SIFAT-SIFAT DAN APLIKASI PROSES RENEWAL DISKRET

Skripsi
Disusun untuk melengkapi syarat-syarat
guna memperoleh gelar Sarjana Sains

DWI ARIYANI
3125102335

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA

2015

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

SIFAT-SIFAT DAN APLIKASI PROSES RENEWAL DISKRET

Nama : Dwi Ariyani

No. Registrasi : 3125102335

	Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab			
Dekan	: Prof. Dr. Suyono, M.Si.	....	....
	NIP. 19671218 199303 1 005		
Wakil Penanggung Jawab			
Pembantu Dekan I	: Dr. Muktiningsih, M.Si.	....	....
	NIP. 19640511 198903 2 001		
Ketua	: Drs. Sudarwanto, M.Si., DEA	....	....
	NIP. 19650325 199303 1 003		
Sekretaris	: Dian Handayani, M.Si.	....	....
	NIP. 19740415 199803 2 001		
Penguji	: Dra. Widyanti Rahayu, M.Si.	....	....
	NIP. 19661103 200112 2 001		
Pembimbing I	: Prof. Dr. Suyono, M.Si.	....	....
	NIP. 19671218 199303 1 005		
Pembimbing II	: Yudi Mahatma, M.Si.	....	....
	NIP. 19761020 200812 1 001		

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal: 23 Juni 2015

PERSEMBAHANKU...

"Maka apabila kamu telah selesai (dari suatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain, dan hanya kepada Tuhanmulah, hendaknya kamu berharap "

(QS. Asy Syarh : 7-8)

"Setiap bunga akan mekar ketika saatnya tiba: forsythia, kamelia, ... Bunga-bunga itu tahu kapan mereka akan mekar; tidak seperti kebanyakan dari kita yang selalu ingin mendahului yang lain. Apakah kamu merasa tertinggal dari teman-temanmu? Apakah kamu telah menyia-siakan waktu sementara teman-temanmu mulai melangkah menuju kesuksesan? Jika kamu berpikir demikian, ingatlah bahwa kamu memiliki masa mekarmu sendiri, begitu juga dengan teman-temanmu. Musimmu belum datang. Namun, ia pasti akan datang ketika kuncupmu terbuka. Mungkin kuncup itu mekar lebih lama dari yang lain, tetapi ketika sampai pada waktunya, kamu akan mekar dengan begitu indah dan menawan seperti bunga-bunga lain yang telah mekar sebelum dirimu. Jadi, angkatlah kepalamu dan bersiaplah menyambut musimmu. Ingat kamu begitu menakjubkan. "

(*Time of Your Life* - Rando Kim)

Skripsi ini kupersembahkan untuk....

kedua orangtuaku (mama dan bapak), kakakku, serta keluarga besarku.

"Terima kasih atas do'a, dukungan, serta kasih sayang kalian... ".

ABSTRACT

Dwi Ariyani, 3125102335. Properties and Application Of Discrete Renewal Process. Thesis. Faculty of Mathematics and Natural Sciences. State University of Jakarta. 2015.

This thesis describes the properties of discrete-time renewal processes. The properties of discrete-time renewal processes is a renewal process $\{N(n), n \geq 0\}$ *where* $n = 0, 1, 2, \ldots$. *The properties of the renewal process described in the theorems and its proof. The properties include the distribution of probability, expected value, and limit distribution. At the end of the discussion we give an example of the application of the discrete-time renewal process in population growth.*

Keywords : discrete renewal process, distribution of probability, expected value, limit distribution.

ABSTRAK

Dwi Ariyani, 3125102335. Sifat-sifat dan Aplikasi Proses Renewal Diskret. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. 2015.

Skripsi ini membahas sifat-sifat dari proses renewal dengan waktu diskret. Proses renewal dengan waktu diskret adalah proses renewal $\{N(n), n \geq 0\}$ dengan waktu $n = 0, 1, 2, \ldots$. Sifat-sifat dari proses renewal dijelaskan dalam teorema dan pembuktiannya. Sifat-sifat yang dibahas meliputi distribusi probabilitas, harga harapan, dan limit distribusi. Pada akhir pembahasan diberikan contoh penerapan proses renewal dengan waktu diskret pada pertumbuhan populasi.

Kata kunci : proses renewal diskret, distribusi probabilitas, harga harapan, limit distribusi

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT atas pemberian pengetahuan dan kemampuan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Sifat-Sifat dan Aplikasi Proses Renewal Diskret" yang merupakan salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Jurusan Matematika Universitas Negeri Jakarta.

