0)=i\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t+s)=j|X(t)=k\} \cdot P\{X(t)=k|X(0)=i\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj}(s)P_{ik}(t).
\end{aligned}
$$

Maka,

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj}(s)P_{ik}(t),$$

merupakan persamaan Chapman-Kolmogorov untuk probabilitas transisi waktu kontinu yang harus memenuhi persamaan tersebut.

Probabilitas rantai Markov waktu kontinu akan berada dalam *state* j pada waktu t konvergen ke suatu limit yang tidak bergantung pada keadaan awal. Artinya, nilai P_{ij} bisa dituliskan

$$P_j = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t),$$

dimana asumsi nilai limit selalu ada dan tidak bergantung pada keadaan di *state* i.

Sedangkan untuk mendapatkan persamaan P_j dan mencari probabilitas *steady state* untuk proses kelahiran kematian memakai persamaan *Forward* Kolmogorov yang persamaannya dapat diturunkan berdasarkan persamaan Chapman-Kolmogorov,

$$\begin{aligned}
P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(h) - P_{ij}(t) \\
&= \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)P_{kj}(h) - [1 - P_{jj}(h)]P_{ij}(t) \\
\lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left\{ \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)\frac{P_{kj}(h)}{h} - \left[\frac{1 - P_{jj}(h)}{h}\right] P_{ij}(t) \right\}
\end{aligned}$$

dan, berdasarkan Lemma 6.1 (lihat buku Sheldon M. Ross)

$$\lim_{h\to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = v_i$$

dan

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = q_{ij} \quad \textit{untuk } i \neq j.$$

Maka persamaan *forward* Kolmogorov menjadi,

$$P'_{ij} = \sum_{k\neq j} q_{kj}P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t).$$

Sekarang, jika diberikan t mendekati tak hingga, maka asumsikan bahwa persamaan *forward* Kolmogorov menjadi,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} P'_{ij}(t) &= \lim_{t\to\infty} \left[\sum_{k\neq j} q_{kj}P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t) \right] \\
&= \sum_{k\neq j} q_{kj}P_k - v_j P_j
\end{aligned}$$

Nilai $P_{ij}(t)$ adalah suatu peluang yang nilainya selalu berada diantara 0 dan 1, ini juga berarti bahwa jika nilai $P'_{ij}(t)$ konvergen, maka harus konvergen ke 0. Hal ini dijelaskan pada definisi kekonvergenan dalam peluang yang bisa dilihat pada definisi berikut.

Definisi 2.3.3. (Kekonvergenan dalam peluang)

Misalkan $X_1, X_2, X_3, \ldots, X$ adalah barisan variabel acak pada suatu ruang peluang. Barisan variabel acak X_n dikatakan konvergen dalam peluang ke X, dinotasikan $X_n \to X$, jika untuk setiap $\epsilon > 0$ berlaku $P(|X_n - X| > \epsilon) \to 0$, untuk $n \to \infty$.

Jadi, berdasarkan persamaan *forward* Kolmogorov dan Definisi 2.3.3, persamaan *steady state* secara umum untuk memecahkan probabilitas *steady state* adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k - v_j P_j \\ v_j P_j &= \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k \end{aligned}$$

Untuk semua j dan $\sum_j P_j = 1$ bisa digunakan untuk mencari solusi dari *limiting* probabilitas.

Persamaan sebelah kiri yaitu persamaan $v_j q_j$ adalah laju pada saat proses meninggalkan *state* j, karena P_j adalah probabilitas (*steady state*) bahwa proses yang berada di *state* j dan v_j adalah laju transisi keluar dari *state* j dengan diketahui bahwa proses masih berada di *state* j. Persamaan sebelah kanan untuk $q_{kj} P_k$ adalah laju saat proses memasuki *state* j dari *state* k, karena q_{kj} adalah laju transisi dari *state* k ke *state* j dengan diketahui bahwa proses berada di *state* k. Dengan menjumlahkan semua $i \neq j$, seluruh sisi kanan persamaan menyatakan laju saat proses memasuki *state* j dari *state* lain. Keseluruhan persamaan menyatakan bahwa laju saat proses meninggalkan *state* j harus menyamai laju saat proses memasuki *state* j.

Persamaan tersebut bisa disebut sebagai persamaan keseimbangan yang dapat digunakan untuk mencari persamaan peluang suatu kondisi pada proses kelahiran dan kematian.

2.3.2 Proses Kelahiran dan Kematian

Model antrian mengasumsikan bahwa *input* (kedatangan pelanggan) dan *output* (kepergian pelanggan) dari sistem antrian terjadi sesuai dengan proses kelahiran dan kematian. Proses ini penting untuk mencari probabilitas *steady state*. Namun, dalam konteks teori antrian, istilah kelahiran setara dengan kedatangan pelanggan baru ke dalam sistem antrian, dan kematian setara dengan kepergian pelanggan yang telah selesai dilayani.

State sistem pada waktu t ($t \geq 0$), dinotasikan dengan *N(t)*, yaitu jumlah pelanggan dalam sistem antrian pada waktu t. Proses kelahiran dan kematian menjelaskan tentang *N (t)* berubah menurut perubahan waktu. Secara garis besar, dinyatakan bahwa kelahiran dan kematian terjadi secara acak, di mana tingkat kejadian rata-rata mereka hanya bergantung pada keadaan saat ini dari suatu sistem. Terdapat asumsi proses kelahiran dan kematian adalah sebagai berikut:

- **Asumsi 1**: Diberikan *N(t)* $= n$, distribusi probabilitas dari waktu yang tersisa sampai pada kelahiran berikutnya (kedatangan) adalah distribusi Poisson dengan parameter λ_n $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$.

- **Asumsi 2**: Diberikan *N(t)* $= n$, distribusi probabilitas dari waktu yang tersisa sampai pada kematian berikutnya (selesai pelayanan) adalah distribusi Eksponensial dengan parameter μ_n $(n = 1, 2, 3, ...)$.

- **Asumsi 3**: Variabel acak pada asumsi 1 (waktu yang tersisa sampai berikutnya lahir) dan variabel acak pada asumsi 2 (waktu tersisa sampai kematian berikutnya) yang saling independen. Transisi berikutnya dalam *state* dari proses ini antara $n \rightarrow n+1$ (satu kelahiran) atau $n \rightarrow n-1$ (satu kematian) tergantung variabel acak mana yang lebih kecil.

Proses kelahiran dan kematian adalah kasus khusus dari rantai Markov dengan waktu kontinu. Model antrian yang direpresentasikan dengan rantai Markov lebih mudah dianalisis daripada model lain. Prinsip persamaan keseimbangan untuk proses kelahiran dan kematian ditunjukkan pada Tabel 2.2 sebagai berikut, Tabel 2.2: Persamaan Keseimbangan

State	**Laju Masuk = Laju Keluar**
0	$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1) P_1$
2	$\lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3 = (\lambda_2 + \mu_2) P_2$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$\lambda_{n-2} P_{n-2} + \mu_n P_n = (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) P_{n-1}$
n	$\lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) P_n$
$\vdots$	$\vdots$

Hasil dari proses kelahiran dan kematian menggunakan prosedur di atas adalah sebagai berikut.

Untuk *state* $= 0$

$$\begin{aligned}
\mu_1 P_1 &= \lambda_0 P_0 \\
P_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0.
\end{aligned}$$

Untuk *state* $= 1$

$$\begin{aligned}
\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 &= (\lambda_1 + \mu_1) P_1 \\
\mu_2 P_2 &= (\lambda_1 + \mu_1) P_1 - \lambda_0 P_0 \\
P_2 &= \frac{(\lambda_1 + \mu_1) P_1}{\mu_2} - \frac{\lambda_0 P_0}{\mu_2} \\
P_2 &= \left(\frac{\lambda_1 P_1 + \mu_1 P_1}{\mu_2} \right) - \frac{\lambda_0 P_0}{\mu_2} \\
P_2 &= \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 + \frac{1}{\mu_2} (\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0) \\
P_2 &= \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 + \frac{1}{\mu_2} (\lambda_0 P_0 - \lambda_0 P_0) \\
P_2 &= \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 + \frac{1}{\mu_2} (0) \\
P_2 &= \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 \\
P_2 &= \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0.
\end{aligned}$$

Untuk *state* $= 2$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3 &= (\lambda_2 + \mu_2) P_2 \\
\mu_3 P_3 &= (\lambda_2 + \mu_2) P_2 - \lambda_1 P_1 \\
P_3 &= \frac{(\lambda_2 + \mu_2) P_2}{\mu_3} - \frac{\lambda_1 P_1}{\mu_3} \\
P_3 &= \left(\frac{\lambda_2 P_2 + \mu_2 P_2}{\mu_3} \right) - \frac{\lambda_1 P_1}{\mu_3} \\
P_3 &= \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 + \frac{1}{\mu_3} (\mu_2 P_2 - \lambda_1 P_1) \\
P_3 &= \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 + \frac{1}{\mu_3} (\lambda_1 P_1 - \lambda_1 P_1) \\
P_3 &= \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 + \frac{1}{\mu_3} (0) \\
P_3 &= \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 \\
P_3 &= \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0.
\end{aligned}$$

