

KARAKTERISASI DAN ENUMERASI PADA GRAF DNA

Skripsi

Disusun untuk melengkapi syarat-syarat
guna memperoleh gelar Sarjana Sains



DINA RACHMADANTI
3125111196

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA
2015

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

KARAKTERISASI DAN ENUMERASI PADA GRAF DNA

Nama : Dina Rachmadanti

No. Registrasi : 3125111196

	Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab			
Dekan	: Prof. Dr. Suyono, M.Si. NIP. 19671218 199303 1 005
Wakil Penanggung Jawab			
Pembantu Dekan I	: Dr. Muktiningsih, M.Si. NIP. 19640511 198903 2 001
Ketua	: Dra. Widyanti Rahayu, M.Si. NIP. 19661103 200112 2 001
Sekretaris	: Ria Arafiyah, M.Si. NIP. 19751121 200501 2 004
Penguji	: Dian Handayani, M.Si. NIP. 19740415 199803 2 001
Pembimbing I	: Drs. Mulyono, M.Kom. NIP. 19660517 199403 1 003
Pembimbing II	: Med Irzal, M.Kom. NIP. 19770615 200312 1 001

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal: 07 Juli 2015

ABSTRACT

DINA RACHMADANTI, 3125111196. Characterization and Enumeration In Graph DNA. Faculty of Mathematics and Natural Science Jakarta State University. 2015.

Sequencing by hybridization is one methods to identify DNA sequences by searching Euler path in a graph of DNA. Euler path in a graph of DNA cannot be define as a unique path when there is an edge in a DNA graph which repeat more than once. It means there is a repeation of a fragmentsin DNA graph which lead the reconstruction of more than one of different DNA sequence. DNA graph is changed into a main pattern in order to characterize repetition which can reconstruct more than one DNA sequence. Different pattern graph has the same main pattern graph. Determining the number of pattern graph is a enumeration problem for graph which can be solved by Polya's Theorem . Therefore , in this thesis will discuss about how to characterize the repeation of DNA graph and calculate the number of pattern graph with Polya's Theorem .

Keywords : *sequencing by hybridization, DNA graph, pattern graph, main pattern graph, polya's theorem.*

ABSTRAK

DINA RACHMADANTI, 3125111196. Karakterisasi dan Enumerasi pada Graf DNA, Universitas Negeri Jakarta. 2015.

Salah satu metode untuk mengenali barisan DNA dengan mencari jalur Euler pada graf DNA adalah *Sequencing by hybridization*. Jalur Euler pada suatu graf DNA dikatakan belum tentu unik apabila terdapat busur pada graf DNA yang dilewati lebih dari satu kali. Hal ini dapat diartikan bahwa terdapat pengulangan fragmen pada graf DNA yang menyebabkan terbentuknya lebih dari satu barisan DNA berbeda. Untuk mengkarakterisasikan pengulangan yang dapat menyebabkan terbentuknya lebih dari satu barisan DNA, graf DNA diubah menjadi graf pola utama. Graf pola utama adalah penyederhanaan dari Graf pola. Graf pola yang berbeda memiliki graf pola utama yang sama. Penentuan banyaknya graf pola merupakan masalah enumerasi pada graf. Masalah enumerasi pada graf dapat diselesaikan dengan Teorema Polya. Oleh karena itu, skripsi ini akan membahas bagaimana mengkarakterisasikan pengulangan pada graf DNA dan menghitung banyaknya graf pola dengan Teorema Polya.

Kata kunci : *sequencing by hybridization* , graf DNA, graf pola, graf pola utama, teorema polya .

PERSEMBAHANKU...

"Zeal is a volcano, the peak of which the grass of indecisiveness does not grow"

"Hai orang-orang yang beriman, jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolongmu, sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar"

Al-Baqarah:153

Skripsi ini kupersembahkan untuk Bapak, Ibu, Mbak Dini, Mbak Dita, dan Sahabatku. *"Terima kasih atas dukungan, do'a, serta kasih sayang kalian"*.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan YME atas pengetahuan dan kemampuan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Karakterisasi Dan Enumerasi Pada Graf DNA" yang merupakan salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Jurusan Matematika Universitas Negeri Jakarta.

Skripsi ini berhasil diselesaikan tidak terlepas dari adanya bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin menyampaikan terima kasih terutama kepada:

1. Bapak Drs. Mulyono, M.Kom. selaku Dosen Pembimbing I dan Bapak Med Irzal, M.Kom. selaku Dosen Pembimbing II, yang telah meluangkan waktunya dalam memberikan bimbingan, saran, nasehat serta arahan sehingga skripsi ini dapat menjadi lebih baik dan terarah.
2. Bapak Drs. Makmuri, M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNJ dan Ibu Ratna Widyati, S.Si, M.Kom., selaku Ketua Prodi Matematika FMIPA UNJ yang telah banyak membantu penulis.
3. Bapak Bambang Irawan, M.Si., selaku Pembimbing Akademik atas segala bimbingan dan kerja sama Bapak selama perkuliahan, dan seluruh Bapak/Ibu dosen atas pengajarannya yang telah diberikan, serta karyawan/karyawati FMIPA UNJ yang telah memberikan informasi yang penulis butuhkan dalam menyelesaikan skripsi.
4. Ibu Dra. Widyanti Rahayu, M.Si., Ibu Ria Arafiyah, M.Si., dan Ibu Dian Handayani, M.Si., selaku dosen penguji, yang telah memberikan masukan, kritik dan juga mengarahkan penulis dalam penyelesaian skripsi ini.

5. Kedua orang tua, kakak, dan keponakan ku yang telah memberikan semangat dan dorongan, terima kasih atas omelan-omelannya dan doanya yang sangat luar biasa.
6. Bobby yang telah memberikan bantuan dan saran-saran serta motivasi kepada ku.
7. Sahabat terbaikku selama di bangku kuliah Debi, Lina, Anti, Pephu, Firdha, Gia, dan seluruh teman-teman Matematika Murni 2011 terima kasih atas bantuan, motivasinya, dan empat tahunnya yang sangat berharga.
8. Sahabat setiakku Medin, Kiki, Ratna, Andrie, Sindu, Kak Raisa, Kak Ayyu, Aii, Mustika, Cica, Afiantika, Innes, Melfina, Rani, Bisri, dan Yanu terima kasih atas segala canda, semangat, doanya yang luar biasa dan selalu menghibur ketika mengalami kesulitan. Sukses terus untuk kalian, *I love you all*.
9. Sahabat kecilku Nurul, Zulfia, dan Ayu terima kasih atas semangat dan doanya yang telah kalian berikan selama ini.
10. Adik angkatku Alphien terima kasih atas dukungannya.
11. Dan terakhir untuk teman-teman seperjuangan skripsi Debi, Lina, Anti, Puti, Cika, Dytta, Amcan, Indah, Cikul, Tedy, Iyus, dan Agung terima kasih atas motifasinya, semangat, dan doa yang luar biasa hingga kita bisa lulus bersama tahun ini. Sukses untuk kita.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Masukan dan kritikan akan sangat berarti. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca sekalian.

Jakarta, Juli 2015

Dina Rachmadanti

DAFTAR ISI

ABSTRACT	i
ABSTRAK	ii
KATA PENGANTAR	iv
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR GAMBAR	ix
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Permasalahan	3
1.3 Pembatasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penulisan	3
1.5 Manfaat Penulisan	4
1.6 Metode Penelitian	4
II LANDASAN TEORI	5
2.1 Teori Graf	5
2.1.1 Graf <i>de Bruijn</i> atau Graf DNA	8
2.2 <i>Sequencing by Hybridization</i>	9
2.3 Struktur Aljabar	14
2.3.1 Grup	14
2.3.2 Grup Permutasi	15

2.3.3	Koset dan Teorema Lagrange	20
2.3.4	Grup Aksi	24
2.3.5	Burnside Lemma	25
2.3.6	<i>Cycle Index</i>	32
2.3.7	Persediaan Pola (<i>Pattern Inventory</i>)	35
2.3.8	Isomorfisma Grup	42
III PEMBAHASAN		43
3.1	Mengubah Graf DNA Menjadi Graf Pola Utama	43
3.1.1	Mengubah Graf DNA Menjadi Graf Tereduksi	43
3.1.2	Mengubah Graf Tereduksi Menjadi Graf Pola	47
3.1.3	Mengubah Graf Pola Menjadi Graf Pola Utama	49
3.2	Teorema Polya	50
3.2.1	Penggunaan Teorema Polya	54
3.3	Diagram Alir	58
3.4	Aplikasi Program pada Pencarian Banyaknya Graf Pola	60
IV PENUTUP		63
4.1	Kesimpulan	63
4.2	Saran	63
DAFTAR PUSTAKA		64
LAMPIRAN-LAMPIRAN		66

DAFTAR GAMBAR

2.1	Graf G	5
2.2	Graf Berarah	7
2.3	Kemungkinan Simpul	11
2.4	Simpul Dihubungkan dengan Graf Berarah	12
2.5	Graf DNA	13
2.6	Permutasi dari himpunan X	16
2.7	Operasi komposisi permutasi	16
2.8	Jenis-jenis Pewarnaan	36
2.9	Pola P_1	40
2.10	Pola P_2	41
2.11	Pola P_3	41
2.12	Pola P_4	41
3.1	Proses perubahan graf DNA menjadi graf tereduksi	45
3.2	Proses perubahan graf tereduksi menjadi graf pola dan graf pola utama	48
3.3	Graf Pola (a) dan Graf Pola Utama (b)	50
3.4	Graf Pola Utama	54
3.5	Hasil Rotasi dari Graf Pola Utama	55
3.6	Permutasi, <i>Cycle</i> , <i>Tipe Cycle</i> , Bobot, dan <i>Cycle Index</i>	56
3.7	Diagram Alir	59
3.8	Graf Pola Utama setelah diberi label	61
3.9	Contoh input dan output program	62

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

DNA merupakan elemen terpenting dalam kehidupan. Hal tersebut dikarenakan DNA menyimpan informasi genetik yang berguna untuk menentukan struktur protein, pengaturan sel, mempelajari ekspresi suatu gen, identifikasi genetik dan lain sebagainya. Oleh karena peranannya sangat penting, maka pengenalan suatu barisan DNA sangat diperlukan. Pengenalan suatu barisan DNA bukan hal yang mudah karena barisan DNA sangatlah panjang misalnya DNA manusia yang terdiri dari ratusan juta basa. Selain itu, potongan-potongan DNA (fragmen) yang lengkap dapat diperoleh tetapi posisi potongan-potongan tersebut tidak dapat langsung diketahui karena sifat kelengkapan yang dimiliki oleh DNA (Jonathan, 2008). Terdapat metode yang telah dikembangkan untuk mengenali barisan DNA yaitu *Sequencing by Hybridization*. *Sequencing by Hybridization* adalah proses untuk mengenali barisan DNA dengan mencari dan melakukan penyusunan fragmen dengan aturan tertentu. Dalam metode ini dilakukan dua tahap yaitu tahap biokimia dan tahap komputasi.

Pada tahap biokimia, dilakukan proses separasi dan ekstraksi pada jaringan. Kemudian diperoleh fragmen dengan ukuran tertentu. Himpunan dari setiap fragmen disebut spektrum. Fragmen tersusun oleh empat jenis nukleotida yaitu : *Adenin (A)*, *Guanine (G)*, *Cytosyne (C)*, dan *Thymine (T)*.

Pada tahap komputasi, dilakukan pendekatan matematis untuk mengenali barisan DNA. Pendekatan ini dapat dilakukan dengan menggunakan teori graf dengan cara membentuk suatu graf khusus yang menginterpretasikan keterkaitan antara fragmen yang telah diperoleh. Graf khusus tersebut biasa disebut Graf *de Bruijn* atau Graf DNA. Barisan DNA dapat diperoleh dengan mencari jalur Euler pada graf DNA. Jalur Euler merupakan cara menelusuri suatu graf dengan mengunjungi semua busur tepat satu kali.

Dalam teori graf, jalur Euler dari suatu graf belum tentu unik. Jalur Euler yang belum tentu unik terjadi apabila terdapat busur pada graf yang dilewati lebih dari satu kali. Hal ini berlaku pada graf DNA, yang berarti terdapat pengulangan fragmen pada graf DNA yang menyebabkan terbentuknya lebih dari satu barisan DNA berbeda. Graf DNA yang jalur Eulernya belum tentu unik dapat dikarakterisasikan menjadi graf pola utama. Mengkarakterisasikan graf DNA menjadi graf pola utama berguna untuk memudahkan dalam mengidentifikasi barisan DNA. Untuk memperoleh suatu graf pola utama, graf DNA disederhanakan menjadi graf tereduksi. Selanjutnya graf tereduksi akan diubah menjadi graf pola dan graf pola utama diperoleh dengan menyederhanakan graf pola.

Setiap barisan DNA memiliki graf pola utama yang sesuai dengan graf DNA-nya. Graf pola utama berasal dari graf pola dengan jumlah tertentu. Untuk menghitung banyaknya graf pola dapat diselesaikan menggunakan Teorema Polya. Teorema Polya merupakan teorema yang digunakan untuk menyelesaikan masalah enumerasi yang mempelajari pengaturan objek-objek yang berkisar pada persoalan pencacahan atau klasifikasi dari suatu pengaturan.

Penelitian sebelumnya, Chang (2007) menerapkan metode *sequencing by hybridization* untuk mengenali dan mengkarakterisasikan pola pengulangan pada graf DNA menjadi graf pola utama. Sementara itu, Purnomo (2010) menerapkan

Teorema Polya untuk menyelesaikan masalah enumerasi pada graf sederhana. Dalam tulisan ini akan dibahas kembali bagaimana cara mengkarakterisasikan graf DNA menjadi graf pola utama dan mengaplikasikan Teorema Polya untuk menyelesaikan masalah enumerasi pada graf DNA yaitu untuk menghitung banyaknya graf pola dari graf pola utama.

1.2 Permasalahan

Perumusan masalah yang akan dibahas adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana cara mengkarakterisasikan graf DNA menjadi graf pola utama?
2. Bagaimana menghitung banyaknya graf pola dari graf pola utama dengan Teorema Polya?

1.3 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah dalam penulisan ini adalah :

1. Graf DNA yang dibahas adalah graf DNA yang terdapat pengulangan fragmen saat ditelusuri jalur Euler.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah :

1. Mendapatkan graf pola utama yang sesuai dengan graf DNA-nya.
2. Mengaplikasikan Teorema Polya dalam menghitung banyaknya graf pola.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari penulisan ini adalah memperoleh informasi bagaimana penggunaan teori graf dalam bidang biomedik untuk mengenali barisan DNA, bagaimana mengkarakterisasikan graf DNA, dan bagaimana penggunaan Teorema Polya untuk menentukan banyaknya graf pola.

1.6 Metode Penelitian

Penulisan ini merupakan kajian teori dalam bidang matematika diskrit dan aljabar abstrak yang didasarkan pada buku-buku dan jurnal-jurnal tentang teori permasalahan di bidang biomedik. Referensi utama yang digunakan Hsun-Wen Chang dan Tsai (2007) yaitu *Characterizing The Reconstruction And Enumerating The Patterns Of DNA Sequences With Repeat*.