Skripsi ini berhasil diselesaikan tak lepas dari bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Suyono, M. Si. selaku Dosen Pembimbing I dan Bapak Yudi Mahatma, M. Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, saran, nasehat, serta pengarahan dalam pengerjaan skripsi ini sehingga menjadi lebih baik. Terima kasih banyak, semoga kesehatan selalu tercurah kepada Bapak dan keluarga.

2. Bapak Drs. Makmuri, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNJ. Terima kasih atas segala bantuan dan kerja sama Bapak selama pengerjaan skripsi ini.

3. Ibu Dra. Widyanti Rahayu M.Si. selaku Pembimbing Akademik atas segala bimbingan dan kerja sama Ibu selama perkuliahan penulis dan seluruh Bapak/Ibu dosen atas pengajaran yang telah diberikan.

4. Mama, Bapak tercinta yang selalu memberikan doa, semangat, kesabaran, nasehat, serta bantuan secara moral maupun material. Kakak penulis, Mas Pungky dan Mbak Esti yang selalu mendoakan dan menghibur penulis ketika penulis mengalami kesulitan dalam menulis skripsi ini, juga untuk keponakanku tercinta Nafeeza yang sudah menghibur.

5. Terima kasih pula untuk kedua nenekku, kakekku dan seluruh keluarga besar penulis yang selalu memberi semangat kepada penulis agar cepat menyelesaikan skripsi ini.

6. Sahabat terbaik penulis Putri Arum dan Delsi yang selalu memberi semangat dan perhatian, menemani penulis dan mengajak penulis untuk segera menyelesaikan skripsi ini. Teman sekelas penulis Efri, Mega, Riska, Devi, Novilia EC, Mudita, Annisa, Sifa, Diesty, Rista, Dina, Adi, Antoni, Fajar, Rayvin, Sandi, Taufan, Faiz, Saifulloh, Jefri, dan Saget.

7. Semua teman penulis yang selalu memberikan semangat, dukungan, pengertiannya dan senantiasa menghibur ketika penulis mengalami kesulitan dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari skripsi ini masih jauh dari sempurna. Masukan dan kritik akan sangat berarti. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Jakarta, Juni 2015

Dwi Ariyani

DAFTAR ISI

ABSTRACT i

ABSTRAK ii

KATA PENGANTAR iii

DAFTAR ISI vi

DAFTAR TABEL vii

DAFTAR GAMBAR viii

I PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang Masalah 1

1.2 Perumusan Masalah 2

1.3 Pembatasan Masalah 2

1.4 Tujuan Penulisan 2

1.5 Manfaat Penulisan 3

1.6 Metode Penelitian 3

II LANDASAN TEORI 4

2.1 Variabel Acak 4

2.2 Harga Harapan Bersyarat 6

2.3 Proses Stokastik 8

2.4 Konvolusi 9

2.5 Proses Renewal dengan Waktu Kontinu 10

2.5.1 Distribusi dari *N(t)* 12

2.5.2 Teorema Limit untuk *N(t)* 13

III PEMBAHASAN **21**

3.1 Proses Renewal dengan Waktu Diskret 21

3.1.1 Distribusi dari *N(n)* 21

3.1.2 Teorema Limit untuk *N(n)* 38

3.1.3 Teorema Renewal Diskret 40

3.2 Pertumbuhan Populasi Deterministik dengan Distribusi Usia . . . 42

3.2.1 Model Pertumbuhan Sederhana 42

3.2.2 Model Pertumbuhan dengan Struktur Usia 43

3.2.3 Perilaku Jangka Panjang 47

IV PENUTUP **52**

4.1 Kesimpulan 52

4.2 Saran 53

DAFTAR PUSTAKA **54**

LAMPIRAN-LAMPIRAN **55**

DAFTAR TABEL

3.1 Tabel Perhitungan v_n 33

3.2 Tabel Perhitungan u_n 33

3.3 Tabel Distribusi Usia 51

DAFTAR GAMBAR

2.1 Proses renewal dengan waktu kontinu. 11

3.1 Proses renewal dengan waktu diskret. 22

3.2 $W_{N(n)+1}$ selalu memuat X_1 dan memuat tambahan durasi ketika $X_1 = k \leq n$. 35

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam kehidupan sehari-hari banyak dijumpai kejadian yang berulang dan pengulangannya terjadi pada waktu-waktu yang tidak dapat dipastikan sebelumnya. Sebagai contoh, seseorang akan mengganti bola lampu di rumahnya ketika bola lampu mati dengan bola lampu yang baru. Matinya bola lampu tidak dapat diprediksi secara pasti. Contoh lain adalah penggantian komponen pada kendaraan bermotor, kedatangan nasabah di suatu bank, dan lain-lain. Situasi-situasi tersebut dapat dimodelkan dengan suatu proses stokastik.