Jadi, untuk *state* $= n - 1$ didapat

$$\begin{aligned}
\lambda_{n-2} P_{n-2} + \mu_n P_n &= (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) P_{n-1} \\
\mu_n P_n &= (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) P_{n-1} - \lambda_{n-2} P_{n-2} \\
P_n &= \frac{(\lambda_{n-1} + \mu_{n-1})}{\mu_n} P_{n-1} - \frac{\lambda_{n-2} P_{n-2}}{\mu_n} \\
P_n &= \left(\frac{\lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n-1} P_{n-1}}{\mu_n} \right) - \frac{\lambda_{n-2} P_{n-2}}{\mu_n} \\
P_n &= \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} + \frac{1}{\mu_n} (\mu_{n-1} P_{n-1} - \lambda_{n-2} P_{n-2}) \\
P_n &= \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} + \frac{1}{\mu_n} (\lambda_{n-2} P_{n-2} - \lambda_{n-2} P_{n-2}) \\
P_n &= \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} + \frac{1}{\mu_n} (0) \\
P_n &= \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} \\
P_n &= \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \ldots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_1} P_0.
\end{aligned}$$

Proses kelahiran dan kematian di atas berlaku untuk $n = 0, 1, 2, ...$ untuk mendapatkan nilai probabilitas dari suatu *state*. Untuk menyederhanakan notasi, dapat dimisalkan

$$C_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_1}$$

jadi probabilitas *steady state* untuk $n = 0, 1, 2, ...$ adalah,

$$P_n = C_n P_0. \tag{2.1}$$

Terdapat syarat dalam model antrian M/M/s adalah,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

maka dari Persamaan (2.1) mengakibatkan bahwa

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n\right) P_0 = 1$$

sehingga,

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n\right)^{-1}. \tag{2.2}$$

Ketika model antrian dibuat berdasarkan proses kelahiran dan kematian, sehingga *state* sistem n menyatakan terdapat n pelanggan dalam sistem antrian, ukuran performansi untuk sistem antrian (L, W, L_q, dan W_q) dapat diperoleh secara langsung setelah menentukan P_n dari Persamaan (2.1). Seperti yang sudah dijelaskan dalam subbab ukuran performansi, L dan L_q adalah

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n.$$

$$L_q = \sum_{n=0}^{\infty} (n-s)P_n.$$

Sedangkan untuk W dan W_q adalah

$$W = \frac{L}{\lambda_{eff}}.$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}}.$$

dengan λ_{eff} atau laju kedatangan efektif adalah rata-rata kedatangan pada waktu yang lama atau jumlah dari perkalian laju kedatangan pelanggan pada keadaan tertentu dengan probabilitasnya. Oleh karena λ_n adalah laju kedatangan rata-rata saat sistem berada dalam status n $(n = 0, 1, 2, ...)$ dan P_n adalah proporsi waktu sistem berada dalam kedaan ini maka

$$\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n. \tag{2.3}$$

Selanjut akan dibahas tentang formula *Little* yang berkaitan dengan persamaan ukuran performansi yang telah dibahas.

2.4 Formula *Little*

Formula *little* merupakan formula yang menjelaskan hubungan antara rata-rata jumlah pelanggan (L_s dan L_q) dan rata-rata waktu menunggu (W_s dan W_q). Formula *little* tidak tergantung pada distribusi kedatangan, distribusi pelayanan, jumlah server, dan disiplin antrian. Formula *little* adalah sebagai berikut:

$$L_s = \lambda W_s \tag{2.4}$$

dan

$$L_q = \lambda W_q. \tag{2.5}$$

Persamaan (2.4) dan (2.5) berlaku jika nilai rata-rata λ, L, dan W memiliki suatu nilai. Dengan ketentuan λ adalah laju pelanggan yang akan datang dalam suatu interval waktu, L_s adalah rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem antrian, L_q adalah rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian, W_s adalah rata-rata waktu tunggu dalam sistem antrian, dan W_q adalah rata-rata waktu tunggu dalam antrian.

Formula *little* berlaku untuk sistem antrian yang di dalamnya terdapat antrian dan pelayanan pelanggan, dengan tingkat kedatangan pelanggan kurang dari tingkat kepergian pelanggan, seperti pada asumsi kasus untuk model antrian M/M/s/K.

2.5 Model Antrian

Model antrian adalah suatu model yang digunakan untuk mempresentasikan berbagai macam sistem antrian (sistem yang mengandung suatu jenis antrian) yang ada dalam kehidupan sehari-hari. Rumus-rumus (formulasi) untuk setiap model antrian menunjukkan bagaimana performansi atau kinerja dari sistem antrian yang berhubungan, termasuk panjang antrian, waktu tunggu yang akan terjadi dengan beberapa batasan variasi yang mungkin terjadi. Model antrian sangat berguna untuk menentukan bagaimana mengoperasikan sistem antrian yang efektif.

Model antrian yang dibahas dalam penulisan ini adalah model antiran M/M/s. Model antrian M/M/s secara matematis menjelaskan bahwa M yang pertama menyatakan pola kedatangan bersifat mengikuti proses Markov sehingga memiliki distribusi waktu antar kedatangan Poisson, M yang kedua menyatakan pola pelayanan bersifat mengikuti proses Markov sehingga memiliki distribusi waktu pelayanan Eksponensial, dan s merupakan banyaknya pelayanan. Hubungan model antrian M/M/s dengan M/M/s/K adalah model antrian M/M/s/K merupakan kasus khusus dari model antrian M/M/s.

2.5.1 Model Antrian M/M/s

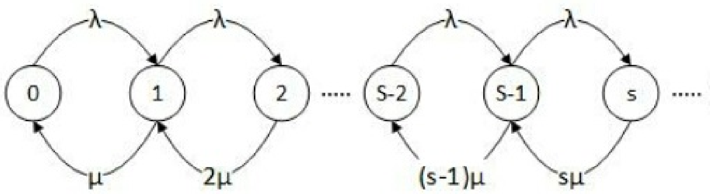
Model antrian M/M/s mengasumsikan bahwa semua waktu antar kedatangan terdistribusi secara independen dan identik menurut disribusi Eksponensial (proses kedatangannya adalah Poisson), semua waktu pelayanan terdistibusi secara indepenen dan identik menurut distribusi Eksponensial lainnya, jumlah pelayanan lebih dari satu (s), kapasitas dan ukuran sistem takhingga, struktur antrian *multi channel single phase*, serta disiplin pelayanan FCFS. Model ini adalah kasus khusus proses kelahiran dan kematian dengan laju kedatangan rata-rata dan laju pelayanan rata-rata setiap pelayan sibuk dalam sistem antrian adalah tetap (masing-masing λ dan μ) tanpa tergantung *state* sistem. Saat sistem hanya memiliki satu pelayan ($s = 1$), akibatnya adalah parameter untuk proses kelahiran dan kematian adalah $\lambda_n = \lambda$ untuk $(n = 0, 1, 2, ...)$ dan $\mu_n = \mu$ untuk $(n = 0, 1, 2, ...)$.

Jika sistem mempunyai banyak pelayanan ($s > 1$), μ_n maka μ adalah laju rata-rata pelayanan sibuk, $n\mu$ adalah laju rata-rata untuk n pelayanan sibuk. Dengan demikian, $\mu_n = n\mu$ untuk $n \leq s$, dan $\mu_n = s\mu$ untuk $n \geq s$ karena seluruh s pelayanan sibuk. Ketika $s\mu$ melebihi laju kedatangan rata-rata λ, yaitu saat:

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1. \tag{2.6}$$

Maka sistem antrian yang sesuai dengan model ini dapat menjadi kondisi *steady state*. Kondisi *steady state* dapat diukur dengan Persamaan (2.6), kondisi *steady-state* dapat terpenuhi apabila $\rho < 1$ yang berarti bahwa $\lambda < \mu$. Sedangkan jika $\rho > 1$ maka kedatangan terjadi dengan kelajuan yang lebih cepat daripada yang dapat ditampung oleh pelayan, keadaan yang sama berlaku apabila $\rho = 1$.

Kondisi *steady state* untuk kasus dengan lebih dari satu pelayanan (M/M/s) dapat dicari dengan menggunakan proses umum laju kelahiran dan kematian yang ilustrasinya dapat dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3: Laju Proses Kelahiran dan Kematian Model Antrian M/M/s

Berdasarkan Gambar 2.3 laju proses kelahiran dan kematian dalam proses antrian dapat dikatakan sebagai laju masuk dan laju keluar yang prosesnya dalam suatu *state* dapat diuraikan sebagai berikut.

State	**Laju Masuk = Laju Keluar**
0	$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + 2\mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1)P_1$
2	$\lambda_1 P_1 + 3\mu_3 P_3 = (\lambda_2 + 2\mu_2)P_2$
$\vdots$	$\vdots$
$s-2$	$\lambda_{s-3}P_{s-3} + (s-1)\mu_{s-1}P_{s-1} = (\lambda_{s-2} + (s-2)\mu_{s-2})P_{s-2}$
$s-1$	$\lambda_{s-2}P_{s-2} + (s)\mu_s P_s = (\lambda_{s-1} + (s-1)\mu_{s-1})P_{s-1}$
s	$\lambda_{s-1}P_{s-1} + (s)\mu_s P_s = (\lambda_s + (s)\mu_s)P_s$

Hasil dari laju proses kelahiran dan kematian berdasarkan prosedur di atas adalah sebagai berikut.