BAB II

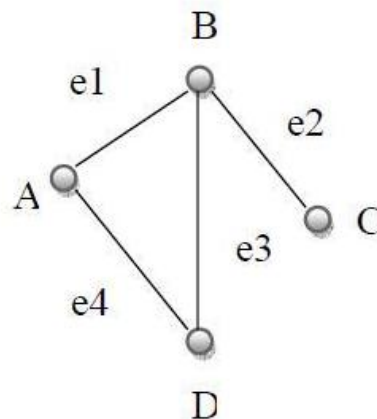
LANDASAN TEORI

2.1 Teori Graf

Definisi 2.1.1. (West, 1996)

Suatu graf G adalah pasangan (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong yang anggotanya disebut simpul-simpul (*vertex*), dan E adalah suatu himpunan (boleh kosong) dari pasangan tak-terurut dari simpul-simpul yang berbeda pada V yang disebut busur (*edge*).

Contoh 2.1.1. Pada Contoh dibawah graf G terdiri dari himpunan simpul $V = \{A, B, C, D\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dimana $e_1 = (A, B) = (B, A)$, $e_2 = (B, C) = (C, B)$, $e_3 = (B, D) = (D, B)$, $e_4 = (A, D) = (D, A)$.



Gambar 2.1: Graf G

Definisi 2.1.2. *Adjacent* dan *Incidence* (West, 1996)

Dua simpul v_1 dan v_2 dikatakan *adjacent* (bertetangga) jika dan hanya jika terdapat busur e yang menghubungkan kedua simpul tersebut dan busur e dikatakan *incidence* (hadir) pada v_1 dan v_2 .

Contoh 2.1.2. Dalam graf pada Gambar 2.1 simpul A dan B bertetangga, simpul e_1 hadir pada simpul A dan B .

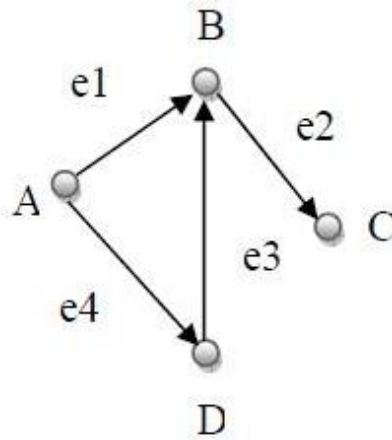
Matriks yang menyatakan hubungan antara simpul dalam sebuah graf disebut matriks ketetanggaan. Elemen dalam suatu matriks ketetanggaan A , yaitu a_{ij} menyatakan banyaknya busur yang menghubungkan v_i dan v_j , $v \in V$. Untuk lebih jelas perhatikan Gambar 2.1

Dari Gambar 2.1, diperoleh matriks ketetanggaan yaitu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.1.3. Graf Berarah (West, 1996)

Suatu graf berarah atau *digraph* G mengandung sebuah himpunan simpul $V(G)$ dan sebuah himpunan busur berarah $E(G)$, dimana setiap busur adalah anggota dari $V \times V$. Suatu busur berarah e yang mengandung simpul u ke simpul v dinyatakan sebagai pasangan terurut (u, v) .



Gambar 2.2: Graf Berarah

Derajat dalam graf berarah dibagi menjadi 2, yaitu derajat masuk (*in-degree*) dan derajat keluar (*out-degree*). Derajat masuk dari suatu simpul adalah banyaknya kepala yang ada pada simpul tersebut, sedangkan derajat keluar dari suatu simpul adalah banyaknya ekor yang ada pada simpul tersebut. Notasi $d(v)$ menyatakan derajat (banyaknya busur yang hadir) pada simpul v .

Contoh 2.1.3. Pada Gambar 2.2 menunjukkan sebuah graf berarah terdiri dari 4 simpul (A, B, C, D) dan 4 busur (e_1, e_2, e_3, e_4). Simpul A memiliki derajat masuk sebanyak 0, dan derajat keluar sebanyak 2. Busur berarah e_1 memiliki kepala yaitu simpul B dan ekor simpul A .

Definisi 2.1.4. Jalur Euler (Wilson, 1996)

Misalkan $G(V, E)$ adalah suatu graf. Suatu jalur yang melewati semua busur di G tepat satu kali disebut Jalur Euler. Graf yang memiliki jalur euler disebut graf euler.

Contoh 2.1.4. Graf yang ditunjukkan pada Gambar 2.1 merupakan graf sederhana-

na tidak berarah yang memiliki tiga jalur euler yaitu $\{C, e_2, B, e_1, A, e_4, D, e_3, B\}$, $\{B, e_3, D, e_4, A, e_1, B, e_2, C\}$ dan $\{B, e_1, A, e_4, D, e_3, B, e_2, C\}$.

2.1.1 Graf *de Bruijn* atau Graf DNA

Dalam teori graf, suatu graf *de Bruijn* berdimensi n dari m simbol adalah suatu graf berarah yang merepresentasikan tumpang-tindih antara barisan simbol. Graf *de Bruijn* memiliki m^n simpul, termasuk semua barisan dengan panjang n yang mungkin dari simbol yang diberikan, simbol yang sama dapat muncul beberapa kali dalam barisan. Jika terdapat m simbol s_1, s_2, \dots, s_m maka himpunan simpulnya adalah: $V : \{(s_1, \dots, s_1, s_1), (s_1, \dots, s_1, s_2), \dots, (s_1, \dots, s_1, s_m), (s_1, \dots, s_2, s_1), \dots, (s_m, \dots, s_m, s_m)\}$

Jika salah satu simpul dapat diekspresikan dengan menggeser semua simbol dengan simbol paling kiri dan menambahkan simbol baru pada akhir dari simpul lain. Jadi himpunan busur berarahnya adalah:

$$E : \{((V_1, V_2, \dots, V_n), (W_1, W_2, \dots, W_n)) : V_2 = W_1, V_3 = W_2, \dots, V_n = W_{n-1}\}$$

Dalam kasus pembentukan graf DNA maka konsep berikut dapat digunakan.

Misalkan diberikan l -spektrum yang diperoleh dari hasil ekstrasi jaringan. Proses pembentukan graf DNA dilakukan sebagai berikut. Semua fragmen yang ada pada l -spektrum direpresentasikan dengan busur berarah. Busur berarah x dan y bertetangga jika $l - 1$ fragmen paling kanan dari label busur berarah x sama dengan $l - 1$ fragmen paling kiri label busur berarah y .

2.2 *Sequencing by Hybridization*

Tubuh manusia tersusun dari molekul-molekul DNA (*deoxyribonucleic acid*). DNA merupakan asam nukleat yang berisi instruksi genetik yang digunakan dalam perkembangan semua makhluk hidup. Peran utama DNA adalah penyimpanan informasi genetik. DNA adalah suatu untai ganda dimana untainya merupakan barisan dari empat nukleotida yaitu Adenin, Guanin, Citosinin, dan Timin.

Barisan DNA tidak mudah dikenali. Hal ini dikarenakan barisan DNA merupakan barisan yang sangat panjang yang terdiri dari ratusan juta basa. Diperlukan suatu metode untuk mengenali barisan DNA. Salah satu metode yang digunakan adalah metode *Sequencing by Hybridization* yang pertama kali diperkenalkan tahun 1988 (Chang, 2007). *Sequencing by Hybridization* adalah proses untuk mengenali barisan DNA. Terdapat dua tahapan yang digunakan dalam metode ini, yaitu tahapan biokimia dan tahapan komputasi.

Pada tahap biokimia, dilakukan proses separasi dan ekstraksi pada jaringan. Kemudian diperoleh fragmen DNA dengan ukuran tertentu, dimana himpunan dari setiap fragmen DNA disebut spektrum. Sedangkan pada tahap komputasi, dilakukan pendekatan matematis untuk mengenali barisan DNA dari fragmen yang dihasilkan pada tahap biokimia. Pendekatan ini dapat dilakukan dengan menggunakan teori graf dengan cara membentuk suatu graf khusus yaitu Graf *de Bruijn* atau Graf DNA. Barisan DNA tersebut dapat diperoleh dengan mencari jalur Euler pada graf DNA.

Berikut adalah proses pembentukan graf DNA:

1. Melalui tahap biokimia diperoleh spektrum dengan fragmen sebagai berikut
 $S: \{ \text{CATA, ATAG, TAGG, AGGA, GGAT, GATA, TAGA, AGAA, GAAT, AATA, TAGT} \}.$

2. Selanjutnya, tahap komputasi akan dibentuk graf DNA. Adapun langkahnya sebagai berikut:

- (a) Tentukan semua kemungkinan simpul yang digunakan yaitu 4^n , dimana 4 adalah nukleotida penyusun DNA dan n adalah kemungkinan dari suatu panjang spektrum. Karena pada contoh kasus ini panjang spektrum yang digunakan adalah 3, maka jumlah simpulnya $4^n = 4^3 = 64$, yaitu $P = \{AAA, AAT, \dots, CCC\}$. Perhatikan Gambar 2.3
- (b) Lalu periksa antar dua simpul. Apabila dua simpul tersebut membentuk potongan fragmen yang urutan basanya ekuivalen dengan anggota spektrum, maka hubungkan dua simpul tersebut dengan graf berarah. Misalkan, simpul CAT dan simpul ATA yang apabila dihubungkan membentuk CATA yang merupakan anggota dari himpunan spektrum. Perhatikan Gambar 2.4.

Untuk memudahkan dalam proses pembentukan graf DNA konsep yang telah dibahas pada Subbab 2.1.1 dapat diterapkan, yaitu: *Busur berarah x dan y bertetangga jika $l-1$ fragmen paling kanan dari label busur berarah x sama dengan $l-1$ fragmen paling kiri label busur berarah y .*

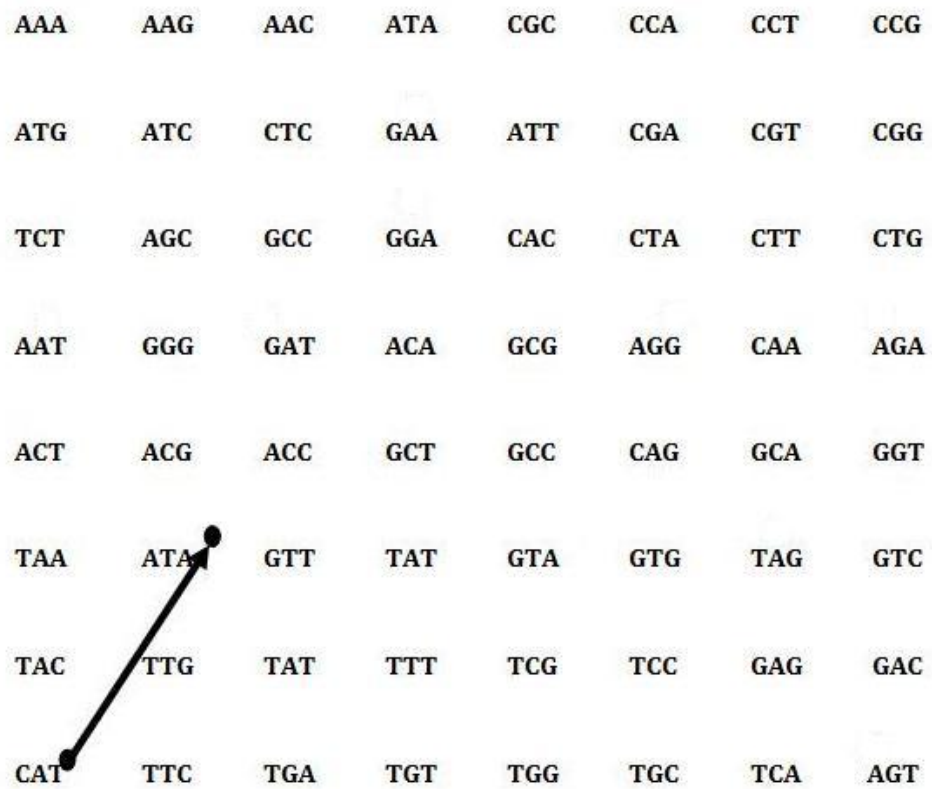
- (c) Lakukan langkah serupa hingga seluruh potongan fragmen yang ada di himpunan S saling terhubung. Buanglah simpul yang tidak digunakan. Perhatikan Gambar 2.5
- (d) Setelah dihasilkan graf DNA dimana busur pada graf menginterpretasikan fragmen DNA, langkah selanjutnya adalah menentukan jalur Euler untuk memperoleh barisan DNA. Namun jalur Euler pada graf DNA Gambar 2.5 tidak unik karena saat melakukan penelusuran semua busur untuk membentuk barisan DNA terdapat busur ATAG yang

dilewati 3 kali. Artinya, terdapat beberapa kemungkinan barisan DNA dapat terbentuk.

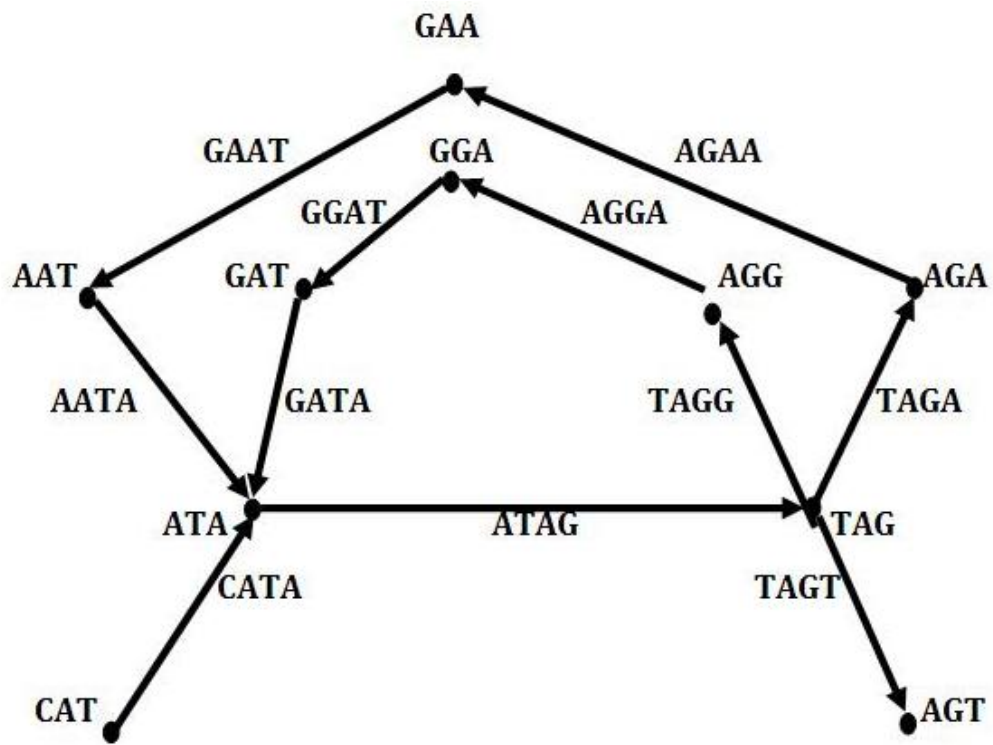
Untuk memudahkan dalam proses identifikasi barisan DNA, pengulangan busur pada graf DNA dapat dikarakterisasikan menjadi graf pola utama. Graf pola utama diperoleh dengan menyederhanakan graf DNA menjadi graf tereduksi. Selanjutnya diubah menjadi graf pola dan disederhanakan menjadi graf pola utama. Proses tersebut akan dijelaskan pada bab selanjutnya.