Anggap pada waktu $t = 0$ sebuah bola lampu baru dipasang dan dinyalakan untuk penerangan suatu ruangan dan tidak boleh dimatikan. Ketika lampu mati maka segera diganti dengan bola lampu yang baru, dan seterusnya. Jika interval waktu antar penggantian bola lampu dianggap saling independen dan berdistribusi identik maka banyaknya penggantian bola lampu pada interval waktu $[0, t]$ untuk $t \geq 0$ merupakan proses stokastik yang dinamakan proses renewal.

Secara alamiah, waktu t pada proses renewal adalah kontinu. Akan tetapi dalam kehidupan sehari-hari waktu t dapat dibulatkan ke dalam hari, jam, menit terdekat, atau yang lainnya, sehingga diperoleh waktu-waktu yang diskret. Dengan demikian proses renewal dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu proses renewal dengan waktu kontinu dan proses renewal dengan waktu diskret. Pembahasan proses renewal dengan waktu kontinu dapat dilihat pada Ross (2000) dan Taylor dan Karlin (1998). Dalam skripsi ini, akan dibahas sifat-sifat proses renewal dengan waktu diskret. Selanjutnya akan diberikan contoh aplikasi proses renewal dengan waktu diskret untuk memodelkan pertumbuhan populasi.

1.2 Perumusan Masalah

Masalah yang akan dikaji pada skripsi ini adalah bagaimana sifat-sifat dan aplikasi proses renewal dengan waktu diskret?

1.3 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Banyaknya renewal pada setiap waktu paling banyak satu.
2. Waktu antar kedatangan positif, yakni $p_0 = P\{X_i = 0\} = 0$ dimana X_i menyatakan waktu antar kejadian ke-$(i-1)$ dan ke-i.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan yang ingin dicapai dalam penulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui sifat-sifat proses renewal dengan waktu diskret.
2. Mengetahui aplikasi dari proses renewal dengan waktu diskret.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari penulisan ini adalah :

1. Bagi penulis, dapat memahami sifat-sifat proses renewal diskret dan mengaplikasikan proses renewal diskret pada kehidupan sehari-hari.

2. Bagi pihak lain, sebagai salah satu referensi dan informasi tambahan untuk melakukan kajian lebih lanjut.

1.6 Metode Penelitian

Skripsi ini merupakan kajian teori dalam bidang statistik yang didasarkan pada buku-buku dan jurnal-jurnal tentang teori permasalahan di bidang statistik khususnya proses stokastik yang berhubungan dengan suatu proses renewal.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Variabel Acak

Variabel acak adalah suatu fungsi terukur dari ruang probabilitas $(X, \mathcal{F}, P)$ pada bilangan riil $\mathbb{R}$. Suatu variabel acak dikatakan diskret jika nilai-nilai variabel acak tertentu sebanyak berhingga atau tidak berhingga tetapi terbilang (*countable*). Fungsi distribusi kumulatif variabel acak diskret X didefinisikan sebagai

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{y \leq x} f(y). \tag{2.1}$$

Suatu variabel acak X dikatakan kontinu jika fungsi distribusi kumulatifnya dapat dinyatakan sebagai

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy,\ x \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

untuk suatu fungsi $f : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty)$ yang terintegralkan. Fungsi f ini dinamakan fungsi densitas (fungsi kepadatan peluang). Dalam kasus kontinu,

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x). \tag{2.3}$$

Jika X dan Y adalah variabel-variabel acak maka fungsi distribusi bersama dari X dan Y didefinisikan sebagai

$$F(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}. \tag{2.4}$$

Jika variabel acak X dan Y saling bebas maka

$$\begin{aligned} F(x,y) &= P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\} \\ &= F_X(x)F_Y(y). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Jika X merupakan variabel acak, maka nilai harapan dari X yang dinotasikan dengan $E[X]$, didefinisikan sebagai

$$E\left[X\right] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf\left(x\right)dx \text{ jika } X \text{ kontinu,} \\ \sum_x xP\{X = x\} \text{ jika } X \text{ diskrit} \end{cases} \tag{2.6}$$

apabila integral di atas ada nilainya. Variansi dari variabel acak X dinyatakan sebagai

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2].$$

Untuk menentukan variansi dari X dapat digunakan rumus

$$\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Jika X dan Y merupakan suatu variabel acak dengan distribusi peluang gabungan $f(x,y)$ maka kovariansi dari variabel acak X dan Y dinyatakan sebagai

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x - \mu_x)(y - \mu_y)f(x,y)$$

bila X dan Y diskret, dan

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu_x)(y - \mu_y)f(x, y)dxdy$$

bila X dan Y kontinu.