Untuk *state* = 0

$$\begin{aligned} 1\mu P_1 &= \lambda P_0 \\ P_1 &= \frac{\lambda}{1\mu} P_0 \end{aligned}$$

Untuk *state* = 1

$$\begin{aligned} \lambda P_0 + 2\mu P_2 &= (\lambda + \mu)P_1 \\ 2\mu P_2 &= (\lambda + \mu)P_1 - \lambda P_0 \\ P_2 &= \frac{(\lambda + \mu)P_1}{2\mu} - \frac{\lambda P_0}{2\mu} \\ P_2 &= \left(\frac{\lambda P_1 + \mu P_1}{2\mu}\right) - \frac{\lambda P_0}{2\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= \frac{\lambda}{2\mu}P_1 + \frac{1}{2\mu}(\mu P_1 - \lambda P_0) \\
P_2 &= \frac{\lambda}{2\mu}P_1 + \frac{1}{2\mu}(\lambda P_0 - \lambda P_0) \\
P_2 &= \frac{\lambda}{2\mu}P_1 + \frac{1}{2\mu}(0) \\
P_2 &= \frac{\lambda}{2\mu}P_1 \\
P_2 &= \frac{\lambda^2}{2\mu^2}P_0.
\end{aligned}$$

Untuk *state* $= 2$

$$\begin{aligned}
\lambda P_1 + 3\mu P_3 &= (\lambda+\mu)P_2 \\
3\mu P_3 &= (\lambda+\mu)P_2 - \lambda P_1 \\
P_3 &= \frac{(\lambda+\mu)P_2}{3\mu} - \frac{\lambda P_1}{3\mu} \\
P_3 &= \left(\frac{\lambda P_2 + \mu P_2}{3\mu}\right) - \frac{\lambda P_1}{3\mu} \\
P_3 &= \frac{\lambda}{3\mu}P_2 + \frac{1}{3\mu}(\mu P_2 - \lambda P_1) \\
P_3 &= \frac{\lambda}{3\mu}P_2 + \frac{1}{3\mu}(\lambda P_1 - \lambda P_1) \\
P_3 &= \frac{\lambda}{3\mu}P_2 + \frac{1}{3\mu}(0) \\
P_3 &= \frac{\lambda}{3\mu}P_2 \\
P_3 &= \frac{\lambda^3}{6\mu^3}P_0.
\end{aligned}$$

Untuk *state* $= n-1$ didapat

$$\begin{aligned}
\lambda P_{n-2} + n\mu P_n &= (\lambda + (n-1)\mu)P_{n-1} \\
n\mu P_n &= (\lambda + (n-1)\mu)P_{n-1} - \lambda P_{n-2} \\
P_n &= \frac{(\lambda + (n-1)\mu)}{n\mu}P_{n-1} - \frac{\lambda P_{n-2}}{n\mu} \\
P_n &= \left(\frac{\lambda P_{n-1} + (n-1)\mu P_{n-1}}{n\mu}\right) - \frac{\lambda P_{n-2}}{n\mu} \\
P_n &= \frac{\lambda}{n\mu}P_{n-1} + \frac{1}{n\mu}((n-1)\mu P_{n-1} - \lambda P_{n-2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{\lambda}{n\mu}P_{n-1} + \frac{1}{n\mu}(\lambda P_{n-2} - \lambda P_{n-2}) \\
P_n &= \frac{\lambda}{n\mu}P_{n-1} + \frac{1}{n\mu}(0) \\
P_n &= \frac{\lambda}{n\mu}P_{n-1} \\
P_n &= \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}P_0. \quad (n \leq s)
\end{aligned}$$

Untuk $state = n$ didapat

$$\begin{aligned}
\lambda P_{n-1} + s\mu P_{n+1} &= (\lambda + s\mu)P_n \\
s\mu P_{n+1} &= (\lambda + s\mu)P_n - \lambda P_{n-1} \\
P_{n+1} &= \frac{(\lambda + s\mu)}{s\mu}P_n - \frac{\lambda P_{n-1}}{s\mu} \\
P_{n+1} &= \left(\frac{\lambda P_n + s\mu P_n}{s\mu}\right) - \frac{\lambda P_{n-1}}{s\mu} \\
P_{n+1} &= \frac{\lambda}{s\mu}P_n + \frac{1}{s\mu}(s\mu P_n - \lambda P_{n-1}) \\
P_{n+1} &= \frac{\lambda}{s\mu}P_n + \frac{1}{s\mu}(\lambda P_{n-1} - \lambda P_{n-1}) \\
P_{n+1} &= \frac{\lambda}{s\mu}P_n + \frac{1}{s\mu}(0) \\
P_{n+1} &= \frac{\lambda}{s\mu}P_n \\
P_{n+1} &= \frac{\lambda}{s\mu}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}P_0.
\end{aligned}$$

Jadi untuk $n \geq s$ didapat,

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}(\frac{\lambda}{s\mu})^{n-s}P_0 = \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}}P_0.$$

Dari hasil tersebut maka didapat beberapa kondisi untuk P_n menjadi,

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}P_0 & ;\text{untuk } 0 \leq n \leq s \\ \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}(\frac{\lambda}{s\mu})^{n-s}P_0 = \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}}P_0 & ;\text{untuk } n \geq s. \end{cases}$$

Karena laju kelahiran dan kematian model antrian M/M/s mempunyai syarat $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ maka,

$$\begin{aligned}
P_0 + P_1 + ... + P_s + P_{s+1} + ... + P_n + P_{n+1} + ... &= 1 \\
P_0 + \frac{\lambda}{s\mu} P_0 + ... + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 + ... + \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} P_0 + ... &= 1 \\
P_0 \left[1 + \frac{\lambda}{s\mu} + ... + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + ... + \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} + ... \right] &= 1 \\
P_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \sum_{n=s}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} \right] &= 1.
\end{aligned}$$

Kondisi *steady state* untuk M/M/s terpenuhi jika $\lambda < s\mu$ (sehingga $\rho = \lambda/(s\mu) < 1$) maka berdasarkan Persamaan (2.2),

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{\left[1 + \sum_{n=1}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \sum_{n=s}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} \right]} \\
&= \frac{1}{\left[1 + \sum_{n=1}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{(s\mu)}} \right]}.
\end{aligned}$$

Jadi, jika $0 \leq n \leq s$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n! \left[1 + \sum_{n=1}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{(s\mu)}} \right]}.$$

Sedangkan, jika $n \geq s$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s} \left[1 + \sum_{n=1}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{(s\mu)}} \right]}.$$

Sehingga ukuran performansi untuk model antrian M/M/s adalah sebagai berikut:

- Rata-rata Panjang Antrian Pelanggan dalam Antrian

$$\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=s}^{\infty} (n - s) P_n \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} j P_{s+j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_q &= \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho^j P_0 \\
&= P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho}(\rho^j) \\
&= P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \right) \\
&= P_0 \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \\
&= \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2}.
\end{aligned}$$

- Rata-rata Waktu Tunggu dalam Antrian

$$\begin{aligned}
W_q &= \frac{L_q}{\lambda} \\
&= \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{\lambda s!(1-\rho)^2}.
\end{aligned}$$

- Rata-rata Waktu Tunggu dalam Sistem Antrian

$$\begin{aligned}
W &= W_q + \frac{1}{\mu} \\
&= \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{\lambda s!(1-\rho)^2} + \frac{1}{\mu}.
\end{aligned}$$

- Rata-rata Panjang Antrian Pelanggan dalam Sistem Antrian

$$\begin{aligned}
L &= L_q + \frac{\lambda}{\mu} \\
&= \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibahas salah satu model antrian khusus dari model antrian M/M/s yaitu model antrian M/M/s dengan pembatasan jumlah pelanggan.

2.5.2 Model Antrian M/M/s dengan Pembatasan

Model antrian pada subbab sebelumnya adalah sistem antrian yang mempunyai antrian tidak berhingga (tidak dibatasi). Namun, dalam beberapa kasus sistem antrian mempunyai antrian yang berhingga (dibatasi), artinya jumlah pelanggan dalam sistem tidak diizinkan melebihi batas tertentu (yang dilambangkan K) sehingga kapasitas antrian adalah K-s artinya kapasitas hanya dapat menampung banyaknya pelanggan berjumlah K dikurangi pelanggan yang sedang dilayani sebanyak *server* dengan kondisi semua *server* sedang melakukan pelayanan. Setiap pelanggan yang datang saat antrian penuh tidak dapat memasuki sistem sehingga pelanggan meninggalkan antrian untuk selamanya. Dari sudut pandang proses kelahiran dan kematian, laju rata-rata masukan ke dalam sistem menjadi nol. Oleh karena itu, satu modifikasi yang diperlukan untuk model M/M/s untuk mempertimbangkan antrian berhingga adalah dengan mengubah parameter λ_n menjadi

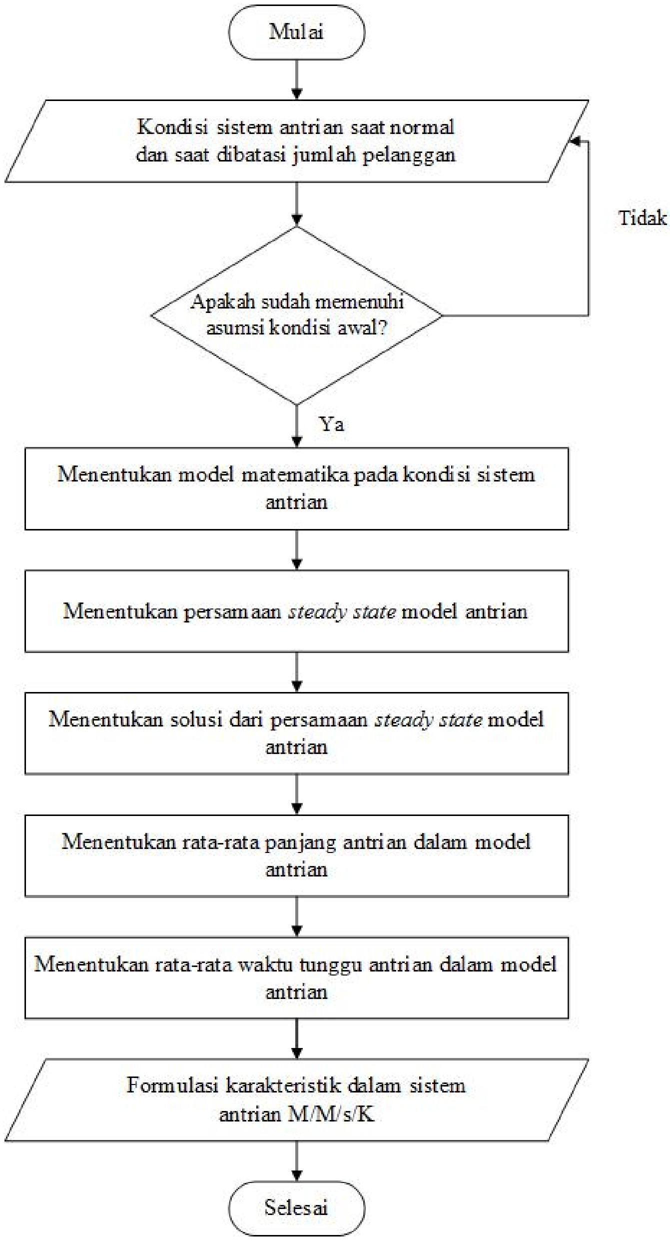
$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ;\text{untuk } n = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ K-1 \\ 0 & ;\text{untuk } n \geq K. \end{cases}$$