<i>AAA</i>	<i>AAG</i>	<i>AAC</i>	<i>ATA</i>	<i>CGC</i>	<i>CCA</i>	<i>CCT</i>	<i>CCG</i>
<i>ATG</i>	<i>ATC</i>	<i>CTC</i>	<i>GAA</i>	<i>ATT</i>	<i>CGA</i>	<i>CGT</i>	<i>CGG</i>
<i>AGT</i>	<i>AGC</i>	<i>GGC</i>	<i>GGA</i>	<i>CAC</i>	<i>CTA</i>	<i>CTT</i>	<i>CTG</i>
<i>AAT</i>	<i>GGG</i>	<i>GAT</i>	<i>ACA</i>	<i>GCG</i>	<i>AGG</i>	<i>CAA</i>	<i>AGA</i>
<i>ACT</i>	<i>ACG</i>	<i>ACC</i>	<i>GCT</i>	<i>GGT</i>	<i>GCC</i>	<i>CAG</i>	<i>GCA</i>
<i>TAA</i>	<i>ATA</i>	<i>GTT</i>	<i>TAT</i>	<i>GTA</i>	<i>TAG</i>	<i>GTG</i>	<i>GTC</i>
<i>TAC</i>	<i>TTG</i>	<i>TAT</i>	<i>TTT</i>	<i>TCG</i>	<i>TCC</i>	<i>GAG</i>	<i>GAC</i>
<i>CAT</i>	<i>TTC</i>	<i>TGA</i>	<i>TGT</i>	<i>TGG</i>	<i>TGC</i>	<i>TCA</i>	<i>TCT</i>

Gambar 2.3: Kemungkinan Simpul



Gambar 2.4: Simpul Dihubungkan dengan Graf Berarah



Gambar 2.5: Graf DNA

2.3 Struktur Aljabar

2.3.1 Grup

Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah aturan yang mengawankan setiap pasangan terurut $(a, b) \in S \times S$ dengan tepat satu elemen di S . Suatu himpunan berhingga jika dikenakan operasi biner padanya dan memenuhi syarat-syarat tertentu akan membentuk suatu grup.

Definisi 2.3.1. Grup

Suatu himpunan G beserta operasi binernya, $*$, disebut grup jika dan hanya jika memenuhi kondisi:

1. G tertutup terhadap operasi $*$, yaitu $x, y \in G \Rightarrow (x * y) \in G$.
2. Operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu $(x * y) * z = x * (y * z) \forall x, y, z \in G$
3. $\exists e \in G \ni e * x = x * e \forall x \in G$ Elemen e disebut identitas dari G
4. $\forall x \in G, \exists x^{-1} \in G$ dimana $x^{-1} * x = x * x^{-1} = e$ (setiap elemen di G mempunyai invers

Contoh 2.3.1. Himpunan bilangan bulat (Z) akan membentuk grup terhadap operasi penjumlahan, disimbolkan $\langle Z, + \rangle$. Elemen netral grup tersebut adalah 0 dan invers dari a adalah $-a$ untuk setiap $a \in Z$.

Sebuah himpunan pastilah mempunyai himpunan bagian, paling tidak himpunan kosong. Himpunan bagian dari suatu grup dapat membentuk grup apabila diberikan operasi yang sama dengan grupnya masih memenuhi sifat-sifat grup.

Definisi 2.3.2. Subgrup

Jika G grup dan $H \subset G$ maka H dinamakan subgrup apabila H merupakan grup terhadap operasi yang didefinisikan pada G ,

2.3.2 Grup Permutasi

Suatu fungsi dari himpunan A ke B adalah aturan yang mengawankan setiap anggota $a \in A$ tepat satu anggota $b \in B$. Ada tiga sifat dalam fungsi, yaitu injektif, surjektif, dan bijektif.

Definisi 2.3.3. Permutasi

Suatu permutasi di himpunan A adalah sebuah fungsi satu-satu pada (bijektif) dari A ke A .

Contoh 2.3.2. Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$. Salah satu permutasi dari A adalah

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Artinya fungsi α memetakan elemen 1 ke 1, elemen 2 ke 2, dan elemen 3 ke 3.

Di atas telah dijelaskan bahwa grup terbentuk dari suatu himpunan yang apabila diberikan suatu operasi biner kepadanya memenuhi syarat-syarat grup. Tak terkecuali himpunan yang anggota-anggotanya merupakan fungsi dari A ke B juga dapat membentuk grup.

Definisi 2.3.4. Grup Simetris

Misalkan A suatu himpunan hingga. Grup yang beranggotakan semua permutasi dari A dinamakan grup simetris dan disimbolkan dengan S_n . Grup simetri S_n memuat elemen sebanyak $n!$

Contoh 2.3.3. Akan dibuktikan bahwa himpunan S_3 terhadap operasi komposisi merupakan grup simetri.

Berikut adalah permutasi-permutasi dari himpunan $X = \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{array}{lll} \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.6: Permutasi dari himpunan X

Sehingga $S_3 = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \sigma, \theta\}$. Operasi yang didefinisikan pada S_3 adalah komposisi. Hasil operasi keenam operasi permutasi tersebut dapat disajikan pada Gambar 2.7 :

\circ	α	β	γ	ε	σ	θ
α	α	β	γ	ε	σ	θ
β	β	α	θ	σ	ε	γ
γ	γ	ε	α	β	θ	σ
ε	ε	γ	σ	θ	β	α
σ	σ	θ	ε	γ	α	β
θ	θ	σ	β	α	γ	ε

Gambar 2.7: Operasi komposisi permutasi

1. Dari Gambar 2.7 terlihat untuk sebarang $x, y \in S_3$ mengakibatkan $x \circ y \in S_3$. Jadi sifat tertutup terpenuhi.
2. Dari Gambar 2.7 terlihat untuk sebarang $x, y, z \in S_3$ berlaku $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. Jadi sifat asosiatif terpenuhi.

3. Ambil sebarang $x \in S_3$. Jelas $\alpha \in S_3$. Dari Gambar 2.7 terlihat $x \circ \alpha = \alpha \circ x = x$. Jadi α merupakan elemen netral di S_3 .
4. Dari Gambar 2.7 jelas terlihat $\alpha \circ \alpha = \alpha$, $\beta \circ \beta = \alpha$, $\gamma \circ \gamma = \alpha$, $\varepsilon \circ \theta = \alpha$, $\sigma \circ \sigma = \alpha$, dan $\theta \circ \varepsilon = \alpha$. Jelas $\forall x \in S_3$ terdapat $x^{-1} \in S_3$ sehingga $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = \alpha$. Jelas $\forall x \in S_3$ mempunyai invers di S_3 .

Dari 1-4 disimpulkan $\langle S_3, \circ \rangle$ grup simetri.

Suatu permutasi kadang memetakan semua anggotanya ke anggota yang identik terlihat pada Contoh 2.3.3. Tetapi ada juga yang hanya memetakan ke beberapa anggota yang identik. Permutasi-permutasi semacam itu dalam suatu grup mempunyai kedudukan yang penting, seperti terlihat pada definisi di bawah ini.

Definisi 2.3.5. Orbit, Penstabilan, dan Karakter Permutasi

Apabila G adalah subgrup dari grup simetri S_n dan untuk $x \in X$, maka:

1. $Gx = \{g(x) : g \in G\}$ yaitu himpunan semua bayangan elemen $x \in X$ oleh permutasi g di G . Gx disebut orbit x terhadap G .
2. $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$ adalah himpunan semua permutasi di G yang mengakibatkan x sebagai titik tetap. Himpunan G_x disebut penstabil x di G .
3. $F(g) = \{z \in X : g(z) = z\}$ adalah himpunan semua titik-titik tetap dari permutasi $g \in G$. Himpunan $F(g)$ disebut karakter permutasi g di himpunan X .

Contoh 2.3.4. Misal $X = \{1, 2, 3\}$ dan $G = \{\alpha, \varepsilon, \theta\}$ subgrup dari S_3 . Orbit x terhadap G , penstabil x di G , dan karakter permutasi g di himpunan X sebagai berikut.

1. Orbit x terhadap G yaitu $Gx = \{g(x) : g \in G\}$

Orbit 1 terhadap G :

$$G1 = \{g(1) : g \in G\} = \{\alpha(1), \varepsilon(1), \theta(1)\} = \{1, 3, 2\}$$

Orbit 2 terhadap G :

$$G2 = \{g(2) : g \in G\} = \{\alpha(2), \varepsilon(2), \theta(2)\} = \{2, 1, 3\}$$

Orbit 3 terhadap G :

$$G3 = \{g(3) : g \in G\} = \{\alpha(3), \varepsilon(3), \theta(3)\} = \{3, 2, 1\}$$

2. Penstabil x di G yaitu $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$

Penstabil 1 di G :

$$G_1 = \{g \in G : g(1) = 1\} = \{\alpha\}$$

Penstabil 2 di G :

$$G_2 = \{g \in G : g(2) = 2\} = \{\alpha\}$$

Penstabil 3 di G :

$$G_3 = \{g \in G : g(3) = 3\} = \{\alpha\}$$

3. Karakter permutasi g di himpunan X yaitu $F(g) = \{z \in X : g(z) = z\}$

Karakter permutasi α di himpunan X :

$$F(\alpha) = \{z \in X : \alpha(z) = z\} = \{1, 2, 3\}$$

Karakter permutasi ε di himpunan X :

$$F(\varepsilon) = \{z \in X : \varepsilon(z) = z\} = \{\}$$

Karakter permutasi θ di himpunan X :

$$F(\theta) = \{z \in X : \theta(z) = z\} = \{\}$$

Dari contoh di atas jelas terlihat bahwa setiap elemen netral dari suatu subgrup permutasi merupakan penstabil pada grup tersebut.

Grup-grup yang terbentuk dari suatu himpunan pastilah mempunyai anggota. Banyaknya anggota dari grup tersebut ada yang hingga, tetapi ada juga yang tak hingga. Sebagai contoh $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ adalah grup yang banyak anggotanya tak hingga, sedangkan $\langle S_3, \circ \rangle$ adalah grup yang banyak anggotanya hingga.

Definisi 2.3.6. Grup Berhingga

Grup G disebut grup berhingga jika memiliki sejumlah berhingga anggota. Banyaknya anggota dalam grup G disebut order G dan disimbolkan dengan $|G|$.

Contoh 2.3.5. Grup simetri S_3 merupakan grup berhingga. Sebab banyak anggota atau order dari S_3 adalah $|S_3| = 6$.

2.3.3 Koset dan Teorema Lagrange

Pemahaman mengenai koset diperlukan untuk mengkaji keterkaitan antara orde suatu grup dengan orde subgrupnya. Keterkaitan itu kemudian dinyatakan dalam sebuah teorema, yaitu Teorema Lagrange.

Definisi 2.3.7. Koset

Jika H adalah subgrup dari grup G dan g adalah anggota G maka: $gH = \{gh : h \in H\}$ disebut koset kiri H terhadap g dan $Hg = \{hg : h \in H\}$ disebut koset kanan H terhadap g .

Contoh 2.3.6. Misalkan $H = \{\alpha, \varepsilon, \theta\}$ dan $\langle H, \circ \rangle$, subgrup dari $G = \langle_3, \circ \rangle$. Koset kiri dan kanan H terhadap G yaitu

1. Koset kiri H terhadap G

$$\begin{aligned}\alpha H &= \{\alpha, \varepsilon, \theta\} = \varepsilon H = \theta H \\ \beta H &= \{\beta, \sigma, \gamma\} = \sigma H = \gamma H\end{aligned}$$

2. Koset kanan H terhadap G

$$\begin{aligned}H\alpha &= \{\alpha, \varepsilon, \theta\} = H\varepsilon = H\theta \\ H\beta &= \{\beta, \sigma, \gamma\} = H\sigma = H\gamma\end{aligned}$$

Jadi banyaknya koset kiri dan kanan adalah dua.

Dari Contoh 2.3.6 terlihat bahwa sebuah grup akan dipartisi menjadi koset-koset kiri (kanan) dari subgrupnya.

Definisi 2.3.8. Kelas

Kumpulan dari himpunan koset kiri (kanan) H yang berbeda dari grup G akan membentuk partisi grup G , yaitu:

1. Setiap anggota G akan berada paling sedikit pada satu koset kiri (kanan) H .
2. Dua koset kiri (kanan) yang berbeda tidak memiliki anggota yang sama.

Partisi yang mempunyai sifat seperti ini disebut kelas.

Contoh 2.3.7. Perhatikan Contoh 2.3.6 koset kiri dan kanan yang terbentuk yaitu:

1. Koset kiri H terhadap G

$$\begin{aligned}\alpha H &= \{\alpha, \varepsilon, \theta\} = \varepsilon H = \theta H \\ \beta H &= \{\beta, \sigma, \gamma\} = \sigma H = \gamma H\end{aligned}$$

2. Koset kanan H terhadap G

$$\begin{aligned}H\alpha &= \{\alpha, \varepsilon, \theta\} = H\varepsilon = H\theta \\ H\beta &= \{\beta, \sigma, \gamma\} = H\sigma = H\gamma\end{aligned}$$

Sehingga kelas-kelasnya adalah αH dan βH

Sebelum memahami Teorema Lagrange terlebih dahulu dipahami tentang Hukum Kanselasi Kiri dan Kardinalitas suatu himpunan, sebagaimana tercantum pada teorema di bawah ini.

Teorema 2.3.1. Hukum Kanselasi Kiri

Misalkan $\langle G, * \rangle$ grup dan $a, b, c \in G$. Hukum Kanselasi Kiri adalah jika $a*b = a*c$ maka $b = c$.

Bukti. Ambil sebarang $a, b, c \in G$ dengan $a*b = a*c$. Jelas karena G grup maka terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga $a^{-1} * a = e$. Diperoleh

$$\begin{aligned} a * b = a * c &\Leftrightarrow a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c) \\ &\Leftrightarrow (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c \\ &\Leftrightarrow e * b = e * c \\ &\Leftrightarrow b = c \end{aligned}$$

Jadi terbukti jika $a * b = a * c$ maka $b = c$ dan Hukum Kanselasi Kiri berlaku pada grup. \square

Teorema 2.3.2. Kardinalitas

Jika H adalah subgrup dari grup G dan $|H| = k$ maka setiap koset kiri (kanan) H memiliki kardinalitas k .

Bukti. Buat pemetaan $\varphi : H \rightarrow gH$ dengan $\varphi(h) = gh, \forall h \in H$ dan $g \in G$. Akan ditunjukkan φ bijektif.

1. Ambil sebarang $h_1, h_2 \in H$ dengan $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$. Maka $gh_1 = gh_2$. Berdasarkan hukum kanselasi kiri diperoleh $h_1 = h_2$. Jadi jika $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$ maka $h_1 = h_2$ sehingga φ injektif.
2. Ambil sebarang $y \in gH$. Maka $y = gh_0$ untuk suatu $h_0 \in H$. Pilih $x = h_0$. Diperoleh $\varphi(x) = \varphi(h_0) = gh_0 = y$

Jadi $\forall y \in gH$ terdapat $x \in H$ dengan $\varphi(x) = y$ sehingga φ surjektif. Berdasarkan 1 dan 2 dapat disimpulkan bahwa φ bijektif sehingga H dan gH mempunyai elemen yang sama banyak. Sehingga jika $|H| = k$ maka $|gH| = k$ untuk setiap $g \in G$. Jadi setiap koset kiri H memiliki kardinalitas yang sama. Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa H juga mempunyai elemen yang sama banyaknya dengan Hg untuk setiap $g \in G$. \square

Contoh 2.3.8. Perhatikan Contoh 2.3.6. Jelas $|H| = 3$ dan $|\alpha H| = |\beta H| = |H\alpha| = |H\beta| = 3$. Jadi setiap koset kiri dan kanan H memiliki kardinalitas 3.