2.2 Harga Harapan Bersyarat

Jika X dan Y adalah variabel-variabel acak diskret maka fungsi masa peluang bersyarat X jika diketahui $Y = y$ didefinisikan sebagai

$$P\{X = x|Y = y\} = \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}}$$

untuk semua nilai y, dimana $P\{Y = y\} > 0$.
Fungsi distribusi peluang bersyarat X, dimana $Y = y$ adalah

$$F(x|y) \quad = \quad P\{X \leq x|Y = y\}.$$

Harga harapan bersyarat X, jika diketahui $Y = y$ didefinisikan sebagai

$$E[X|Y = y] = \sum_x xP\{X = x|Y = y\}.$$

Jika X dan Y adalah variabel-variabel acak kontinu dengan gabungan fungsi kepadatan peluang $f(x, y)$ maka fungsi peluang bersyarat X jika diketahui $Y = y$ didefinisikan untuk semua nilai y sehingga $f_Y(y) > 0$ sebagai

$$f_{X|Y}(x|y) \quad = \quad \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

dan fungsi distribusi kumulatif bersyarat dari X diketahui $Y = y$ adalah

$$\begin{aligned} F(x|y) &= P\{X \leq x|Y = y\} \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx. \end{aligned}$$

Harga harapan bersyarat X, jika diketahui $Y = y$ didefinisikan sebagai

$$E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx.$$

Notasikan dengan $E[X|Y]$ fungsi dari variabel acak Y yang memiliki nilai pada $Y = y$ sama dengan $E[X|Y = y]$. Salah satu sifat yang sangat berguna dari harga harapan bersyarat adalah bahwa untuk semua variabel acak X dan Y berlaku

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \int E[X|Y = y]dF_Y(y) \tag{2.7}$$

bila harga harapan ada.

Jika Y variabel acak kontinu dengan fungsi densitas $f(y)$ maka persamaan (2.7) menjadi

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y = y]f(y)dy,$$

sedangkan jika Y variabel acak diskret maka persamaan (2.7) menyatakan

$$E[X] = \sum_{y} E[X|Y = y]P[Y = y].$$

2.3 Proses Stokastik

Suatu proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ adalah sebuah koleksi dari variabel acak, yaitu untuk setiap t di dalam himpunan indeks $T, X(t)$ merupakan variabel acak. Seringkali diinterpretasikan t sebagai waktu dan $X(t)$ sebagai *state* (keadaan) dari proses pada waktu t.

Jika himpunan indeks T *countable* maka $\{X(t), t \in T\}$ merupakan proses stokastik diskret dan jika himpunan indeks T kontinu maka $\{X(t), t \in T\}$ merupakan proses stokastik kontinu. Proses stokastik kontinu $\{X(t), t \in T\}$ dikatakan mempunyai sifat *independent increments* jika untuk semua $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, variabel-variabel acak

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$$

saling bebas, dan dikatakan mempunyai sifat *stationary increments* jika $X(t+s) - X(t)$ mempunyai distribusi yang sama untuk semua waktu t.

Suatu proses stokastik $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut proses *counting* jika $N(t)$ menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi sampai waktu t. Proses *counting* $N(t)$ harus memenuhi syarat-syarat berikut :

1. $N(t) \geq 0$,
2. $N(t)$ bilangan bulat,
3. Jika $s < t$ maka $N(s) \leq N(t)$, dan
4. Untuk $s < t, N(t) - N(s)$ sama dengan banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval $(s, t]$.

Proses *counting* dikatakan mempunyai sifat *independent increments* jika banyaknya kejadian yang terjadi dalam interval yang saling asing saling bebas. Proses *counting* dikatakan memiliki sifat *stationary increments* jika distribusi banyaknya kejadian dalam sebarang interval hanya tergantung pada panjang interval.