Oleh karena $\lambda_n = 0$ untuk beberapa nilai n, sistem antrian yang sesuai dengan model ini selalu dapat mencapai kondisi *steady state* meskipun pada keadaan $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} \geq 1$ karena kapasitas sistem telah dibatasi.

Model antrian ini biasa diberi label M/M/s/K dengan simbol keempat yang membedakannya dari model antrian M/M/s. Perbedaan kedua model tersebut hanyalah K bernilai berhingga untuk model antrian M/M/s/K dan K bernilai tak berhingga untuk model antrian M/M/s.

Model antrian M/M/s/K diartikan sebagai model antrian yang memiliki ruang tunggu terbatas, dengan M yang pertama dan kedua mendefinisikan sebagai proses peluang perpindahan berdasarkan rantai Markov dengan distribusi waktu antar kedatangan yaitu distribusi Poisson dan distribusi waktu pelayanan yaitu distribusi Eksponensial, s didefinisikan sebagai jumlah fasilitas pelayanan lebih dari satu, serta K didefinisikan sebagai jumlah kapasitas pelanggan yang terdapat pada sistem antrian.

2.6 Diagram Alir



Gambar 2.4: Diagram Alir Penyelesaian Masalah

Berdasarkan Gambar 2.4, diagram alir penyelesaian masalah dapat dijelaskan alur penelitiannya adalah sebagai berikut:

1. Menentukan model matematika pada kondisi sistem antrian yang terbagi atas kondisi normal dan saat dibatasi pelanggan. Model yang dibentuk

adalah model pada probabilitas tiap-tiap kemungkinan kondisi yang terjadi pada sistem.

2. Menentukan apakah model matematika tersebut sudah sesuai dengan kondisi asumsi awal. Jika belum, maka kembali ke langkah awal.

3. Menentukan model matematika untuk model antiran yang sesuai dalam kondisi tersebut.

4. Menentukan persamaan *steady state* model antrian beserta. Hal ini dilakukan untuk mendapatkan fungsi probabilitas yang diperoleh melalui penyusunan persamaan probabilitas *steady state.*

5. Menyelesaikan persamaan *steady state* dengan konsep probabilitas dan aljabar serta persamaan differensial.

6. Menentukan rata-rata panjang antrian pelanggan dalam sistem antrian dengan menggunakan konsep differensial.

7. Menentukan rata-rata waktu tunggu pelanggan melalui formula *Little.*

8. Diperoleh formulasi karakteristik model antrian M/M/s/K yang dapat diaplikasikan pada suatu kasus model antrian.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab pembahasan akan dibahas mengenai rumusan masalah, pembahasan yang pertama dimulai dari penjelasan model antrian M/M/s/K, formulasi probabilitas *steady state* untuk mengetahui probabilitas jumlah pelanggan, ukuran performansi model antrian M/M/s/K yang akan membahas tentang formulasi rata-rata panjang antrian dan rata-rata waktu tunggu pelanggan, serta yang terakhir adalah penerapan kasus yang berkaitan dengan model antrian M/M/s/K yaitu studi kasus di BPJS Kesehatan Jakarta Timur.

3.1 Model Antrian M/M/s/K

Model antrian M/M/s/K merupakan model antrian yang memiliki asumsi-asumsi yaitu mengikuti proses rantai Markov dengan laju kedatangan berdistribusi Poisson dengan laju λ, laju pelayanan berdistribusi Eksponensial dengan laju μ, memiliki fasilitas pelayanan lebih dari satu yang disimbolkan dengan huruf s, kapasitas sistem antrian terbatas atau hanya dapat menampung sejumlah pelanggan dalam suatu sistem antrian yang disimbolkan dengan huruf K, sumber masukan tidak terbatas, struktur antrian *multi channel single phase*, dan disiplin antrian *First Come First Served* (FCFS). Kondisi sistem antrian dengan pembatasan kapasitas atau M/M/s/K contohnya terjadi saat sistem antrian yang terdapat pelanggan di dalamnya memiliki ruang tunggu yang terbatas sehingga hanya cukup menampung K pelanggan dalam sistem antrian.

Pada penelitian ini model antrian M/M/s/K akan dianalisis untuk mendapatkan probabilitas *steady state* dan formulasi dari ukuran performansi. Langkah awal untuk mendapatkan formulasi tersebut dengan mencari persamaan probabilitas *steady state* yang berasal dari laju proses kelahiran dan kematian. Laju proses kelahiran dan kematian untuk model antrian M/M/s/K identik dengan model antrian M/M/s, yang membedakannya adalah model antrian M/M/s/K berhenti pada suatu nilai K. Laju proses kelahiran dan kematian tersebut dapat menjadi dasar untuk mencari probabilitas *steady state* model antrian M/M/s/K yang akan dibahas pada subbab berikut.

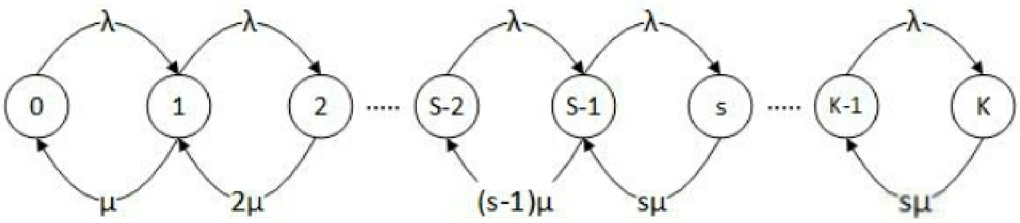
3.2 Probabilitas *Steady State* Model Antrian M/M/s/K

Probabilitas *steady state* adalah probabilitas suatu sistem antrian mencapai kondisi yang ideal. Suatu keadaan pada antrian dikatakan *steady state* (ideal) jika nilai peluangnya tidak lagi bergantung pada nilai peluang awal, dengan kata lain setelah periode waktu yang cukup lama peluang *state* tidak lagi bergantung pada kondisi awal (Cooper, 1981). Probabilitas *steady state* juga dapat dikatakan sebagai probabilitas terdapat pelanggan dalam sistem antrian.

Probabilitas *steady state* secara umum dapat dicari dengan laju proses kelahiran dan kematian. Dari sudut pandang proses kelahiran dan kematian, laju rata-rata masukan ke dalam sistem untuk model antrian M/M/s/K menjadi nol karena setiap pelanggan yang datang saat antrian penuh tidak dapat memasuki sistem sehingga pelanggan akan otomatis meninggalkan antrian untuk selamanya. Oleh sebab itu, satu modifikasi yang diperlukan dari model antrian M/M/s untuk mempertimbangkan antrian berhingga atau M/M/s/K adalah dengan mengubah parameter λ_n menjadi,

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ;\text{untuk } n = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ K-1 \\ 0 & ;\text{untuk } n \geq K. \end{cases}$$

Oleh karena λ_n bernilai 0 untuk beberapa nilai n, sistem antrian yang sesuai dengan model ini selalu dapat mencapai kondisi *steady state* meskipun pada keadaan $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} \geq 1$ karena kapasitas sistem telah dibatasi. Maka, laju proses kelahiran dan kematian untuk model antrian M/M/s/K ilustrasinya dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1: Laju Proses Kelahiran dan Kematian Model Antrian M/M/s/K

Laju proses kelahiran dan kematian pada Gambar 3.1 mendeskripsikan proses kelahiran atau kedatangan pelanggan yang disimbolkan dengan λ dibatasi sampai dengan K pelanggan, sedangkan proses kematian atau pelayanan disimbolkan dengan μ yang proses pelayanannya sesuai banyaknya *server* dan pelanggan dalam sistem antrian.