Teorema 2.3.3. Lagrange

Order grup berhingga dapat dibagi oleh order sembarang subgrupnya.

Bukti. Misal $H \subset G$ dengan $|G| = n$ dan $|H| = m$. Akan ditunjukkan $m|n$. Karena G berhingga maka terdapat sejumlah berhingga koset kiri dari H , namakan g_1H, g_2H, \dots, g_rH . Berdasarkan Teorema Kardinalitas $|g_1H| = |g_2H| = \dots = |g_rH| = m$. Karena g_iH untuk $i = 1, 2, \dots, r$ membentuk partisi pada G maka

$$\begin{aligned} |g_1H| + |g_2H| + \dots + |g_rH| &= n \Leftrightarrow m + m + \dots + m = n \\ &\Leftrightarrow rm = n \end{aligned}$$

Jadi $m|n$. \square

Jadi order grup berhingga dapat dibagi oleh order sembarang grup bagiannya.

Contoh 2.3.9. Misalkan $\langle H, \circ \rangle$ subgrup $\langle S_3, \circ \rangle$ dengan $S_3 = G = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \sigma, \theta\}$ dan $H = \{\alpha, \varepsilon, \theta\}$.

Jelas $|G| = 6$ dan $|H| = 3$.

Sehingga $\frac{|G|}{|H|} = \frac{6}{3} = 2$.

Jadi order G dapat dibagi dengan order H .

2.3.4 Grup Aksi

Grup dapat diterapkan pada himpunan. Hal tersebut bergantung dari operasi biner yang membangun grup tersebut. Selanjutnya akan didefinisikan sebuah operasi biner yang mengawankan dua elemen menggunakan *Cartesian Product*.

Didefinisikan pemetaan $*$: $A \times B \rightarrow C$ dengan operasi biner $*$: $a * b = c$ untuk $a \in A$, $b \in B$, dan $c \in C$.

Ini berarti sebarang elemen $a \in A$ dipasangkan dengan elemen $b \in B$ akan menghasilkan elemen $c \in C$. Sekarang pandang $A = G$, $B = X$, dan $C = X$ dimana G adalah grup dan X adalah himpunan. Diperoleh pemetaan $*$: $G \times X \rightarrow X$ dengan operasi biner $*$: $g * x = y$ untuk $g \in G$ dan $x, y \in X$.

Definisi 2.3.9. Grup Aksi

Misalkan X adalah suatu himpunan dan G adalah grup. Aksi dari G pada X (grup G yang beraksi pada X) adalah pemetaan $*$: $G \times X \rightarrow X$ dengan $g * x = y \Leftrightarrow gx = y$ untuk $g \in G$ dan $x, y \in X$, yang memenuhi:

1. $e(x) = x$ untuk semua $x \in X$.
2. $(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2(x))$ untuk semua $x \in X$ dan semua $g_1, g_2 \in G$.

Jika memenuhi syarat diatas, X disebut $G - Set$.

Contoh 2.3.10. Misalkan himpunan $X = \{1, 2, 3\}$ dan $H = \{\alpha, \varepsilon, \theta\}$ grup. Akan ditunjukkan bahwa X adalah $H - set$

Buat pemetaan $*$: $H \times X \rightarrow X$, dengan $hx = y$ untuk $h \in H$ dan $x, y, \in X$

1. Ambil sebarang $x \in X$.

Jelas $\alpha \in H$ dan $\alpha(x) = x$ untuk setiap $x \in X$.

Jadi $\forall x \in X$ terdapat $e = \alpha \in H$ yang sifat $e(x) = \alpha(x) = x$.

2. Ambil sebarang $x \in X$.

Karena H adalah grup yang terbentuk dari operasi komposisi maka untuk setiap $f, g \in H$ berlaku: $(fg)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Jadi untuk setiap $x \in X$ dan $f, g \in H$ berlaku $(fg)(x) = f(g(x))$.

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan X adalah $H - Set$.

2.3.5 Burnside Lemma

Burnside lemma adalah suatu lemma yang mendasari suatu jenis teknik perhitungan kombinatorik yang bernama *Polya Enumeration*. Untuk lebih memahami Burnside Lemma terlebih dahulu akan dijelaskan tentang teorema penstabil dan teorema orbit-penstabil.

Teorema 2.3.4. G_x subgrup G

Jika X adalah $G - Set$ maka G_x adalah subgrup dari G untuk setiap $x \in X$.

Bukti. Jelas $G_x \subset G$. Ambil sembarang $x \in X$ dan $g_1, g_2, g_3 \in G_x$.

1. Karena $g_1, g_2 \in G_x$ maka $g_1(x) = x$ dan $g_2(x) = x$. Akibatnya $(g_1g_2)(x) = g_1(g_2(x)) = g_1(x) = x$. Jadi $g_1g_2 \in G_x$ sehingga G_x tertutup terhadap operasi biner atas G .
2. Jelas $e(x) = x$ sehingga $e \in G_x$. Jadi G_x mempunyai elemen netral yaitu e .

3. Ambil sembarang $g \in G_x$. Jika $g \in G_x$ maka $g(x) = x$. Sehingga $x = e(x) = (g^{-1}g)(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(x)$. Akibatnya $g^{-1} \in G_x$. Jadi $\forall g \in G_x$ terdapat $g^{-1} \in G_x$ sehingga $g^{-1}g = e$.
4. Jelas $g_1(g_2g_3)(x) = g_1k(x) = g_1(k(x)) = g_1(x) = x$ dan $(g_1g_2)g_3(x) = lg_3(x) = l(g_3(x)) = l(x) = x$. Jadi $g_1(g_2g_3)(x) = (g_1g_2)g_3(x)$.

Dari 1, 2, 3, 4 disimpulkan G_x subgrup G . □

Teorema 2.3.5. Orbit-Penstabil

Jika X adalah $G - Set$ dan $x \in X$ maka :

1. $\forall x \in X$. (Teorema Orbit-Penstabil)

$$\begin{aligned} |Gx| \cdot |G_x| &= |G| \\ \Leftrightarrow |Gx| &= \frac{|G|}{|G_x|} \end{aligned}$$

2. $\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |F(g)|$

Bukti. 1. Ide utama dari Teorema Orbit-Penstabil adalah, apabila satu elemen pada Gx dapat dipetakan tepat satu elemen pada $\frac{G}{G_x}$, atau dengan kata lain ditunjukkan pemetaan $*$: $Gx \rightarrow \frac{G}{G_x}$ adalah pemetaan bijektif. Buat pemetaan $\varphi : Gx \rightarrow \frac{G}{G_x}$. Misalkan $r = \frac{|G|}{|G_x|}$. Berdasarkan Teorema 2.3.4 diperoleh G_x subgrup G . Berdasarkan Teorema Kardinalitas juga diperoleh $|G_x| = |gG_x|, \forall g \in G$. Sehingga

$$\frac{|G|}{|G_x|} = r = \frac{|G|}{|gG_x|}$$

Jelas

$$\begin{aligned} \frac{|G|}{|gG_x|} = r &\Leftrightarrow |G| = r \cdot |gG_x| \\ &\Leftrightarrow |G| = |g_1G_x| + |g_2G_x| + |g_3G_x| + \dots + |g_rG_x| \end{aligned}$$

Jadi r adalah banyaknya koset kiri G_x terhadap G , sehingga pemetaannya sekarang menjadi $\psi : Gx \rightarrow Y$ dengan $Y = \{g_1G_x, g_2G_x, g_3G_x, \dots, g_rG_x\}$. Ambil $x_1 \in Gx$. Karena $x_1 \in Gx$ maka terdapat $g_1 \in G$ sehingga $g_1x = x_1$. Didefinisikan $\psi(x_1)$ sebagai koset kiri g_1G_x dari G_x , $\psi(x_1) = g_1G_x$. Akan ditunjukkan peta ψ terdefinisi dengan baik (*well-defined*), artinya g_1G_x tunggal. Andaikan $g'_1 = x_1$. Ditunjukkan $g_1G_x = g'_1G_x$. Jelas $g_1x = g'_1x$. Karena $g_1 \in G$ dan G grup maka terdapat $g_1^{-1} \in G$ sehingga

$$\begin{aligned} g_1x = g'_1x &\Leftrightarrow g_1^{-1}(g_1x) = g_1^{-1}(g'_1x) \\ &\Leftrightarrow (g_1^{-1}g_1)x = (g_1^{-1}g'_1)x \\ &\Leftrightarrow ex = (g_1^{-1}g'_1)x \\ &\Leftrightarrow x = (g_1^{-1}g'_1)x \end{aligned}$$

Akibatnya $g_1^{-1}g'_1 \in G_x$. Sehingga

$$\begin{aligned} g_1(g_1^{-1}g'_1) &= (g_1g_1^{-1})g'_1 \\ &= eg'_1 \\ &= g'_1 \in g_1G_x \end{aligned}$$

Karena $g'_1 \in g_1G_x$ maka $g_1G_x = g'_1G_x$. Jadi pemetaan ψ terdefinisi dengan baik (*well-defined*). Buat pemetaan $\psi : Gx \rightarrow Y$ dengan $\psi(x_i) = g_iG_x$.

Ditunjukkan ψ bijektif.

- Ambil sembarang $x_1, x_2 \in Gx$ dengan $\psi(x_1) = \psi(x_2)$. Karena $x_1, x_2 \in Gx$ maka terdapat $g_1, g_2 \in G$ yang memenuhi $x_1 = g_1x$ dan $x_2 = g_2x$. Jelas $\psi(x_1) = \psi(x_2) \Leftrightarrow g_1Gx = g_2Gx$ sehingga $g_2 \in g_1Gx$. Akibatnya $g_2 = g_1g$ untuk suatu $g \in Gx$. Sehingga $x_2 = g_2x = (g_1g)x = g_1(gx) = g_1x = x_1$. Jadi apabila $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ maka $x_1 = x_2$ sehingga ψ injektif.
- Ambil sembarang $y \in Y$. Ini berarti $y = g_iGx$ untuk suatu $g_i \in G$. Jelas $g_ix = x_i \in Gx$. Pilih $x = x_i$. Diperoleh $\psi(x) = \psi(x_i) = g_iGx = y$. Jadi $\forall y \in g_iGx$ terdapat $x \in Gx$ dengan $\psi(x) = y$ sehingga surjektif.

Dapat disimpulkan bahwa ψ pemetaan yang bijektif. Jadi,

$$\begin{aligned} |Gx| = |Y| &\Leftrightarrow |Gx| = r \\ &\Leftrightarrow |Gx| = \frac{|G|}{|gGx|} \\ &\Leftrightarrow |Gx| = \frac{|G|}{|Gx|} \end{aligned}$$

2. Diketahui $G_x : \{g \in G : g(x) = x\}$ dan $F(g) = \{x \in X : g(x) = x\}$. Perhatikan pasangan (g, x) dengan $g(x) = x$, dimana banyaknya pasangan tersebut adalah sebanyak N buah. Jelas pasangan (g, x) ditentukan oleh g dan x . Karena ditentukan oleh g maka untuk setiap $g \in G$ terdapat $|F(g)|$ pasangan. Sehingga

$$\sum_{x \in X} |F(g)| = N$$

Karena ditentukan juga oleh x , maka untuk setiap $x \in X$ terdapat $|G_x|$ pa-

sangan. Sehingga

$$\sum_{x \in X} |G_x| = N$$

Akibatnya

$$\sum_{g \in G} |F(g)| = N = \sum_{x \in X} |G_x|$$

Jadi,

$$\sum_{g \in G} |F(g)| = \sum_{x \in X} |G_x|$$

□

Contoh 2.3.11. Misalkan $X = \{1, 2, 3\}$ dan $\langle G, \circ \rangle$ subgrup $\langle S_3, \circ \rangle$ dengan $G = \{\alpha, \varepsilon, \theta\}$.

1. Untuk $x = 1$, jelas

$$|G1| = |\{g(1) : g \in G\}| = |\{1, 3, 2\}| = 3$$

$$|G_1| = |\{g \in G : g(1) = 1\}| = |\{\alpha\}| = 1$$

$$|G| = 3$$

Sehingga $|G1| \cdot |G_1| = 3 \cdot 1 = 3 = |G|$

Untuk $x = 2$, jelas

$$|G2| = |\{g(2) : g \in G\}| = |\{2, 1, 3\}| = 3$$

$$|G_2| = |\{g \in G : g(2) = 2\}| = |\{\alpha\}| = 1$$

$$|G| = 3$$

Sehingga $|G2| \cdot |G_2| = 3 \cdot 1 = 3 = |G|$

Untuk $x = 3$, jelas

$$|G3| = |\{g(3) : g \in G\}| = |\{3, 2, 1\}| = 3$$

$$|G_3| = |\{g \in G : g(3) = 3\}| = |\{\alpha\}| = 1$$

$$|G| = 3$$

Sehingga $|G3| \cdot |G_3| = 3 \cdot 1 = 3 = |G|$

Jadi, $\forall x \in X$ berlaku $|Gx| \cdot |G_x| = |G|$

$$2. \text{ Jelas, } \sum_{x \in X} |G_x| = |G_1| + |G_2| + |G_3| = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\sum_{g \in G} |F(g)| = |F(\alpha)| + |F(\varepsilon)| + |F(\theta)| = 3 + 0 + 0 = 3$$

$$\text{Sehingga } \sum_{x \in X} |G_x| = 3 = \sum_{g \in G} |F(g)|$$

$$\text{Jadi } \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |F(g)|$$

Burnside Lemma sendiri sebenarnya menjelaskan tentang hubungan antara orbit suatu himpunan dengan grup yang beraksi padanya.

Teorema 2.3.6. Burnside Lemma

Misal G adalah grup permutasi yang beraksi pada X dengan G dan X adalah

hingga. Jika k adalah banyaknya orbit di X pada G , maka:

$$\begin{aligned} k \cdot |G| &= \sum_{g \in G} |F(g)| \\ \Leftrightarrow &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)| \end{aligned}$$

Bukti. Dari Teorema 2.3.5 Orbit-Penstabil diketahui $\forall x \in X, |Gx| \cdot |G_x| = |G|$,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow |G_x| &= \frac{|G|}{|Gx|} \\ \Leftrightarrow \sum_{x \in X} |G_x| &= \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Gx|} \\ \Leftrightarrow \sum_{x \in X} |G_x| &= |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|} \end{aligned} \tag{2.1}$$

dan

$$\Leftrightarrow \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |F(g)| \tag{2.2}$$

Dari persamaan (2.1) dan (2.2) diperoleh

$$\sum_{g \in G} |F(g)| = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|}$$

Misalkan $k = \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|}$, maka

$$\sum_{g \in G} |F(g)| = |G| \cdot k \Leftrightarrow k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$$

Jadi banyaknya orbit di X terhadap G adalah

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$$

□

Contoh 2.3.12. Misalkan $G = \{\alpha, \varepsilon, \theta\}$ grup yang beraksi pada $X = \{1, 2, 3\}$. Jelas $|G| = 3$ dan

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |F(g)| &= |F(\alpha)| + |F(\varepsilon)| + |F(\theta)| \\ &= 3 + 0 + 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Jadi banyaknya orbit di X terhadap G adalah

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)| = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

2.3.6 Cycle Index

Cycle adalah daftar atau urutan angka-angka yang berada dalam tanda kurung, yang dipisahkan oleh koma atau spasi. Dalam suatu permutasi, *cycle* terbentuk dari orbit yang dihasilkan dari permutasi tersebut. Di dalam *cycle* urutan sangat diperhatikan, beda halnya dengan orbit. Sebagai contoh orbit $\{134\} = \text{orbit } \{143\} = \text{orbit } \{341\}$ dan seterusnya. Tetapi, untuk *cycle* $(134) \neq \text{cycle } (341) \neq \text{cycle } (413) \neq$. Definisi *cycle* diberikan sebagai berikut

Definisi 2.3.10. Cycle

Suatu permutasi $\sigma \in S_n$ dinamakan *cycle* (untai) apabila σ paling banyak mempu-

nyai satu orbit yang memuat elemen lebih dari satu. Panjang $cycle(m)$ didefinisikan sebagai banyaknya elemen dalam orbit terbesar.