Contoh 2.3.1. Berikut ini adalah beberapa contoh proses stokastik, yaitu

1. Banyaknya orang yang masuk ke dalam suatu restoran pada waktu atau sampai waktu t.

2. Banyaknya bayi yang lahir pada waktu atau sampai waktu t.

3. Banyaknya pasien yang bertahan hidup pada waktu atau sampai waktu t.

2.4 Konvolusi

Definisi 2.4.1. Misal X dan Y adalah dua variable acak bilangan bulat yang independen, dengan masing-masing fungsi distribusi $F_1(x)$ dan $F_2(x)$ adalah fungsi distribusi $F_3 = F_1 * F_2$ yang diberikan sebagai berikut

$$F_3(j) = \sum_k F_1(k).F_2(j-k) \tag{2.8}$$

untuk $j \in \mathbb{Z}$. Fungsi $F_3(x)$ adalah fungsi distribusi dari variabel acak $Z = X + Y$.

Teorema 2.4.1. Misal $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah variabel acak yang saling bebas dan variabel acak S_n didefinisikan sebagai

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Fungsi distribusi dari dari S_n adalah

$$F_{S_n}(x) = P\{S_n < s\} = P\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq x\}.$$

Jika X_i untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ saling bebas dan berdistribusi identik dengan fungsi distribusi identik dengan fungsi distribusi $P_i(x) = P(x)$ untuk setiap i maka fungsi distribusi dari S_n dapat ditentukan melalui

$$\begin{aligned} F_{S_n}(x) &= P_n * P_{n-1} * \ldots * P_2 * P_1(x) \\ &= P * P * \ldots * P * P(x) \\ &= P^{*n}(x). \end{aligned} \tag{2.9}$$

$P^{*n}(x)$ disebut konvolusi lipat n dari fungsi distribusi $P(x)$ yaitu peluang dari jumlah n buah variabel acak yang berdistribusi identik dan saling bebas.

2.5 Proses Renewal dengan Waktu Kontinu

Misalkan $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ adalah barisan variabel acak kontinu tak negatif yang saling bebas dan identik dengan fungsi distribusi F. Variabel acak X_n dapat ditafsirkan sebagai waktu antar kejadian ke-$(n-1)$ dan ke-n. Misalkan

$$\mu = E[X_n] = \int_0^\infty x dF(x)$$

menyatakan mean dari X_n. Misalkan

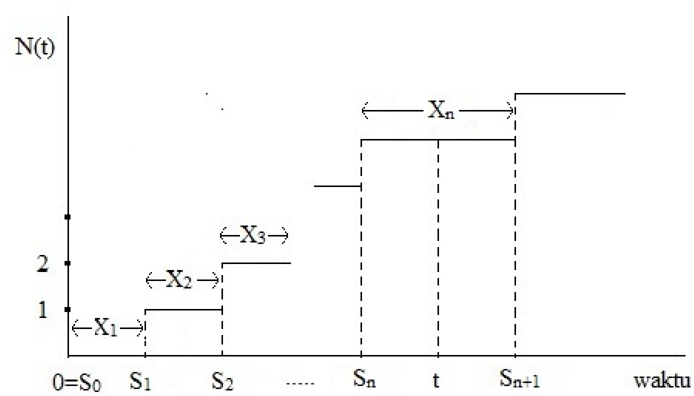
$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad n \geq 1.$$

Maka S_n menyatakan waktu kejadian ke n. Notasikan dengan $N(t)$ banyaknya kejadian sampai waktu t. Karena banyaknya kejadian sampai waktu t sama dengan nilai n yang terbesar yang mana kejadian ke-n terjadi sebelum atau pada waktu t, maka banyaknya kejadian sampai pada waktu t diberikan oleh

$$N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}. \tag{2.10}$$

Definisi 2.5.1. Proses stokastik $\{N(t), t \geq 0\}$ dinamakan proses renewal dengan waktu kontinu.

Berikut ini contoh grafik realisasi dari proses renewal kontinu,



Gambar 2.1: Proses renewal dengan waktu kontinu.

Hubungan antara waktu antar kejadian $\{X_i\}$ dan proses *counting* renewal $\{N(t), t \geq 0\}$ yang mana $0 < S_n \leq t$ dapat dilihat pada Gambar (2.1). Sebagai contoh, akan dilakukan penggantian bola lampu. Sebuah bola lampu dipasang pada saat $S_0 = 0$, lalu lampu tersebut mati pada waktu $S_1 = X_1$, kemudian diganti dengan bola lampu yang baru. Bola lampu kedua mati pada waktu $S_2 = X_1 + X_2$

dan diganti dengan bola lampu ketiga. Secara umum, bola lampu ke-n mati pada waktu $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, dan segera diganti kemudian proses berlanjut. Diasumsikan waktu hidup bola lampu secara berturut-turut saling independen dan memiliki peluang identik sebagai berikut

$$P\{X_i \leq x\} = F(x), \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Pada proses ini $N(t)$ merupakan banyaknya penggantian bola lampu.