Selanjutnya, untuk mencari probabilitas *steady state* pada model antrian M/M/s/K dapat dicari dengan mengikuti laju proses kelahiran dan kematian dengan ilustrasi mengikuti proses pada Gambar 3.1, asumsi-asumsinya yaitu $\lambda_n = \lambda$ untuk $n = 0, 1, 2, ..., K-1$, nilai 0 untuk $n \geq K$, dan $\mu_n = \mu$ untuk $n = 0, 1, 2, ..., K-1$ maka akan didapat laju kelahiran atau laju kedatangan pelanggan dan laju kematian atau laju pelayanan pelanggan adalah sebagai berikut,

State	**Laju Masuk = Laju Keluar**
0	$\mu P_1 = \lambda P_0$
1	$\lambda P_0 + 2\mu P_2 = (\lambda + \mu)P_1$
2	$\lambda P_1 + 3\mu P_3 = (\lambda + 2\mu)P_2$
$\vdots$	$\vdots$
$s-2$	$\lambda P_{s-3} + (s-1)\mu P_{s-1} = (\lambda + (s-2)\mu)P_{s-2}$
$s-1$	$\lambda P_{s-2} + (s)\mu P_s = (\lambda + (s-1)\mu)P_{s-1}$
s	$\lambda P_{s-1} + (s)\mu P_s = (\lambda + (s)\mu)P_s$
$\vdots$	$\vdots$
$K-1$	$\lambda P_{K-2} + (s)\mu P_K = (\lambda + (s)\mu)P_{K-1}$
K	$\lambda P_{K-1} = (s)\mu P_K$

Dari hasil laju proses kelahiran dan kematian akan didapat probabilitas *steady state* untuk model antrian M/M/s/K adalah sebagai berikut.

Untuk *state* $= 0$

$$\begin{aligned} 1\mu P_1 &= \lambda P_0 \\ P_1 &= \frac{\lambda}{1\mu} P_0. \end{aligned}$$

Untuk *state* $= 1$

$$\begin{aligned} \lambda P_0 + 2\mu P_2 &= (\lambda + 1\mu)P_1 \\ 2\mu P_2 &= (\lambda + 1\mu)P_1 - \lambda P_0 \\ P_2 &= \frac{(\lambda + 1\mu)P_1}{2\mu} - \frac{\lambda P_0}{2\mu} \\ P_2 &= \left(\frac{\lambda P_1 + 1\mu P_1}{2\mu}\right) - \frac{\lambda P_0}{2\mu} \\ P_2 &= \frac{\lambda}{2\mu}P_1 + \frac{1}{2\mu}(1\mu P_1 - \lambda P_0) \\ P_2 &= \frac{\lambda}{2\mu}P_1 + \frac{1}{2\mu}(\lambda P_0 - \lambda P_0) \\ P_2 &= \frac{\lambda}{2\mu}P_1 + \frac{1}{2\mu}(0) \\ P_2 &= \frac{\lambda}{2\mu}P_1 \\ P_2 &= \frac{\lambda^2}{2\mu^2}P_0. \end{aligned}$$

Untuk *state* $= s-1$

$$\begin{aligned}
\lambda P_{s-2} + s\mu P_s &= (\lambda + (s-1)\mu)P_{s-1} \\
s\mu P_s &= (\lambda + (s-1)\mu)P_{s-1} - \lambda P_{s-2} \\
P_s &= \frac{(\lambda + (s-1)\mu)P_{s-1}}{s\mu} - \frac{\lambda P_{s-2}}{s\mu} \\
P_s &= \left(\frac{\lambda P_{s-1} + (s-1)\mu P_{s-1}}{s\mu}\right) - \frac{\lambda P_{s-2}}{s\mu} \\
P_s &= \frac{\lambda}{s\mu}P_{s-1} + \frac{((s-1)\mu P_{s-1} - \lambda P_{s-2})}{s\mu} \\
P_s &= \frac{\lambda}{s\mu}P_{s-1} + \frac{(\lambda P_{s-2} - \lambda P_{s-2})}{s\mu} \\
P_s &= \frac{\lambda}{s\mu}P_{s-1} + \frac{(0)}{s\mu} \\
P_s &= \frac{\lambda}{s\mu}P_{s-1} \\
P_s &= \frac{\lambda^s}{s!\mu^s}P_0.
\end{aligned}$$

Untuk *state* $= s$

$$\begin{aligned}
\lambda P_{s-1} + s\mu P_{s+1} &= (\lambda + s\mu)P_s \\
s\mu P_{s+1} &= (\lambda + s\mu)P_s - \lambda P_{s-1} \\
P_{s+1} &= \frac{(\lambda + s\mu)P_s}{s\mu} - \frac{\lambda P_{s-1}}{s\mu} \\
P_{s+1} &= \left(\frac{\lambda P_s + s\mu P_s}{s\mu}\right) - \frac{\lambda P_{s-1}}{s\mu} \\
P_{s+1} &= \frac{\lambda}{s\mu}P_s + \frac{(s\mu P_s - \lambda P_{s-1})}{s\mu} \\
P_{s+1} &= \frac{\lambda}{s\mu}P_s + \frac{(\lambda P_{s-1} - \lambda P_{s-1})}{s\mu} \\
P_{s+1} &= \frac{\lambda}{s\mu}P_s + \frac{(0)}{s\mu} \\
P_{s+1} &= \frac{\lambda}{s\mu}P_s \\
P_{s+1} &= \frac{\lambda^s}{s!\mu^s}\frac{\lambda}{s\mu}P_0.
\end{aligned}$$

Jadi, untuk *state* $= K-1$

$$\begin{aligned}
\lambda P_{K-2} + s\mu P_K &= (\lambda + s\mu)P_{K-1} \\
s\mu P_K &= (\lambda + s\mu)P_{K-1} - \lambda P_{K-2} \\
P_K &= \frac{(\lambda + s\mu)P_{K-1}}{s\mu} - \frac{\lambda P_{K-2}}{s\mu} \\
P_K &= \left(\frac{\lambda P_{K-1} + s\mu P_{K-1}}{s\mu}\right) - \frac{\lambda P_{K-2}}{s\mu} \\
P_K &= \frac{\lambda}{s\mu}P_{K-1} + \frac{1}{s\mu}(s\mu P_{K-1} - \lambda P_{K-2}) \\
P_K &= \frac{\lambda}{s\mu}P_{K-1} + \frac{1}{s\mu}(\lambda P_{K-2} - \lambda P_{K-2}) \\
P_K &= \frac{\lambda}{s\mu}P_{K-1} + \frac{1}{s\mu}(0) \\
P_K &= \frac{\lambda}{s\mu}P_{K-1} \\
P_K &= \frac{\lambda^s}{s!\mu^s}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{K-s} P_0.
\end{aligned}$$

Dari hasil tersebut maka didapat beberapa kondisi untuk probabilitas *steady state* (P_n) menjadi,

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}P_0 & ;\text{untuk } n = 1,\ 2,\ ...,\ s \\ \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}(\frac{\lambda}{s\mu})^{n-s}P_0 = \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}}P_0 & ;\text{untuk } n = s,\ s\text{+}1,\ ...,\ K \\ 0 & ;\text{untuk } n > K. \end{cases}$$

Probabilitas pada kondisi n pelanggan (P_n) didapat dari beberapa kondisi yang terjadi pada model antrian M/M/s/K, dalam perhitungannya P_n adalah gabungan dari perhitungan kondisi-kondisi tersebut. Kondisi pertama, adalah saat kondisi sistem antrian terdapat pelanggan sebanyak *server*. Kondisi kedua, adalah saat kondisi sistem antrian terdapat pelanggan yang masih dilayani dalam *server* dan terdapat pelanggan yang masih menunggu dilayani sebanyak kapasitas sistem antrian menampung pelanggan (K). Sedangkan kondisi ketiga, adalah saat kondisi di mana masih adanya pelanggan yang datang ketika kapasitas sistem antrian sudah mencapai batas maksimum (K), maka pelanggan selanjutnya akan ditolak, oleh karena itu probabilitas pelanggan tersebut dilayani bernilai 0.

Selanjutnya, akan dicari probabilitas *steady state* saat tidak terdapat pelanggan pada sistem atau saat $n = 0$ yang dapat disimbolkan P_0. P_0 dicari untuk mempermudah perhitungan dalam mencari formulasi ukuran performansi. Untuk mencari P_0 dapat menggunakan syarat dari laju kelahiran dan kematian yaitu, laju kelahiran dan kematian mempunyai syarat $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ maka,

$$\begin{aligned} P_0 + P_1 + ... + P_s + P_{s+1} + ... + P_K &= 1 \\ P_0 + \frac{\lambda}{s\mu} P_0 + ... + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} P_0 + ... + \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} P_0 &= 1 \\ P_0 \left[1 + \frac{\lambda}{s\mu} + ... + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + ... + \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} \right] &= 1 \\ P_0 \left[1 + \sum_{n=0}^{s} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{K} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} \right] &= 1. \end{aligned}$$

Dengan demikian kondisi *steady state* untuk model antrian M/M/s/K berdasarkan Persamaan (2.2) diperoleh probabilitas *steady state* untuk $n = 0$ sebagai berikut,

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{s} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum\limits_{n=s+1}^{K} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}} \\ &= \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{s} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \left(\frac{\lambda}{s\mu} + \frac{\lambda^2}{(s\mu)^2} + \frac{\lambda^3}{(s\mu)^3} + ... \right)} \\ &= \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{s} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \left(\frac{(\lambda/s\mu)(1-(\lambda/s\mu)^n)}{1-(\lambda/s\mu)} \right)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Seperti yang sudah dijelaskan bahwa probabilitas *steady state* dapat digunakan untuk menghitung peluang kedatangan pelanggan dalam suatu kondisi dan untuk mencari formulasi ukuran performansi seperti rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian, rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem antrian, rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam antrian, dan rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam sistem antrian.

3.3 Ukuran Performansi Model Antrian M/M/s/K

Ukuran performansi adalah pengukuran untuk menghitung dan menganalisis karakteristik suatu model antrian. Ukuran performansi model antrian secara analitik bisa dicari berupa formulasi. Formulasi ukuran performansi suatu sistem antrian dapat ditentukan setelah probabilitas *steady state* diketahui. Ukuran performansi yang akan dicari adalah formulasi rata-rata panjang antrian pelanggan dan formulasi rata-rata waktu tunggu pelanggan.