Contoh 2.3.13. Contoh permutasi:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Orbit dari α adalah $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

Orbit dari β adalah $\{1\}, \{32\}$

Orbit dari θ adalah $\{123\}$

Karena α, β, θ paling banyak mempunyai satu orbit yang memuat lebih dari satu elemen maka α, β, θ merupakan $cycle$. Disimbolkan $\alpha = (1)$, $\beta = (32)$, dan $\theta = (123)$. Sedangkan panjang $cycle$ $\alpha = 1$, $\beta = 2$, dan $\theta = 3$.

$Cycle-cycle$ yang terbentuk ini pastilah mempunyai panjang. Ada yang panjangnya sama dan ada juga yang berbeda. Sehingga hasil kali $cycle$ dari suatu permutasi dapat dikelompokkan berdasarkan panjangnya.

Definisi 2.3.11. Tipe $Cycle$ dan Bobot

Diberikan penyajian $cycle$ (untai) dari f (permutasi suatu himpunan dengan banyak anggota n) yang memuat sebanyak a_1 untai dengan panjang 1, sebanyak a_2 untai dengan panjang 2, sebanyak a_3 untai dengan panjang 3, ..., sebanyak a_i untai

dengan panjang i dan $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$, maka tipe *cycle* f disimbolkan dengan vektor $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ dan bobot f adalah bilangan bulat positif $W = 1^{a_1}2^{a_2}3^{a_3}\dots n^{a_n}$

Contoh 2.3.14. Contoh permutasi

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Jelas *cycle* (123), diperoleh $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1$. Jadi tipe *cycle* $\theta = [a_1, a_2, a_3] = [0, 0, 1]$, dengan bobot $1^{a_1}2^{a_2}3^{a_3} = 1^02^03^1 = 3$.

Dari definisi diatas berakibat definisi sebagai berikut.

Definisi 2.3.12. *Cycle Index*

Misalkan G suatu grup permutasi dengan order m dari suatu himpunan yang banyak anggotanya n dan $g \in G$ bertipe *cycle* $[a_1, a_2, \dots, a_n]$. Jika x_1, x_2, \dots, x_n merupakan sembarang variabel, maka *cycle index* dari G adalah

$$Z_G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{m} \sum_{p \in G} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

Contoh 2.3.15. Misal $G = \{\alpha, \beta, \theta\}$ grup permutasi dari himpunan $X = \{1, 2, 3\}$.

Berdasarkan Contoh 2.3.3 dapat diperoleh *cycle index* sebagai berikut:

1. *Cycle* $\alpha = (1)(2)(3)$ dengan $a_1 = 3, a_2 = 0, a_3 = 0$. Tipe *cycle* $\alpha = [300]$ dan bobot $\alpha = 1^3 = 1$.
2. *Cycle* $\beta = (1)(23)$ dengan $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0$. Tipe *cycle* $\beta = [110]$ dan bobot $\alpha = 1^12^1 = 2$.
3. *Cycle* $\theta = (123)$ dengan $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1$. Tipe *cycle* $\alpha = [001]$ dan bobot $\alpha = 3^1 = 3$.

Sehingga,

$$\text{Cycle index}(\alpha) : Z(\alpha; x_1, x_2, x_3) = x_1^3$$

$$\text{Cycle index}(\beta) : Z(\beta; x_1, x_2, x_3) = x_1^1 x_2^1$$

$$\text{Cycle index}(\theta) : Z(\theta; x_1, x_2, x_3) = x_3^1$$

Jadi *cycle index* $Z(G; x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(x_1^3 + x_1^1 x_2^1 + x_3^1)$.

2.3.7 Persediaan Pola (*Pattern Inventory*)

Misalnya diberikan tiga simpul yang membentuk sebuah segitiga sama sisi. Simpul-simpul dalam segitiga tersebut akan diberi warna merah dan biru. Segitiga-segitiga yang berbeda yang terbentuk yaitu segitiga dengan titik berwarna merah semua, segitiga dengan titik berwarna dua merah dan satu biru, segitiga dengan titik berwarna dua biru dan satu merah, dan segitiga dengan titik berwarna biru semua. Sehingga banyaknya segitiga yang berbeda ada empat. Untuk memudahkan dalam menentukan hal semacam itu diberikan definisi-definisi berikut.

Definisi 2.3.13. Pewarnaan

Fungsi f dari himpunan berhingga X ke himpunan Y disebut pewarnaan X . Himpunan berhingga Y disebut warna, sedangkan himpunan semua jenis pewarnaan X terhadap warna Y disebut himpunan C . Dua pewarnaan $f, g \in C$ disebut ekuivalen (tidak dapat dibedakan) terhadap grup G , grup permutasi di X jika $\exists \pi \in G$ sehingga $f(x) = g(\pi(x))$ untuk $\forall x \in X$.

Contoh 2.3.16. Misal $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ dan $G = \{\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \varepsilon, \theta\}$ grup permutasi dari X . Banyaknya pewarnaan X sama dengan banyaknya fungsi dari X ke Y , yaitu $|Y|^{|X|} = 2^3 = 8$. Jenis-jenis pewarnaan X :

$1 \rightarrow a$	$1 \rightarrow a$	$1 \rightarrow a$	$1 \rightarrow b$
$f_1: 2 \rightarrow a$	$f_2: 2 \rightarrow a$	$f_3: 2 \rightarrow b$	$f_4: 2 \rightarrow a$
$3 \rightarrow a$	$3 \rightarrow b$	$3 \rightarrow a$	$3 \rightarrow a$
$1 \rightarrow b$	$1 \rightarrow b$	$1 \rightarrow a$	$1 \rightarrow b$
$f_5: 2 \rightarrow b$	$f_6: 2 \rightarrow a$	$f_7: 2 \rightarrow b$	$f_8: 2 \rightarrow b$
$3 \rightarrow a$	$3 \rightarrow b$	$3 \rightarrow b$	$3 \rightarrow b$

Gambar 2.8: Jenis-jenis Pewarnaan

Jelas $Y = \{a, b\}$ disebut warnanya dan salah satu pewarnaan X adalah f_1 . Himpunan semua jenis pewarnaan X terhadap warna Y adalah $C = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$. Akan ditunjukkan f_2 dan f_3 pewarnaan yang ekuivalen. Jelas $f_2, f_3 \in C$.

- Untuk $x = 1$ diperoleh

$$f_2(\beta(1)) = f_2(1) = a = f_3(1)$$

- Untuk $x = 2$ diperoleh

$$f_2(\beta(2)) = f_2(3) = b = f_3(2)$$

- Untuk $x = 3$ diperoleh

$$f_2(\beta(3)) = f_2(2) = a = f_3(3)$$

Jadi karena $\forall x \in X, \exists \beta \in G$ sehingga $f_2(\beta(x)) = f_3(x)$ maka f_2, f_3 merupakan pewarnaan yang ekuivalen.

Definisi 2.3.14. Pola

Kelas-kelas ekuivalen yang mempartisi himpunan C dengan relasi tak dapat dibedakan disebut pola-pola di C terhadap grup G .

Contoh 2.3.17. Perhatikan Contoh 2.3.6. Misal $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ dan $G = \{\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \varepsilon, \theta\}$ grup permutasi dari X . Jelas $C = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$. Untuk setiap $\pi \in G$ pola-pola di C yaitu:

- Pola Pertama (P_1)

Jelas,

$$f_2(\beta(1)) = f_2(1) = a = f_3(1)$$

$$f_2(\beta(2)) = f_2(3) = b = f_3(2)$$

$$f_2(\beta(3)) = f_2(2) = a = f_3(3)$$

Karena, $\exists \beta \in G$ sehingga $f_2(\beta(x)) = f_3(x)$ maka f_2, f_3 merupakan pewarnaan ekuivalen.

Jelas,

$$f_3(\sigma(1)) = f_3(2) = b = f_4(1)$$

$$f_3(\sigma(2)) = f_3(1) = a = f_4(2)$$

$$f_3(\sigma(3)) = f_3(2) = a = f_4(3)$$

Karena, $\exists \sigma \in G$ sehingga $f_3(\sigma(x)) = f_4(x)$ maka f_3, f_4 merupakan pewarnaan ekuivalen.

Jelas,

$$f_2(\varepsilon(1)) = f_2(3) = b = f_4(1)$$

$$f_2(\varepsilon(2)) = f_2(1) = a = f_4(2)$$

$$f_2(\varepsilon(3)) = f_2(2) = a = f_4(3)$$

Karena, $\exists \varepsilon \in G$ sehingga $f_3(\varepsilon(x)) = f_4(x)$ maka f_2, f_4 merupakan pewarnaan ekuivalen.

Sehingga f_2, f_3, f_4 adalah pewarnaan yang ekuivalen. Jadi $P_1 = \{f_2, f_3, f_4\}$.

- Pola Kedua (P_2) Dengan cara yang sama untuk setiap $x \in X$ diperoleh:

$$f_5(\beta(x)) = f_6(x)$$

$$f_6(\sigma(x)) = f_7(x)$$

$$f_5(\varepsilon(x)) = f_7(x)$$

Sehingga f_5, f_6, f_7 adalah pewarnaan yang ekuivalen. Jadi $P_2 = \{f_5, f_6, f_7\}$.

- Pola Ketiga (P_3) Untuk setiap $x \in X$ diperoleh:

$$f_1(\alpha(x)) = f_1(x)$$

Jadi $P_3 = \{f_1\}$.

- Pola Keempat (P_4)

Untuk setiap $x \in X$ diperoleh:

$$f_8(\alpha(x)) = f_8(x)$$

Jadi $P_4 = \{f_8\}$.

Jadi pola-pola di himpunan C yang terbentuk adalah $P_1 = \{f_2, f_3, f_4\}$, $P_2 = \{f_5, f_6, f_7\}$, $P_3 = \{f_1\}$, dan $P_4 = \{f_8\}$.

Definisi 2.3.15. Persediaan Pola (*Pattern Inventory*)

Misalkan fungsi bobot w memetakan himpunan Y ke sebuah himpunan r warna, $\{w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r)\}$. Persediaan pola C terhadap grup G adalah:

$$PI(G; w(y_1), \dots, w(y_r)) = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_r=n} K(n_1, n_2, \dots, n_r) [w(y_1)]^{n_1} [w(y_2)]^{n_2} \dots [w(y_r)]^{n_r}$$

$K(n_1, n_2, \dots, n_r)$ adalah koefisien yang menyatakan banyaknya pewarnaan yang dapat dibedakan (banyak pola) sehingga warna $w(y_1)$ bersesuaian dengan n_1 anggota, $w(y_2)$ bersesuaian dengan n_2 anggota, ..., dan $w(y_r)$ bersesuaian dengan n_r anggota.

Contoh 2.3.18. Dari contoh 2.3.7 pola-pola di C terhadap grup G yaitu $\{f_2, f_3, f_4\}$, $\{f_5, f_6, f_7\}$, $\{f_1\}$, dan $\{f_8\}$. Misalkan fungsi w memetakan himpunan $Y = \{a, b\}$ ke dua warna sehingga $w(a) = R(\text{Red})$, $w(b) = B(\text{Blue})$, dan $G = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \sigma, \theta\}$ adalah grup permutasi di X . Persediaan pola di C terhadap grup G sebagai berikut.

Jelas terdapat 4 kemungkinan nilai $(n_1, n_2) : (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$.

Sehingga

$$\begin{aligned}
 PI(G; w(a), w(b)) &= \sum_{n_1+n_2=n} K(n_1, n_2)[w(a)]^{n_1}[w(b)]^{n_2} \\
 PI(H; R, B) &= K(3, 0)R^3 + K(1, 2)R^2B + K(2, 1)RB^2 + K(0, 3)B^3
 \end{aligned}$$

Pola-pola di C terhadap grup G yaitu:

1. $P_1 = \{f_2, f_3, f_4\}$. Perhatikan Gambar Pola P_1 , pola $P_1 = \{f_2, f_3, f_4\}$ akan dibawa kewarna dua merah satu biru R^2B .
2. $P_2 = \{f_5, f_6, f_7\}$. Perhatikan Gambar Pola P_2 , pola $P_2 = \{f_5, f_6, f_7\}$ akan dibawa kewarna dua biru satu merah RB^2 .
3. $P_3 = \{f_1\}$. Perhatikan Gambar Pola P_3 , pola $P_3 = \{f_1\}$ akan dibawa kewarna merah semua R^2 .
4. $P_4 = \{f_8\}$. Perhatikan Gambar Pola P_4 , pola $P_4 = \{f_8\}$ akan dibawa kewarna biru semua B^3 .

$$\begin{array}{l}
 1 \rightarrow a \rightarrow w(a) = R \\
 f_2: 2 \rightarrow a \rightarrow w(a) = R \\
 3 \rightarrow b \rightarrow w(b) = B \\
 \\
 1 \rightarrow a \rightarrow w(a) = R \\
 f_3: 2 \rightarrow b \rightarrow w(b) = B \\
 3 \rightarrow a \rightarrow w(a) = R \\
 \\
 1 \rightarrow b \rightarrow w(b) = B \\
 f_4: 2 \rightarrow a \rightarrow w(a) = R \\
 3 \rightarrow a \rightarrow w(b) = R
 \end{array}$$

Gambar 2.9: Pola P_1

$$\begin{array}{l}
 1 \rightarrow b \rightarrow w(b) = B \\
 f_5: 2 \rightarrow b \rightarrow w(b) = B \\
 3 \rightarrow a \rightarrow w(a) = R
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 1 \rightarrow b \rightarrow w(b) = B \\
 f_6: 2 \rightarrow a \rightarrow w(a) = R \\
 3 \rightarrow b \rightarrow w(b) = B
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 1 \rightarrow a \rightarrow w(a) = R \\
 f_7: 2 \rightarrow b \rightarrow w(b) = B \\
 3 \rightarrow b \rightarrow w(b) = B
 \end{array}$$

Gambar 2.10: Pola P_2

$$\begin{array}{l}
 1 \rightarrow a \rightarrow w(a) = R \\
 f_1: 2 \rightarrow a \rightarrow w(a) = R \\
 3 \rightarrow a \rightarrow w(a) = R
 \end{array}$$

Gambar 2.11: Pola P_3

$$\begin{array}{l}
 1 \rightarrow b \rightarrow w(b) = B \\
 f_8: 2 \rightarrow b \rightarrow w(b) = B \\
 3 \rightarrow b \rightarrow w(b) = B
 \end{array}$$

Gambar 2.12: Pola P_4

Sehingga $PI(G; R, B) = 1R^3 + 1R^2B + 1RB^2 + 1B^3$. Berdasarkan Teorema 2.3.14 dan Teorema 2.3.15 dapat dengan mudah menentukan banyaknya pola suatu himpunan terhadap suatu grup.