Perbedaan ukuran performansi model antrian M/M/s dengan model antrian M/M/s/K adalah untuk menghitung panjang dan waktu antrian dapat menggunakan λ karena kapasitas kedatangan tidak dibatasi, sedangkan untuk model antrian M/M/s/K menggunakan λ_{eff} atau laju kedatangan efektif karena kapasitas kedatangannya dibatasi. λ_{eff} pada model antrian M/M/s/K dapat diturunkan melalui Persamaan (2.3) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\lambda_{eff} &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n \\ &= \sum_{n=0}^{K-1} \lambda_n P_n \\ &= \lambda(1 - P_k) \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Ukuran performansi dari model antrian bertujuan untuk mengestimasi dan mencari solusi dari masalah tentang panjang dan waktu tunggu antrian, Persamaan (3.2) dapat membantu mencari formulsi tersebut.

3.3.1 Formulasi Rata-Rata Panjang Antrian Pelanggan

Formulasi rata-rata panjang antrian pelanggan dapat dibagi menjadi dua formulasi yaitu rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem antrian (L) dan rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian (L_q). Selanjutnya akan diturunkan formulasi untuk kedua rata-rata panjang antrian pelanggan.

- Rata-rata Jumlah Pelanggan dalam Antrian

  Rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian (Lq) dapat disebut juga sebagai panjang antrian yang ada pada sistem antrian (Taha, 1993: 596). Rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian adalah hanya jumlah pelanggan yang sedang mengantri untuk dilayani oleh pelayan (*server*). Formulasi rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian untuk model antrian M/M/s/K adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=s+1}^{K} (n-s)P_n \\
&= \sum_{n=s+1}^{K} (n-s)\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!s^{n-s}}P_0 \\
&= \frac{P_0(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{K} (n-s)\frac{(\lambda/\mu)^{n-s}}{s^{n-s}} \\
&= \frac{P_0(\lambda/\mu)^s\rho}{s!} \sum_{n=s+1}^{K} (n-s)\rho^{n-s-1} \\
&= \frac{P_0(\lambda/\mu)^s\rho}{s!} \sum_{i=1}^{K-s} i\rho^{i-1} \\
&= \frac{P_0(\lambda/\mu)^s\rho}{s!}\frac{d}{d\rho}\left(\sum_{i=0}^{K-s}\rho^i\right) \\
&= \frac{P_0(\lambda/\mu)^s\rho}{s!}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^{K-s+1}}{1-\rho}\right) \\
&= \frac{P_0(\lambda/\mu)^s\rho}{s!(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{K-s+1}-(1-\rho)(K-s+1)\rho^{K-s}\right]. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, formulasi rata-rata jumlah pelanggan dapat membantu untuk mencari formulasi rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem.

- Rata-rata Jumlah Pelanggan dalam Sistem Antrian

  Rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem antrian (L) dapat disebut juga sebagai panjang antrian yang ada ditambah dengan pelanggan yang sedang dilayani pada sistem antrian. (Taha, 1993: 596). Jadi, rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian adalah jumlah pelanggan yang sedang mengantri untuk dilayani ditambah pelanggan yang sedang dilayani oleh pelayan (*server*). Formulasi rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem antrian untuk model antrian M/M/s/K adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} L &= Lq + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \\ &= Lq + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)(1 - P_k). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Formulasi rata-rata panjang antrian pelanggan dapat membantu untuk mendapatkan formulasi rata-rata waktu tunggu pelanggan yang akan dibahas pada subbab berikut.

3.3.2 Formulasi Rata-rata Waktu Tunggu Pelanggan

Formulasi rata-rata waktu tunggu pelanggan dapat dibagi menjadi dua formulasi yaitu rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam sistem antrian (W) dan rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam antrian (W_q). Selanjutnya akan diturunkan formulasi untuk kedua rata-rata waktu tunggu pelanggan.

- Rata-rata Waktu Tunggu Pelanggan dalam Antrian

  Rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam antrian adalah waktu rata-rata pelanggan dalam menunggu untuk mendapat pelayanan atau dapat dikatakan hanya waktu sedang mengantri. Formulasi rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam antrian untuk model antrian M/M/s/K dengan menggunakan formula *little* dan Persamaan (3.2) yaitu dengan mengurangkan rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam sistem antrian dengan laju pelayanan pelanggan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{L_q}{\lambda_{eff}} \\ &= \frac{L_q}{\lambda(1-P_k)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Selanjutnya, formulasi rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam antrian dapat membantu untuk mencari formulasi rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam sistem antrian.

- Rata-rata Waktu Tunggu Pelanggan dalam Sistem Antrian

  Rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam sistem antrian adalah waktu rata-rata pelanggan mulai dari menunggu, dilayani, sampai selesai dilayani, dan meninggalkan sistem antrian. Formulasi rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam sistem antrian untuk model antrian M/M/s/K dengan menggunakan formula *little* dan Persamaan (3.2) yaitu dengan membagi jumlah pelanggan yang mengantri pada sistem antrian dengan rata-rata kedatangan pelanggan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{\lambda_{eff}} \\ &= \frac{L}{\lambda(1-P_k)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

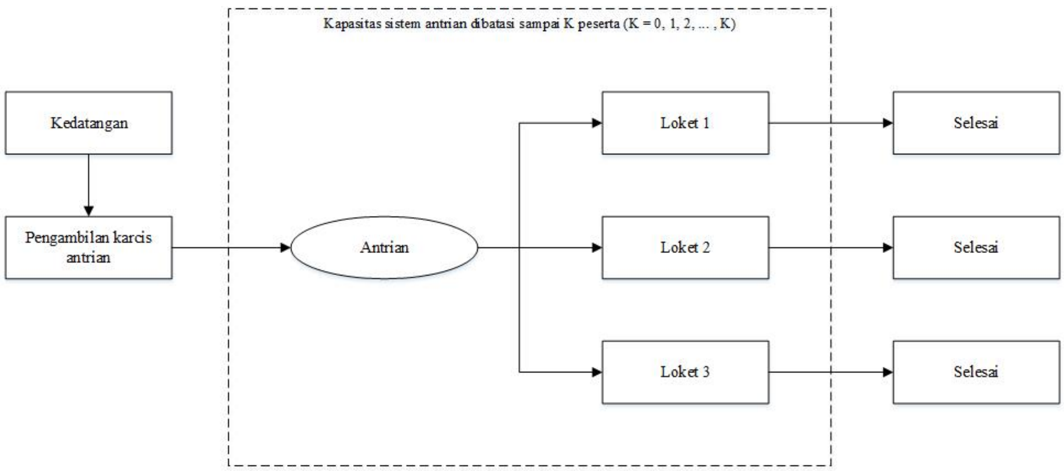
Ukuran performansi dapat digunakan untuk memperkirakan efektifitas suatu sistem antrian pada berbagai kasus di kehidupan sehari-hari. Penerapan formulasi pada kasus akan dibahas bada subbab selanjutnya.

3.4 Studi Kasus

Studi kasus model antrian M/M/s/K yang akan dibahas adalah antrian pada loket pelayanan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur. Tahapan untuk membuat kartu jaminan kesehatan cukup melalui loket pelayanan BPJS yang terdiri dari beberapa loket pelayanan. Namun, setiap harinya loket pelayanan membatasi jumlah pelanggan atau dalam BPJS Kesehatan pelanggan tersebut biasa disebut peserta BPJS Kesehatan yang akan dilayani yaitu sebanyak K peserta.

3.4.1 Sistem Antrian BPJS Kesehatan Jakarta Timur

Sistem antrian pada BPJS Kesehatan Jakarta Timur (loket pelayanan umum) ilustrasinya dapat dilihat pada Gambar 3.2 sebagai berikut.



Gambar 3.2: Sistem Antrian Pada BPJS Kesehatan Jakarta Timur (Loket Pelayanan Umum)

Berdasarkan Gambar 3.2 proses antrian pada pelayanan BPJS Kesehatan Jakarta Timur dimulai saat peserta datang, peserta dipersilahkan mengambil karcis yang bertuliskan nomor antrian, kemudian peserta menunggu dalam sistem antrian di kursi yang sudah disediakan sambil menunggu giliran untuk dilayani, peserta yang datang lebih awal maka akan dilayani terlebih dahulu (disiplin antrian FCFS) di loket mana pun, kemudian dilanjutkan peserta selanjutnya mengisi loket yang kosong (terdapat 3 loket pelayanan) yang ketiga loket tersebut dapat melayani pembuatan kartu baru bagi peserta BPJS yang baru akan mendaftarkan diri, pergantian fasilitas kesehatan, dan mengaktifkan status peserta BPJS yang dinonaktifkan. Setelah selesai dilayani, peserta keluar dari sistem antrian, dan loket langsung diisi dengan peserta selanjutnya. Namun, peserta yang datang untuk mendapatkan pelayanan dibatasi setiap harinya, rata-rata setiap hari BPJS Kesehatan Jakarta melayani peserta sebanyak 120 orang. Peserta yang datang mengambil karcis lewat dari kapasitas akan ditolak dan tidak bisa dilayani pada hari itu.

3.4.2 Data

Data yang digunakan merupakan data sekunder yaitu data pada loket pelayanan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur, data yang diambil berupa waktu kedatangan peserta mengambil karcis antrian, data waktu peserta mulai dilayani, dan waktu peserta selesai dilayani. Data diperoleh dari sub bagian data di BPJS Kesehatan Jakarta Timur, yaitu dengan pengambilan sampel secara acak dalam 1 minggu (hari efektif berkerja) tepatnya pada tanggal 1 Mei 2017 - 5 Mei 2017 dan tidak memiliki hari libur, kemudian dicari rata-rata kedatangan peserta dan waktu pelayanan peserta BPJS. Sampel data tersebut sudah mewakilkan kondisi sistem antrian BPJS Kesehatan Jakarta Timur pada kondisi yang sebenarnya. Data dapat dilihat pada Lampiran 1 untuk data kedatangan peserta BPJS saat datang mengambil karcis antrian dan Lampiran 2 untuk data pelayanan peserta BPJS di loket.

3.4.3 Uji Distribusi Antrian

Uji distribusi antrian dilakukan dengan menggunakan uji Chi-kuadrat untuk menguji apakah kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson dan uji Anderson Darling untuk menguji apakah pelayanan berdistribusi Eksponensial. Uji ini dilakukan guna memperoleh distribusi yang nantinya mempengaruhi model antrian yang akan dianalisa.

1. Uji Distribusi Poisson

   Untuk menguji apakah pola kedatangan diuraikan menurut distribusi Poisson maka dapat dicari dengan menggunakan uji perbandingan nilai Chi-kuadrat. Dengan perumusan hipotesis adalah sebagai berikut:

   H_0 : Pola kedatangan peserta mengikuti distribusi Poisson.

   H_1 : Pola kedatangan peserta tidak mengikuti distribusi Poisson.

   Jika hasilnya nilai statistik uji $(\chi^2_{hit}) \leq$ nilai Chi-kuadrat tabel (χ^2_{tabel}) maka terima H_0, prosesnya mengikuti distribusi Poisson. Selain itu, dapat juga dilihat dari nilai *p-value* dengan statistik uji *p-value* $\geq \alpha(0,05)$ maka terima H_0, prosesnya mengikuti distribusi Poisson. Perhitungannya menggunakan rumus:

   $$\widehat{p}_j = \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}$$

   $$\chi^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{(o_j - \widehat{e}_j)^2}{\widehat{e}_j}$$

   dimana o_j adalah jumlah pengunjung yang masuk pada *state* j dan $\widehat{e}_j$ adalah dugaan nilai ekspektasi pada *state* j yang bernilai $\widehat{e}_j = n\widehat{p}_j$. Menggunakan nilai dugaan karena parameternya belum diketahui.

2. Uji Distribusi Eksponensial

   Uji Anderson-Darling dapat digunakan untuk berbagai macam distribusi seperti distribusi Normal, Lognormal, Weibull, dan Eksponensial. Hipotesis null untuk AD adalah data mengikuti disrtibusi tertentu. Hipotesis null ditolak ketika statistik uji AD lebih besar dari CV (*critical value*) atau *p-value* kurang dari α. Statistik uji Anderson-Darling adalah,

$$AD = -n - \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n}[\ln(w_i) + \ln(W_{n-i+1})]$$

dimana n adalah banyaknya sampel data dan w adalah CDF dari distribusi yang berkaitan dengan hipotesis null. Alternatif dari statistik uji AD untuk distribusi Eksponensial adalah,

$$AD^* = AD\left(1 + \frac{0,2}{\sqrt{n}}\right).$$

Kedua alternatif tersebut dibandingkan dengan nilai CV 0,631; 0,752; 0,873; 1,035; atau 1,159 untuk taraf signifikansi (α) 10%; 5%; 2,5%; 1%; dan 0,5%.

Untuk menguji distribusi dapat menggunakan bantuan *software* Minitab 16. Hasil keluaran dari Minitab 16 untuk uji distribusi Poisson yaitu sebagai berikut.

```
Goodness-of-Fit Test for Poisson Distribution

Data column: Kedatangan

Poisson mean for Kedatangan = 4,28571

                      Poisson              Contribution

C7    Observed  Probability  Expected     to Chi-Sq

<=1          2     0,072751   2,03704       0,00067

2            3     0,126402   3,53926       0,08216

3            5     0,180574   5,05608       0,00062

4            5     0,193473   5,41723       0,03214

5            4     0,165834   4,64334       0,08914
```

6	6	0,118453	3,31667	2,17092
>=7	3	0,142513	3,99036	0,24580

N	N*	DF	Chi-Sq	P-Value
28	0	5	2,62145	0,758

Artinya, nilai *p-value* $\geq \alpha = 0,05$ yaitu $0,758 \geq 0,05$. Maka, tidak tolak H_0 atau terima H_0 sehingga pola kedatangan berdistribusi Poisson. Laju kedatangan adalah 4.28 $\approx$ (4 orang) kedatangan per 15 menit atau 17,14 $\approx$ 17 orang kedatangan per jam. Jadi $\lambda = 17,14$.

Hasil keluaran untuk uji Eksponensial menggunakan *software* Minitab 16 dengan menggunakan uji Anderson Darling (AD) adalah sebagai berikut.

Descriptive Statistics

N	N*	Mean	StDev	Median	Minimum	Maximum	Skewness
120	0	9,39092	10,2658	5,65793	0,255530	46,4845	1,93328

Goodness of Fit Test

Distribution	AD	P
Exponential	0,900	0,155

ML Estimates of Distribution Parameters

Distribution	Location	Shape	Scale	Threshold
Exponential			9,39092	

Berdasarkan hasil uji di atas terlihat bahwa nilai *p-value* $> \alpha$ yaitu $0,155 > 0,05$ yang berarti tidak tolak H_0 atau terima H_0. Sehingga pola pelayanan berdistribusi Eksponensial. Rata-rata waktu pelayanannya adalah 9,39 menit atau dengan kata lain laju pelayanannya adalah 6,39 $\approx$ 6 orang per jam. Jadi $\mu = 6,39$.

Karena pola kedatangan peserta BPJS berdistribusi Poisson dan waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial maka model antrian untuk loket pelayanan pada BPJS Kesehatan Jakarta Timur adalah antrian Markovian, sehingga model antrian yang mewakili antrian tersebut adalah M/M/3/120. Berikutnya untuk mendapatkan nilai rata-rata untuk banyaknya peserta dalam sistem, banyaknya peserta dalam antrian, waktu tunggu dalam sistem, dan antrian dapat menggunakan model antrian M/M/3/120.

3.4.4 Ukuran Performansi Antrian Loket Pelayanan BPJS Kesehatan Jakarta Timur

Model antrian yang mewakili antrian di loket pelayanan pada BPJS Kesehatan Jakarta Timur adalah M/M/3/120. Sehingga, dari Persamaan (3.1) peluang tidak ada peserta dalam sistem antrian di loket pelayanan pada BPJS Kesehatan Jakarta Timur adalah,

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{s} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\left(\frac{(\lambda/s\mu)(1-(\lambda/s\mu)^n)}{1-(\lambda/s\mu)}\right)} \\ &= \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{3} \frac{(17{,}14/6{,}39)^n}{n!} + \frac{(17{,}14/6{,}39)^3}{3!}\left(\frac{(17{,}14/3(6{,}39))(1-(17{,}14/3(6{,}39))^{117})}{1-(17{,}14/3(6{,}39))}\right)} \\ &= 0,0265. \end{aligned}$$

Jadi, peluang tidak ada peserta dalam sistem antrian di loket pelayanan pada BPJS Kesehatan Jakarta Timur adalah 0,0265.

Selanjutnya, akan dibahas perhitungan ukuran performansi dari sistem antrian di loket pelayanan pada BPJS Kesehatan Jakarta Timur.

1. Rata-rata Jumlah Peserta dalam Antrian

   Rata-rata jumlah peserta dalam antrian loket pelayanan pada BPJS Kesehatan Jakarta Timur dapat dihitung berdasarkan Persamaan (3.3) sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
L_q &= \frac{P_0(\lambda/\mu)^s\rho}{s!(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{K-s+1}-(1-\rho)(K-s+1)\rho^{K-s}\right]\\
&= \frac{0,026(17,14/6,39)^3 0,89}{3!(1-0,89)^2}\left[1-0,89^{118}-(1-0,89)(118)0,89^{117}\right]\\
&= 7,64 \approx 7 \text{ orang.}
\end{aligned}
$$

Jadi, rata-rata jumlah peserta dalam antrian loket pelayanan BPJS Jakarta Timur adalah 7 orang.

2. Rata-rata Jumlah Peserta dalam Sistem Antrian

   Rata-rata jumlah peserta dalam sistem antrian loket pelayanan pada BPJS Kesehatan Jakarta Timur dapat dihitung berdasarkan Persamaan (3.4) sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
L &= Lq + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)(1-P_k)\\
&= 7,64 + \left(\frac{17,14}{6,39}\right)\left(1-(1,81\times 10^{-7})\right)\\
&= 10,32 \approx 10 \text{ orang.}
\end{aligned}
$$

   Jadi, rata-rata jumlah peserta dalam sistem antrian loket pelayanan BPJS Jakarta Timur adalah 10 orang.

3. Rata-rata Waktu Tunggu Peserta dalam Antrian

   Rata-rata waktu tunggu peserta dalam antrian loket pelayanan pada BPJS Kesehatan Jakarta Timur dapat dihitung berdasarkan Persamaan (3.5) sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
W_q &= \frac{L_q}{\lambda(1-P_k)}\\
&= \frac{7,64}{17,14(1-(1,81\times 10^{-7}))}\\
&= \text{0,45 jam.}
\end{aligned}
$$

Jadi, rata-rata waktu tunggu peserta dalam antrian loket pelayanan BPJS Jakarta Timur adalah 0,45 jam atau 26,74 menit.