Berdasarkan definisi-definisi diatas pewarnaan yang ekuivalen dapat diperoleh dengan melakukan suatu aksi rotasi.

2.3.8 Isomorfisma Grup

Dalam aljabar abstrak, dua buah grup dikatakan isomorfisma grup jika terdapat homomorfisma yang bersifat bijektif. Pengertian homomorfisma sendiri diberikan pada definisi 2.3.16. Dua buah grup G dan H dikatakan isomorfis jika G mempunyai struktur yang identik dengan H , yaitu G dan H mempunyai sifat atau struktur yang dapat dikatakan sama/mirip/identik.

Teorema 2.3.7. π' Permutasi dan G' Grup

Diberikan $C = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ dan X, Y adalah himpunan berhingga, juga diketahui bahwa G adalah grup permutasi yang beraksi pada X . Untuk tiap $\pi \in G$ didefinisikan pemetaan π' dari C ke C dengan sifat: $\pi'(f(x)) = f(\pi(x))$ untuk $\forall x \in X$ dan $\forall f \in C$, maka berlaku bahwa:

1. π' adalah permutasi di C .
2. $G' = \{\pi' : \pi \in G\}$

Definisi 2.3.16. Misalkan G dan G' grup. Pemetaan $\varphi : G \rightarrow G'$ dinamakan homomorfisma grup apabila $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ untuk setiap $a, b \in G$. Misalkan $\varphi : G \rightarrow G'$ homomorfisma. φ dinamakan isomorfisma apabila bijektif.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Mengubah Graf DNA Menjadi Graf Pola Utama

3.1.1 Mengubah Graf DNA Menjadi Graf Tereduksi

Graf DNA yang didalamnya terdapat busur yang dilewati lebih dari satu kali atau terdapat pengulangan fragmen akan menyebabkan terbentuknya lebih dari satu barisan DNA berbeda. Oleh karena itu, graf DNA yang telah diperoleh akan disederhanakan menjadi graf tereduksi untuk dapat mengkarakterkan pengulangan yang terdapat pada graf DNA. Graf tereduksi adalah bentuk penyederhanaan dari graf DNA dimana simpulnya merepresentasikan busur berarah yang mengalami pengulangan pada graf DNA [Chang, 2007].

Proses perubahan graf DNA menjadi graf tereduksi yang dijelaskan oleh Chang, 2007 adalah sebagai berikut:

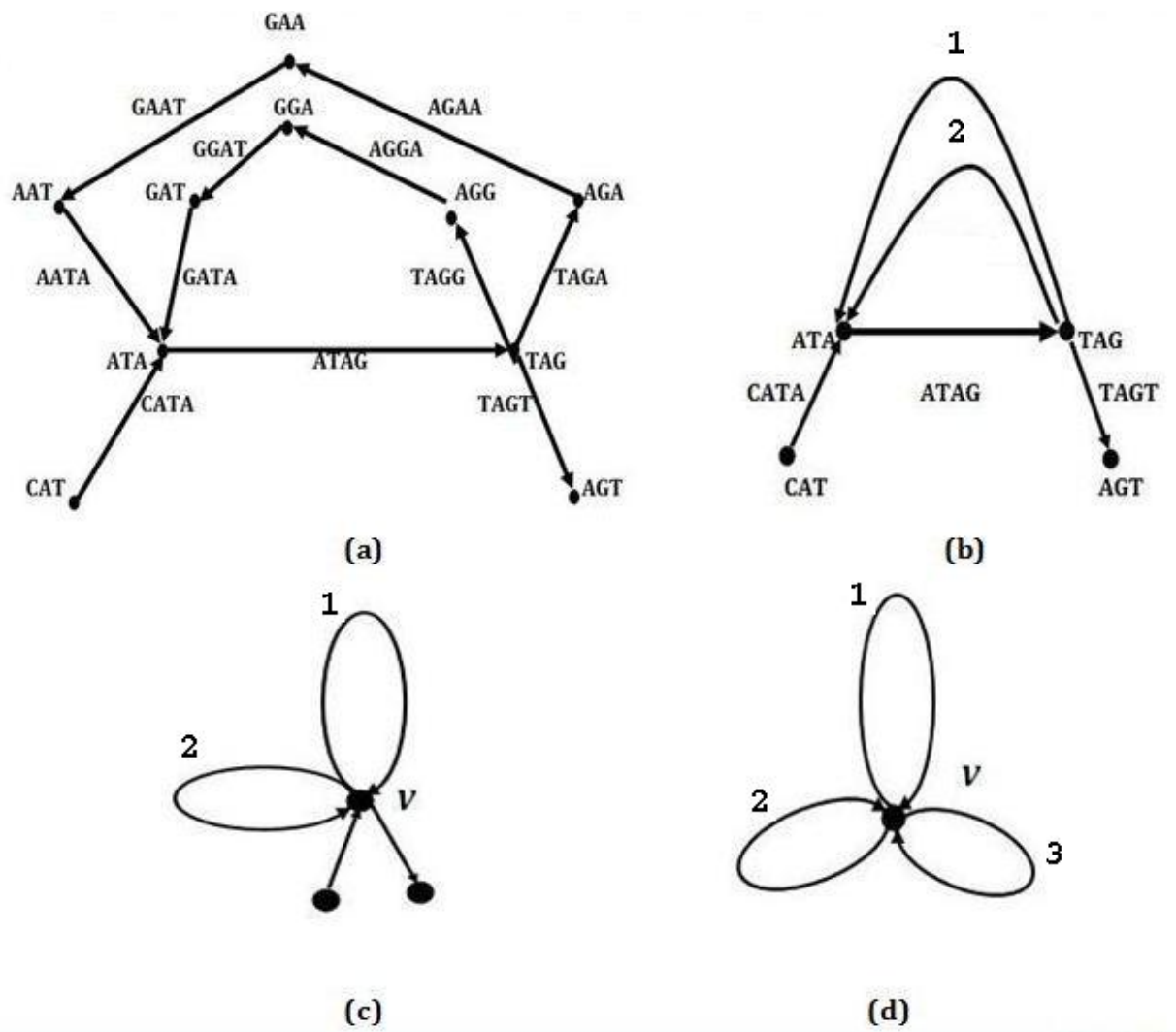
1. Jika terdapat simpul dengan derajat masuk atau derajat keluar sama dengan 0, maka simpul tersebut akan menjadi simpul awal dan simpul akhir.
2. Setiap simpul yang memiliki derajat masuk atau derajat keluar sama dengan 1, maka busur-busur yang berinsiden pada simpul tersebut dapat digabung-

kan menjadi satu busur dimana label dari busur adalah label subbarisan DNA dari masing-masing busur.

3. Busur yang mengalami pengulangan didefinisikan sebagai busur yang derajat masuk ekornya lebih besar dari derajat keluaranya, dan derajat keluar dari kepalanya lebih besar dari derajat masuknya. Selanjutnya, ekor dan kepala dari busur pengulangan dijadikan simpul baru. Jadi, simpul baru ini merupakan interpretasi dari busur yang mengalami pengulangan dan derajat masuk atau derajat keluar simpul ini menyatakan berapa kali busur tersebut dilewati.
4. Untuk simpul awal dan simpul akhir serta busur yang berinsiden dengan simpul baru diganti dengan busur yang berawal dari ekor busur simpul akhir ke kepala dari simpul awal.

Berikut adalah penggambaran proses perubahan graf DNA menjadi graf tereduksi, dimana pembentukan graf DNA telah dijelaskan pada Bab II dan prosesnya ditunjukkan pada Gambar 3.1

Diberikan spektrum $S = \{ \text{CATA, ATAG, TAGG, AGGA, GGAT, GATA, TAGA, AGAA, GAAT, AATA, TAGT} \}$ yang diperoleh dari proses biokimia. Graf DNA yang terbentuk dari spektrum tersebut ditunjukkan pada Gambar 3.1a. Langkah pembentukan graf tereduksinya sebagai berikut:



Gambar 3.1: Proses perubahan graf DNA menjadi graf tereduksi

1. Pada Gambar 3.1a , simpul CAT merupakan simpul dengan derajat masuk 0 maka simpul ini sebagai simpul awal. Simpul AGT merupakan simpul dengan derajat keluar 0 maka simpul ini sebagai simpul akhir.
2. Untuk busur berarah TAGG, AGGA, GGAT, dan GATA memiliki derajat masuk atau keluar sama dengan 1 maka dapat digabungkan menjadi satu busur berarah. Selain itu, untuk busur berarah TAGA, AGAA, GATA, dan AATA juga dapat digabungkan menjadi satu busur berarah. Lihat Gambar 3.1b
3. Busur berarah yang mengalami pengulangan ditunjukkan oleh busur ATAG. Selanjutnya, ekor dan kepala dari busur berarah ini dijadikan simpul baru yaitu simpul v . Derajat masuk dan keluar dari simpul v menyatakan berapa kali busur berarah ATAG dilewati. Lihat Gambar 3.1c
4. Simpul awal CAT dan simpul akhir AGT beserta busurnya yang berinsiden dengan simpul v diganti dengan busur berarah yang berawal dari ekor busur simpul akhir ke kepala dari simpul awal. Lihat Gambar 3.1d

Dari graf tereduksi yang dihasilkan dapat diperoleh informasi yaitu banyaknya fragmen yang berulang pada barisan DNA dan banyaknya pengulangan pada fragmen. Banyaknya fragmen yang berulang diketahui dari banyaknya simpul pada graf tereduksi, sedangkan banyaknya pengulangan pada fragmen diketahui dari derajat masuk atau derajat keluar dari simpul.

3.1.2 Mengubah Graf Tereduksi Menjadi Graf Pola

Untuk dapat mengkarakterisasikan pengulangan fragmen pada graf DNA yang menyebabkan terbentuknya lebih dari 1 barisan DNA berbeda, graf tereduksi akan diubah mejadi graf pola utama. Sebelum memperoleh graf pola utama, graf tereduksi diubah menjadi graf pola.

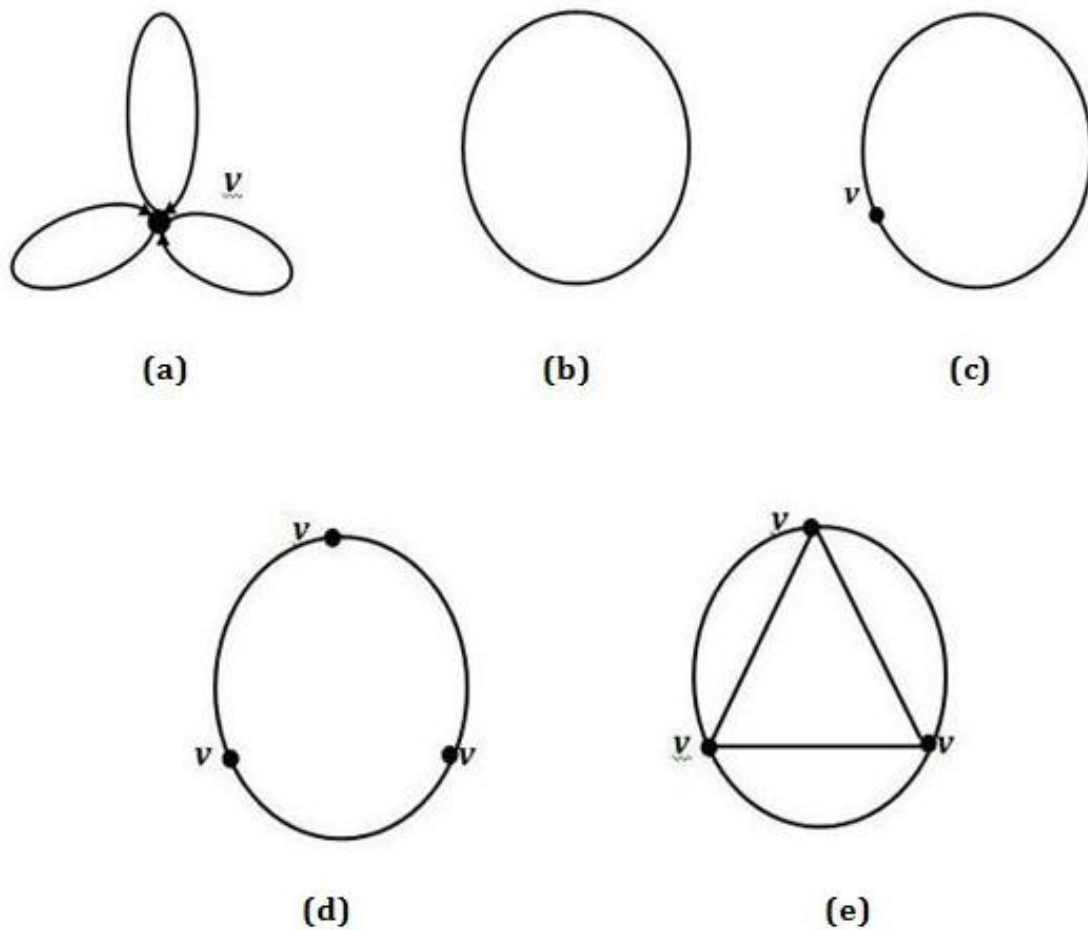
Graf pola adalah graf yang dapat menggambarkan pola pengulangan DNA yang lebih efektif [Chang, 2007]. Graf pola didefinisikan sebagai suatu lingkaran yang didalamnya terdapat poligon-poligon yang mewakili simpul-simpul pada graf tereduksi. Banyaknya sisi poligon merepresentasikan derajat masuk dari simpul (d). Khusus untuk simpul dengan derajat masuk 2, direpresentasikan dengan *chord* (garis). Perpotongan *chord*/poligon dengan lingkaran diberi label searah jarum jam. Setiap poligon akan diberi satu label yang sama karena menggambarkan satu simpul. Pemberian label searah jarum jam mempertahankan ketetangaan di graf tereduksi. Pada graf pola, setiap simpul dengan d derajat masuk akan muncul d kali pada keliling lingkaran. Poligon yang bersesuaian dengan d derajat masuk disebut *d-fold repeat*.

Proses perubahan graf pola dari graf tereduksi yang dijelaskan oleh Chang, 2007 adalah sebagai berikut:

1. Buat sebuah lingkaran.
2. Mulai dari sembarang simpul pada graf tereduksi dengan mengikuti jalur Euler, beri titik-titik pada lingkaran setiap melewati simpul pada graf tereduksi.
3. Labelkan menurut arah jarum jam mengikuti urutan simpul ketika menelusuri graf tereduksi berdasarkan jalur Euler.

4. Titik-titik dengan label yang sama dihubungkan dengan garis sehingga akan membentuk poligon.

Untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar 3.2 yang menggambarkan proses perubahan graf tereduksi menjadi graf pola.