4. Rata-rata Waktu Tunggu Peserta dalam Sistem Antrian

   Rata-rata waktu tunggu peserta dalam sistem antrian loket pelayanan pada BPJS Kesehatan Jakarta Timur dapat dihitung berdasarkan Persamaan (3.6) sebagai berikut,

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{\lambda(1-P_k)} \\ &= \frac{10,32}{17,14(1-(1,81\times 10^{-7}))} \\ &= \text{0,60 jam.} \end{aligned}$$

   Jadi, rata-rata waktu tunggu peserta dalam sistem antrian loket pelayanan BPJS Jakarta Timur adalah 0,60 jam atau 36,13 menit.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan pada skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Formulasi untuk probabilitas jumlah pelanggan pada sistem antrian dalam model antrian M/M/s/K adalah sebagai berikut,

$$P_n = \sum_{n=0}^{s} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \left(\frac{(\lambda/s\mu)(1-(\lambda/s\mu)^n)}{1-(\lambda/s\mu)} \right).$$

   Probabilitas tidak adanya pelanggan dalam sistem sebagai adalah berikut,

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \left(\frac{(\lambda/s\mu)(1-(\lambda/s\mu)^n)}{1-(\lambda/s\mu)} \right)}.$$

   Formulasi probabilitas jumlah pelanggan dapat ditentukan berdasarkan proses laju kelahiran dan kematian.

2. Formulasi untuk ukuran performasi pada sistem antrian dalam model antrian M/M/s/K adalah sebagai berikut.

   (a) Formulasi rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian (L_q)

$$L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} \left[1 - \rho^{K-s+1} - (1-\rho)(K-s+1)\rho^{K-s} \right].$$

   (b) Formulasi rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem antrian (L)

$$L = Lq + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) (1 - P_k).$$

(c) Formulasi rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam antrian (W_q)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(1 - P_k)}.$$

(d) Formulasi rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam sistem (W)

$$W = \frac{L}{\lambda(1 - P_k)}.$$

Formulasi ukuran performansi pada sistem antian dalam model antrian M/M/s/K dapat ditentukan berdasarkan probabilitas jumlah pelanggan dan formula *Little*.

3. Ukuran performansi sistem antrian untuk penerapan kasus antrian pada loket pelayanan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur adalah sebagai berikut.

   (a) Rata-rata jumlah peserta dalam antrian pada loket pelayanan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur adalah 7 orang.

   (b) Rata-rata jumlah peserta dalam sistem antrian pada loket pelayanan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur adalah 10 orang.

   (c) Rata-rata waktu tunggu peserta dalam antrian pada loket pelayanan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur adalah 0,45 jam atau 26,74 menit.

   (d) Rata-rata waktu tunggu peserta dalam sistem antrian pada loket pelayanan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur adalah 0,60 jam atau 36,13 menit.

4.2 Saran

Saran dari hasil pembahasan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Menerapkan model antrian M/M/s/K pada model antrian selain jenis antrian Markovian.

2. Menambahkan analisis keputusan berdasarkan ukuran performansi seperti model biaya dalam sistem antrian.

3. Menerapkan disiplin antrian selain *First Come First Served* (FCFS) seperti *Last In Frist Out* (LIFO), *Service In Random Order* (SIRO), atau *Priority Service* (PRI).

4. Menerapkan model antrian pembatasan jumlah pelanggan pada kasus antrian lainnya di kehidupan sehari-hari.

DAFTAR PUSTAKA

Bain, Lee J. dan Max Engelhardt. 1991. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics 2nd Edition*. Boston: PWS-KENT Publishing Company.

BPJS Kesehatan Jakarta Timur. Indonesia. 2017. Data Kedatangan dan Pelayanan Peserta BPJS pada Loket Pelayanan di BPJS Kesehatan Jakarta Timur. BPJS Kesehatan Jakarta Timur: BPJS Kesehatan.

Cooper, Robert B. 1981. *Introduction to Queueing Theory Second Edition*. New York: Elsevier North Holland, Inc.

El-Paoumy, M.S. 2008. "On Poisson Bulk Arrival Queue: $M^x/M/2/N$ with Balking, Reneging and Heterogeneous servers". *Applied Mathematical Sciences Journals Vol. 2 No. 24.*

Farkhan, Feri. 2013. "Aplikasi Teori Antrian dan Simulasi pada Pelayanan *Teller* Bank". *Skripsi Matematika*. Universitas Negeri Semarang.

Ginting, Florensa Br. 2014. "Analisis Kinerja Sistem Antrian M/M/1/N". *Jurnal Matematika*. Universitas Sumatera Utara.

Gross, Donald., Dkk. 2005. *Fundamentals of Queueing Theory Fourth Edition*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Hillier, Frederick S. dan Gerald J Lieberman. 2001. *Introduction to Operations Research Seventh Edition*. New York: Mc Graw Hill Higher Education.

Hillier, Frederick S. dan Gerald J Lieberman. 2014. *Introduction to Operations Research Eighth Edition*. Diterjemahkan oleh: Noname. Yogyakarta: Penerbit Andi.

Mishra, S S. dan D C Shukla. 2011. "Performance Analysis of Truncated Multi-Channel Queue". *Mathematic Journal*. India.

Ross, Sheldon M. 2010. *Introduction to Probability Models Tenth Edition*. California: Elsevier.

Sitepu., Dkk. 2015. "Perancang dan Analisis Kinerja Antrian M/M/1/N pada Wireless LAN Menggunakan Simulator Opnet". *Jurnal Matematika*. Universitas Sumatera Utara.

Taha, Hamdy A. 2007. *Operation Research: An Introduction Eighth Edition*. USA: Pearson Education, Inc.

Wachidah, Lisnur. 2009. "Uji Kecocokan Chi-Kuadrat Untuk Distribusi Poisson Pada Data Asuransi". *Jurnal Matematika*. Universitas Negeri Yogyakarta.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

Data Kedatangan (Per 15 Menit) Peserta di BPJS Kesehatan Jakarta Timur

Waktu Kedatangan	Peserta
06:00 - 06:15	6
06:16 - 06:30	3
06:31 - 06:45	6
06:46 - 07:00	4
07:01 - 07:15	7
07:16 - 07:30	3
07:31 - 07:45	3
07:46 - 08:00	6
08:01 - 08:15	7
08:16 - 08:30	8
08:31 - 08:45	3
08:46 - 09:00	5
09:01 - 09:15	3
09:16 - 09:30	4
09:31 - 09:45	4
09:46 - 10:00	5
10:01 - 10:15	2
10:16 - 10:30	6
10:31 - 10:45	2
10:45 - 11:00	3
11:01 - 11:15	1
11:16 - 11:30	2
11:31 - 11:45	4
11:46 - 12:00	3
12:01 - 12:15	6
12:16 - 12:30	5
12:31 - 12:45	5
12:46 - 13:00	4
Total	120

Sumber: BPJS Kesehatan Jakarta Timur

LAMPIRAN 2

Data Pelayanan (Per Menit) Peserta di BPJS Kesehatan Jakarta Timur

Loket 1	Loket 2	Loket 3
9	39	2
3	13	10
1	5	5
14	4	6
10	8	5
13	1	7
5	22	1
4	11	1
8	6	2
9	19	5
7	8	3
1	12	1
6	1	5
11	15	5
19	1	9
1	23	2
4	40	5
16	4	1
5	4	6
2	9	7
24	4	33
4	5	3
3	11	6
7	2	2
18	3	3
3	38	4
1	31	13
7	8	1
1	8	30
11	4	13
33	7	9

Loket 1	Loket 2	Loket 3
8	36	6
8	4	6
30	7	16
2	2	3
4	21	2
14	1	3
9	14	3
	36	2
	3	30
	10	
	15	

Sumber: BPJS Kesehatan Jakarta Timur

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama	:	Syarifah Hanun
No. Registrasi	:	3125136331
Program Studi	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul "**Analisis Model Antrian M/M/s/K (Studi Kasus di BPJS Kesehatan Jakarta Timur)**" adalah :

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, Agustus 2017

Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL

D6124AEF221997783

6000 ENAM RIBU RUPIAH

Syarifah Hanun

DAFTAR RIWAYAT HIDUP


SYARIFAH HANUN. Lahir di Jakarta, 17 September 1995. Anak kedua dari pasangan Bapak Sariman dan Ibu Fadhilah. Saat ini bertempat tinggal di Jalan SMEA VI RT 005/ RW 09 No 49, Cawang, Kramat Jati, Jakarta Timur 13630.

No. Ponsel	:	089607755715
Email	:	hanunsyarifah@gmail.com

Riwayat Pendidikan : Penulis mengawali pendidikan di TKIT An-Nur selama 2 tahun, dan kemudian melanjutkan pendidikan di SDIT Buah Hati pada tahun 2001 - 2007. Setelah itu, penulis melanjutkan ke SMP Negeri 20 Jakarta hingga tahun 2010. Kemudian kembali melanjutkan ke SMA Negeri 62 Jakarta dan lulus tahun 2013. Di Tahun yang sama penulis melanjutkan ke Universitas Negeri Jakarta (UNJ), prodi Matematika, melalui jalur Ujian Masuk Bersama (UMB). Di pertengahan tahun 2017 penulis telah memperoleh gelar Sarjana Sains untuk Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, FMIPA, UNJ.

Riwayat Organisasi : Selama di bangku perkuliahan, penulis aktif di berbagai organisasi kemahasiswaaan. Dalam dua tahun pertama, penulis mendapat kepercayaan sebagai staff Departemen Advokasi dan Keolahragaan BEMJ Matematika. Memasuki tahun keempat penulis aktif di organisasi beasiswa Karya Salemba Empat (KSE) Paguyuban UNJ sebagai staff Departemen Pengabdian Masyarakat.

Riwayat Pekerjaan : Penulis mulai menjadi pengajar *private* matematika sejak tahun 2015. Pada tahun 2017, penulis bekerja *freelance* menjadi korektor matematika di PT. Penerbit Erlangga bagian Erlangga Digital, Ciracas.