Gambar 3.2: Proses perubahan graf tereduksi menjadi graf pola dan graf pola utama

Berdasarkan definisi graf pola dimana poligon merepresentasikan derajat masuk dari simpul maka diketahui bahwa simpul v mempunyai derajat masuk 3 yang artinya terjadi pengulangan fragmen sebanyak 3 kali. Poligon yang terbentuk

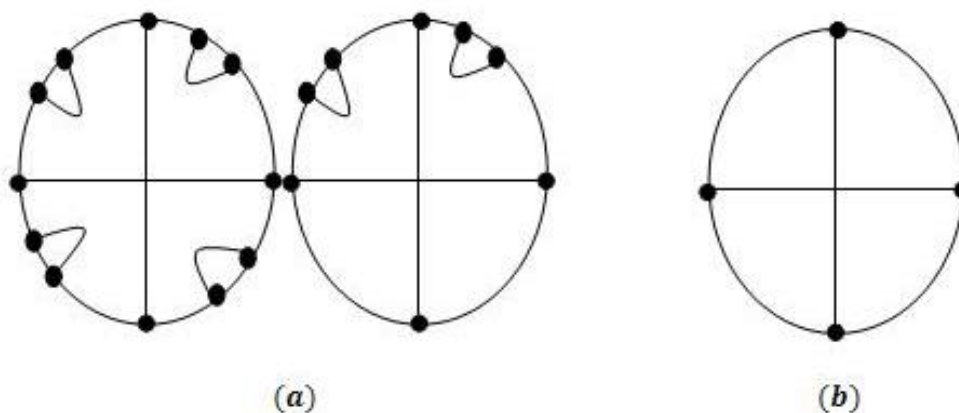
adalah segitiga maka disebut juga *3-fold repeat*.

3.1.3 Mengubah Graf Pola Menjadi Graf Pola Utama

Setelah diperoleh graf pola maka graf pola utama dapat dengan mudah didapatkan. Graf pola utama digunakan untuk mengkarakterisasikan pengulangan fragmen pada graf DNA. Graf pola utama merupakan bentuk penyederhanaan graf pola. Unsur-unsur pada graf pola yang tidak mempengaruhi banyaknya jalur Euler dihilangkan. Dalam hal ini, semua *2-fold repeat* yang tidak memotong poligon lain dihapuskan.

Gambar 3.2e merupakan graf pola dari graf DNA yang bersesuaian dengan graf tereduksi pada Gambar 3.2a. Graf pola tersebut merupakan graf pola utama karena tidak terdapat *chord* yang tidak saling berpotongan. Penghapusan *2-fold repeat* yang tidak saling berpotongan tidak mengurangi kemungkinan barisan DNA yang terbentuk.

Contoh berikut akan menggambarkan perubahan dari graf pola menjadi graf pola utama. Lebih dari satu graf pola yang berbeda dapat memiliki satu graf pola utama yang sama. Untuk lebih jelas perhatikan Gambar 3.3a. Gambar 3.3b merupakan graf pola utama dari 2 buah graf pola pada Gambar 3.3a.



Gambar 3.3: Graf Pola (a) dan Graf Pola Utama (b)

3.2 Teorema Polya

Masalah enumerasi yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah masalah enumerasi yang berkaitan dengan masalah pencacahan. Salah satu cara yang digunakan untuk menyelesaikan masalah enumerasi adalah dengan Teorema Polya (*Polya's Theorem*). Pada awalnya Teorema Polya digunakan dalam perhitungan banyaknya pola molekul yang terbentuk dari gabungan sejumlah atom-atom penyusunnya, yang diperkenalkan oleh seorang matematikawan George Polya pada tahun 1936. Teorema Polya terdiri dari Teorema Polya 1 dan Teorema Polya 2. Teorema Polya 1 menjelaskan tentang banyaknya pola molekul yang terbentuk sedangkan Teorema Polya 2 menjelaskan bentuk dari pola-pola yang terbentuk tersebut.

Teorema polya merupakan pengembangan dari Definisi Persediaan pola (*pattern inventory*). Dalam Definisi Persediaan pola sulit untuk menemukan banyaknya pola untuk jenis tertentu, tetapi dengan Teorema Polya dapat dengan mudah menentukan banyaknya pola secara keseluruhan.

Teorema 3.2.1. Teorema Polya 1

Diberikan $C = \{f|f : X \rightarrow Y\}$ dengan $|X| = n \geq 2$ dan $|Y| = r$. Jika G merupakan grup permutasi yang beraksi pada X dengan *cycle index* $Z(G : x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ maka banyaknya pola di C terhadap G adalah $Z(G : r, r, r, \dots, r)$.

Bukti. Jika g suatu *cycle* dari suatu grup permutasi, $g \in G$, maka didalam g terdapat *cycle-cycle* dengan pola yang sama misalkan f dimana $f \in F_x(g)$ dengan $F_x(g)$ adalah himpunan dari *cycle-cycle* yang polanya tetap. Jika dan hanya jika f tetap oleh tiap-tiap *cycle* dari g , dan jika g permutasi bertipe $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ maka banyaknya *cycle* yang *disjoint* di g adalah $a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Dari Definisi tipe yang tetap oleh g adalah $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} = r^{a_1} r^{a_2} \dots r^{a_n} = r^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ jadi didapat $|F_x(g)| = r^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ dengan $[a_1 + a_2 + \dots + a_n]$ adalah tipe permutasi g .

Berdasarkan Teorema Burnside, banyaknya *cycle* yang berbeda adalah

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F_x(g)| \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{a_1} r^{a_2} \dots r^{a_n} \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} z(g : r, r, \dots, r) \\
 &= Z(G : r, r, \dots, r)
 \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.2. Teorema Polya 2

Pattern inventory $PI(G; w(y_1), \dots, w(y_r))$ merupakan *cycle index* dari

$Z(G; x_1, x_2, \dots, x_n)$ pada $x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + [w(y_3)]^i + \dots + [w(y_r)]^i$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$.

Bukti. Penurunan rumus untuk Teorema Polya 2 menggunakan Teorema Burnside-Frobenius juga dan hampir sama dengan Teorema Polya 1. Pada intinya fungsi bobot $w(f)$ memiliki sifat konstan yang diperlukan oleh Teorema Burnside Lemma untuk orbit-orbit C terhadap permutasi dari grup G . Jelas

$$k = \frac{1}{|G'|} \sum_{\pi' \in G'} |F(\pi')|$$

sehingga

$$PI(G; w(y_1), \dots, w(y_r)) = \frac{1}{|G'|} \sum_{\pi' \in G'} |F(\pi')| \quad (3.1)$$

dimana

$$w(\pi') = \sum_{f \in F(\pi')} w(f)$$

Dari bentuk C dan G' dikembalikan ke bentuk X dan G , sehingga:

$$PI = \frac{1}{|G'|} \sum_{\pi \in G} \left\{ \sum_{f \in C: f(\pi(x))=f(x)} [w(f(x_1))][w(f(x_2))]\dots[w(f(x_n))]\right\} \quad (3.2)$$

Penjumlahan pada persamaan (3.2) dapat diambil atas seluruh fungsi $f(x)$ yang konstan atas tiap *cycle* π . Misalkan π bertipe $[a_1 a_2 a_3 \dots a_n]$ dan didefinisikan multinomial $w(y_i)$ sebagai:

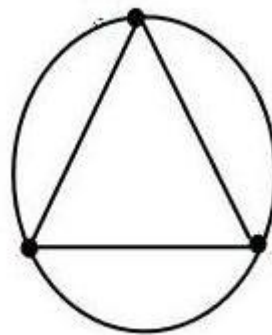
Dengan $x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + [w(y_3)]^i + \dots + [w(y_r)]^i$ Untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

□

3.2.1 Penggunaan Teorema Polya

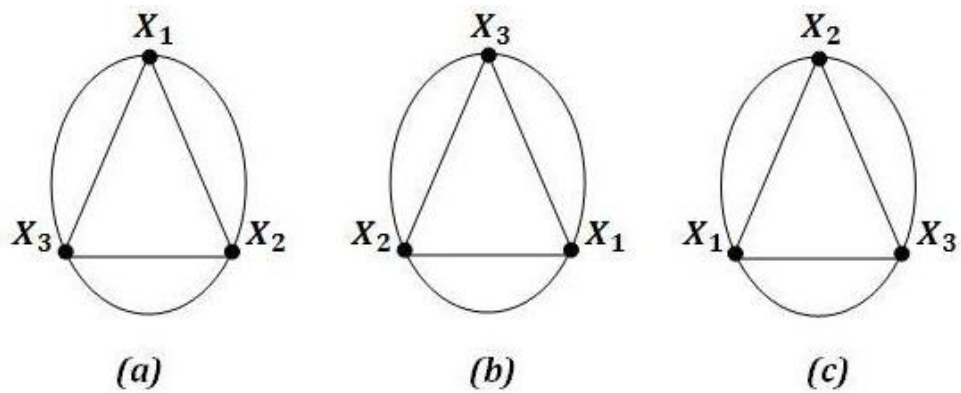
Pada Subbab ini akan dibahas penggunaan Teorema Polya untuk menghitung banyaknya graf pola dari graf pola utama suatu graf DNA. Dari Subbab 3.1 telah dijelaskan bahwa menambahkan *chord* (*2-fold repeat*) yang tidak saling berpotongan pada graf pola utama tidak akan mengubah banyaknya pembentukan barisan DNA yang direpresentasikan oleh graf pola utama tersebut. Graf pola dapat diperoleh dengan menambahkan *chord-chord* yang tidak saling berpotongan pada graf pola utama sedemikian sehingga banyaknya pengulangan adalah n dengan $n \in \mathbb{Z}$.

Berikut adalah graf pola utama yang berasal dari graf DNA yang dibahas pada penulisan ini. Selanjutnya akan dicari banyaknya graf pola yang terbentuk dari graf pola utama tersebut.



Gambar 3.4: Graf Pola Utama

Pertama-tama labelkan untuk masing-masing simpul pada graf pola utama, dimana simpul-simpul yang dihubungkan dengan garis memiliki label yang sama. Labelkan simpulnya dengan X_1, X_2, X_3 dan kenakan aksi rotasi pada graf pola utama tersebut sehingga diperoleh 3 graf pola utama seperti pada Gambar 3.5



Gambar 3.5: Hasil Rotasi dari Graf Pola Utama

Dari Gambar 3.5 diperoleh permutasi, *cycle*, tipe *cycle*, bobot, dan *cycle index*, sebagai berikut

No.	Permutasi	Cycle	Type Cycle	Bobot	Cycle Index
1.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	(1)(2)(3)	$[a^1 = 3, a^2 = 0, a^3 = 0] = [300]$	1^3	x_1^3
2.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	(132)	$[a^1 = 0, a^2 = 0, a^3 = 1] = [001]$	3^1	x_3^1
3.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	(123)	$[a^1 = 0, a^2 = 0, a^3 = 1] = [001]$	3^1	x_3^1

Gambar 3.6: Permutasi, *Cycle*, *Type Cycle*, Bobot, dan *Cycle Index*

Cycle Index yang diperoleh dari grup permutasi $\{(1)(2)(3), (132), (123)\}$ adalah

$$\begin{aligned} Z(G; x_1, x_3) &= \frac{1}{3}(x_1^3 + x_3 + x_3) \\ &= \frac{1}{3}(x_1^3 + 2x_3) \end{aligned}$$

Ada dua keadaan yang mungkin terjadi, yaitu

1. Keadaan tidak ada *chord* yang tidak saling berpotongan.
2. Keadaan ada *chord* yang tidak saling berpotongan.

Jika r adalah keadaan yang mungkin terjadi, $r = 2$. Dari *cycle index* diperoleh $x_1 = x_3 = 2$, dan berdasarkan Teorema Polya 1 diperoleh

$$\begin{aligned}
Z(G; x_1, x_3) &= \frac{1}{3}(x_1^3 + x_3 + x_3) \\
Z(G; 2, 2) &= \frac{1}{3}(2^3 + 2 + 2) \\
&= \frac{1}{3}(12) \\
&= 4
\end{aligned}$$

Jadi banyaknya graf pola yang terbentuk ada sebanyak 4 buah. Jika keadaan-keadaan tersebut diberi bobot w , maka

1. $w(z_1)$ = Keadaan tidak ada *chord* yang tidak saling berpotongan.
2. $w(z_2)$ = Keadaan ada *chord* yang tidak saling berpotongan.

Misal $w(z_1) = T$ dan $w(z_2) = G$. Berdasarkan Teorema Polya 2, dengan mensubstitusikan $x_1 = [w(z_1)] + [w(z_2)] = [T + G]$ dan $x_3 = [w(z_1)]^3 + [w(z_2)]^3 = [T^3 + G^3]$ diperoleh *cycle index* yaitu

$$\begin{aligned}
Z(G; x_1, x_3) = \frac{1}{3}(x_1^3 + 2x_3) &= \frac{1}{3}[(T + G)^3 + 2(T^3 + G^3)] \\
&= \frac{1}{3}[(T^3 + 3TG^2 + 3T^2G + G^3) + 2(T^3 + G^3)] \\
&= \frac{1}{3}[3T^3 + 3TG^2 + 3T^2G + 3G^3] \\
&= T^3 + TG^2 + T^2G + G^3
\end{aligned}$$

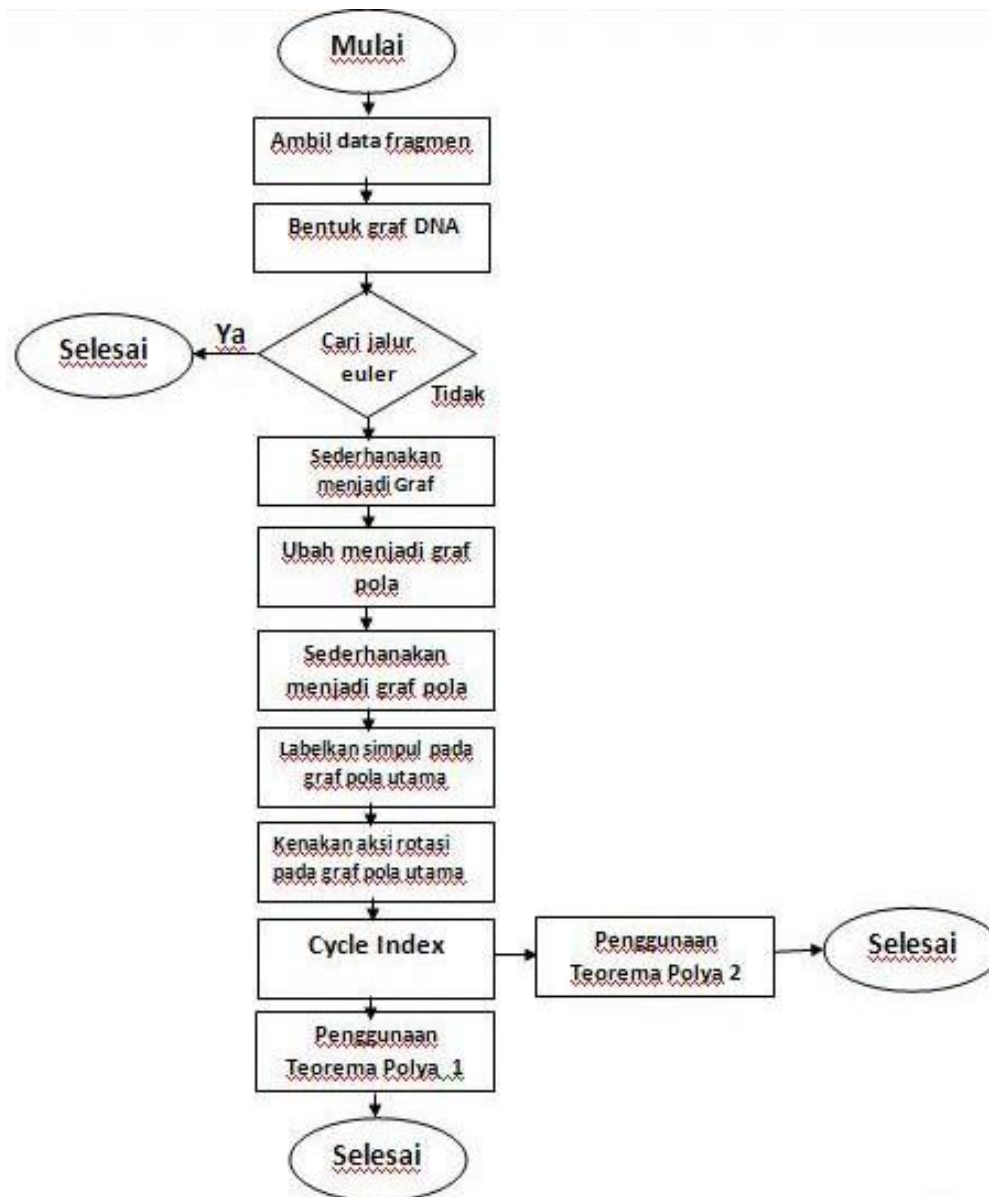
Artinya, dari graf pola utama tersebut akan diperoleh 1 graf pola tanpa *chord*, 1 graf pola dengan 1 *chord* yang tidak saling berpotongan, 1 graf pola dengan 2 *chord* yang tidak saling berpotongan, dan 1 graf pola dengan 3 *chord*

yang tidak saling berpotongan. Jadi, untuk contoh kasus ini memiliki 4 buah graf pola dimana penambahan *chord* pada graf pola utama tidak mengubah banyaknya pembentukan barisan DNA.

3.3 Diagram Alir

Setelah didapatkan hasil karakterisasi graf DNA dapat dibuat diagram alir untuk menyelesaikan masalah enumerasi pada graf DNA.

Selanjutnya dengan menggunakan langkah-langkah diatas akan diperoleh banyaknya graf pola dari graf pola utama dan bentuk-bentuk graf polanya.



Gambar 3.7: Diagram Alir

3.4 Aplikasi Program pada Pencarian Banyaknya Graf Pola

Dalam Subbab 3.2.1 telah dijelaskan bagaimana menghitung banyaknya graf pola dari graf pola utama suatu graf DNA. Untuk mencari banyaknya graf pola dari graf pola utama suatu graf DNA bukan hal yang sederhana. Ada 3 langkah yang harus dilakukan, yaitu:

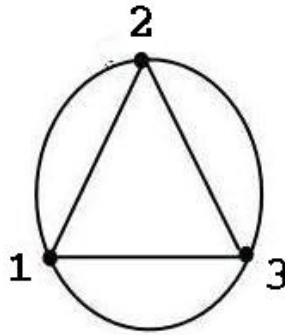
1. Menentukan graf pola utama dari graf DNA.
2. Menentukan *cycle index* dari graf pola utama.
3. Menggunakan Teorema Polya untuk mencari banyaknya graf pola.

Ketika melakukan 3 langkah tersebut, seringkali terjadi kesalahan di dalamnya terutama pada langkah 2 dan langkah 3. Misalnya saja kesalahan melakukan rotasi, kesalahan menuliskan variabel ataupun menuliskan *index*, dan lainnya. Untuk meminimalkan terjadinya kesalahan-kesalahan tersebut, diperlukan suatu program sehingga pencarian banyaknya graf pola tidak dilakukan secara manual.

Program yang digunakan untuk mencari banyaknya graf pola dari suatu graf pola utama dibuat dengan menggunakan bantuan perangkat lunak MATLAB R2012b. Masukan untuk menjalankan program ini adalah matriks ketetanggaan dari graf pola utama. Un

Sebelum mencari matriks ketetanggaan, labelkan terlebih dahulu semua simpul pada graf pola utama Gambar 3.4, sehingga menjadi Gambar 3.5

Untuk memperoleh matriks ketetanggaan dari graf pada Gambar 3.5 tersebut, hanya diperhatikan hubungan antara simpul tanpa lingkarannya. Dengan



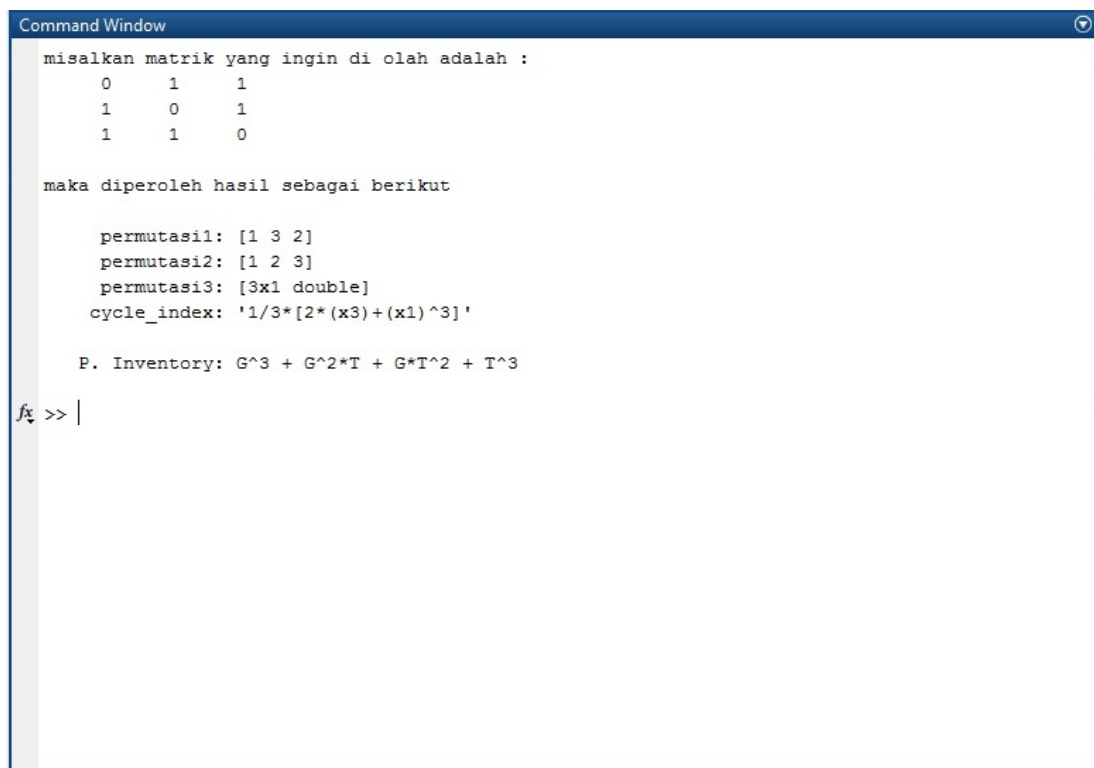
Gambar 3.8: Graf Pola Utama setelah diberi label

hanya memperhatikan hubungan antar simpulnya, diperoleh matriks ketetanggaan dari graf pada Gambar 3.5 tersebut adalah

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gambar 3.10 memberikan contoh input dan output yang dikeluarkan oleh program.

Dapat dilihat dari Gambar 3.6 bahwa dengan memasukkan matriks ketetanggaan dari graf pola utamanya, program akan langsung mengeluarkan *pattern inventory*. Variabel permutasi 1 menyimpan permutasi yang diperoleh setelah dilakukan rotasi 1 kali, variabel permutasi 2 menyimpan permutasi yang diperoleh setelah dilakukan rotasi 2 kali, dan variabel permutasi 3 menyimpan permutasi yang diperoleh dari graf pola utama sebelum rotasi. Variabel *cycle_index* yang menyimpan *cycle index* yang dimiliki oleh graf pola utama yang telah dimasukkan matriks ketetanggaan. Dan variabel *P. Inventory* menyimpan informasi banyaknya graf pola yang mungkin terbentuk dari graf pola utama yang diketahui.



```
Command Window
misalkan matrik yang ingin di olah adalah :
  0   1   1
  1   0   1
  1   1   0

maka diperoleh hasil sebagai berikut

permutasi1: [1 3 2]
permutasi2: [1 2 3]
permutasi3: [3x1 double]
cycle_index: '1/3*[2*(x3)+(x1)^3]'

P. Inventory: G^3 + G^2*T + G*T^2 + T^3

fx >> |
```

Gambar 3.9: Contoh input dan output program

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Graf DNA yang memiliki pengulangan fragmen yang dapat menyebabkan terbentuknya lebih dari satu barisan DNA berbeda dapat dikarakterisasikan dengan menggunakan graf pola utama. Graf pola utama diperoleh dengan menyederhanakan graf DNA menjadi graf tereduksi. Selanjutnya graf tereduksi diubah menjadi graf pola dan graf pola disederhanakan menjadi graf pola utama.
2. Mencari banyaknya graf pola dari graf pola utama suatu graf DNA dapat diselesaikan dengan Teorema Polya, yaitu dengan memberikan aksi rotasi pada graf pola utama yang menghasilkan grup permutasi. Selanjutnya menentukan *cycle index* dari grup permutasi tersebut dan penggunaan Teorema Polya 1 dan Teorema Polya 2 untuk mengetahui banyaknya graf pola yang mungkin terbentuk.

4.2 Saran

Skripsi ini membahas mengenai karakterisasi dan enumerasi pada graf DNA. Disarankan untuk penelitian selanjutnya dapat dikembangkan untuk permasalahan pada bidang lain, misalnya untuk menentukan pola molekul pada bidang kimia.

DAFTAR PUSTAKA

- Anasrulloh, Jais. 2012. Penerapan Graf Berarah Euler dan Aritmatika Modulo dalam Mengkonstruksi Barisan De Bruijn. Jurnal. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Badar, Muhammad. dan Ansir. Iqbal. 2010. *Polya's Enumeration Theorem*. School of Computer Science, Physics and Mathematics.
- Chang, Hsun-Wen dan Tsai. 2007. *Characterizing the reconstruction and enumerating the patterns of DNA*, J Comb Optim Vol. 14. Taiwan: Tatung University.
- Cohen, Daniel I. 1978. *Basic Techniques Of Combinatorial Theory*. John Wiley dan Sons.
- Cong, Chen C dan Kheen-Meng, Koh. 1992. *Principles and Techniques in Combinatorics*. World Scientific.
- Fraleigh, John B. 1989. *A first Course In A Abstract Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Kaptcianos, Jonathan. 2008. *A Graph Theoretical Approach to DNA Fragment Assembly*, American Journal e Research Vol. 7 No. 1.
- Makur, Alberta P. 2009. Karakterisasi Rekonstruksi dan Pencacahan Pola Barisan DNA dengan Pengulangan. Skripsi. Depok: Universitas Indonesia.
- Merris, Russell. 2003. *Wiley-Interscience in Discrete Mathematics and Optimization*.
- Mulyono. 2011. Enumerasi Digraf Tidak Isomorfik. Jurnal. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.
- Purnomo, Wendy Lesty. 2010. Penggunaan Teorema Polya Dalam Enumerasi

- Graf Sederhana. Skripsi. Semarang: Universitas Negeri Semarang.
- Saepudin, Asep. 2012. Penggunaan Lintasan Euler dalam Penyederhanaan Sequensing DNA. Jurnal. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Vivy, Cucu. dan Nilamsari. 2013. Penggunaan Teorema Polya dalam Menentukan Banyaknya Graf Sederhana yang saling Isomorfis. Jurnal. Pontianak: Universitas Tanjungpura Pontianak.
- West, Douglas. 1996. *Introduction To Graph Theory*. Prentice Hall, Inc, New Jersey.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

```
function out = Dina(M)

[row, col] = size(M);

if row ~= col
    display('Wrong input argument. ');
    return;
end

mDis = zeros(row);
M1 = M;
index = 1:row;
N = 0;

for i=1:row
    M1 = circshift(M1,[1,1]);
    index = circshift(index,[0,1]);
    if M == M1
        N = N+1;
        P = circpart(index);
        s = ['out.permutasi',num2str(i),' = P;'];
        eval(s);
    end
end
```

```

        [p2 p1] = size(P);
        mDis(p1, p2) = mDis(p1, p2) + 1;
    end
end

```

```

out.displayMatrix = mDis;
out.cycle_index = readout(mDis, N);

```

```

function out = circpart(M)

```

```

j = 0;

```

```

while sum(M) > 0

```

```

    j = j+1;

```

```

    I = find(M,1);

```

```

    i = I;

```

```

    T = I;

```

```

    while M(i) ~= I

```

```

        T = [T M(i)];

```

```

        k = i;

```

```

        i = M(i);

```

```

        M(k) = 0;

```

```

    end

```

```

    M(i) = 0;

```

```

    out(j,:) = T;

```

```

end

```

```

function out = readout(M,N)

```

```
[row col] = find(M);
n = length(row);
out = [];
if N>1
    out = ['1/' num2str(N) '*'];
end
out = [out '['];

for i=1:n
    if M(row(i),col(i)) >1
        out = [out num2str(M(row(i),col(i))) '*'];
    end
    out = [out '(x' num2str(row(i)) ')'];
    if col(i) >1
        out = [out '^' num2str(col(i))];
    end
    if i < n
        out = [out '+'];
    else
        out = [out ']'];
    end
end

disp(out);
```

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama : Dina Rachmadanti
No. Registrasi : 3125111196
Jurusan : Matematika
Program Studi : Matematika

Menyatakan bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul ” **Karakterisasi Dan Enumerasi Pada Graf DNA**” adalah :

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, Juli 2015

Yang membuat pernyataan

Dina Rachmadanti

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



DINA RACHMADANTI. Lahir di Bekasi, 04 Juli 1993. Anak ketiga dari pasangan Bapak Wardi dan Ibu Sumaryati. Saat ini bertempat tinggal di Kampung Rawa Bebek Rt. 07 Rw. 12 No. 60, Bekasi, 17133.

No. Ponsel : 081310629585

Email : rachmadantidina@yahoo.co.id

Riwayat Pendidikan : Penulis mengawali pendidikan di TK Al-Fadilah selama 1 tahun, dan kemudian melanjutkan pendidikan di SD Kota Baru 4 Bekasi pada tahun 1999 - 2005. Setelah itu, penulis melanjutkan ke SMP Negeri 138 Jakarta hingga tahun 2008. Kemudian kembali melanjutkan ke SMA Negeri 102 Jakarta dan lulus tahun 2011. Di Tahun yang sama penulis melanjutkan ke Universitas Negeri Jakarta (UNJ), jurusan Matematika, melalui jalur SMPTN Tertulis. Di pertengahan tahun 2015 penulis telah memperoleh gelar Sarjana Sains untuk Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, FMIPA, UNJ.

Riwayat Organisasi : Selama di bangku perkuliahan, penulis cukup aktif di beberapa organisasi kemahasiswaan. Dalam dua tahun pertama, penulis mendapat kepercayaan sebagai staff Pengawasan LLMJ Matematika. Penulis juga pernah beberapa kali ikut serta dalam kepanitiaan acara yang diadakan oleh legislatif jurusan, fakultas, maupun universitas.