2.5.1 Distribusi dari *N(t)*

Distribusi dari $N(t)$ dapat ditentukan dengan memperhatikan hubungan antara $N(t)$ dan S_n, yaitu

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t. \tag{2.11}$$

Dengan kata lain persamaan (2.11) menyatakan bahwa banyaknya kejadian renewal sampai waktu t kurang dari sama dengan n jika dan hanya jika kejadian renewal ke-n terjadi pada atau sebelum waktu t. Dari persamaan (2.11) diperoleh

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n\} &= P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\} \\ &= P\{S_n \leq t\} - P\{S_{n+1} \leq t\} \\ &= F_n(t) - F_{n+1}(t) \end{aligned}$$

dimana $F_n(t)$ didefinisikan sebagai fungsi distribusi dari waktu kejadian renewal ke-n (S_n).

Proposisi 2.5.1. Harga harapan dari $N(t)$ diberikan oleh

$$E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \tag{2.12}$$

Bukti.

$$\begin{aligned}
E[N(t)] &= \sum_{m=0}^{\infty} mP\{N(t) = m\} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} mP\{N(t) = m\} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) = m\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P\{N(t) = m\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n \leq t\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).
\end{aligned}$$

□

2.5.2 Teorema Limit untuk *N(t)*

Misalkan $N(\infty) = \lim_{t\to\infty} N(t)$ dinotasikan sebagai total kejadian renewal, maka diperoleh

$$N(\infty) = \infty \qquad \text{dengan probabilitas 1.}$$

Hal ini karena $N(\infty)$ akan berhingga jika satu dari waktu antara tak berhingga. Oleh karena itu

$$\begin{aligned} P\{N(\infty) < \infty\} &= P\{X_n = \infty \quad \text{untuk suatu } n\} \\ &= P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n = \infty)\right\} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n = \infty\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Naiknya nilai $N(t)$, dengan probabilitas 1, merupakan fungsi linear dari t.

Proposisi 2.5.2.

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu} \qquad \text{untuk} \qquad t \to \infty.$$

Bukti. Karena $S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$ maka

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}. \tag{2.13}$$

Menurut hukum bilangan bulat besar $\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu$ untuk $N(t) \to \infty$. Tetapi karena $N(t) \to \infty$ untuk $t \to \infty$ maka

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu \qquad \text{untuk} \qquad t \to \infty.$$

Selanjutnya

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \left[\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\right]\left[\frac{N(t)+1}{N(t)}\right]$$

dan dengan alasan yang sama maka diperoleh

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \to \mu \qquad \text{untuk} \qquad t \to \infty.$$

Dengan menggunakan (2.13) maka bukti selesai. $\square$

Proposisi (2.5.2) menyatakan bahwa dengan probabilitas 1, dalam limit laju kejadian renewal sama dengan $\frac{1}{\mu}$. Dengan alasan ini maka $\frac{1}{\mu}$ dinamakan kelajuan dari proses renewal.

Definisi 2.5.2. Variabel acak N dengan nilai bilangan-bilangan bulat dinamakan *stopping time* untuk barisan $X_1, X_2, \ldots$ jika kejadian $(N = n)$ independen dari $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ untuk setiap $n = 1, 2, \ldots$.

Secara intuitif akan diamati X_n secara terurut dan N menyatakan banyaknya kejadian yang diamati sebelum berhenti. Jika $N = n$ maka kejadian telah berhenti sesudah melakukan pengamatan pada $X_1, \ldots, X_n$ sebelum melakukan pengamatan pada $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$.

Contoh 2.5.1. Misalkan $X_n, n = 1, 2, \ldots$, saling bebas sedemikian sehingga

$$P\{X_n = 0\} = P\{X_n = 1\} = \frac{1}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Jika

$$N = min\{n : X_1 + \ldots + X_n = 10\},$$

maka N adalah *stopping time*. Anggap N sebagai *stopping time* dari percobaan pelemparan koin secara berturut-turut kemudian berhenti ketika banyaknya kepala yang muncul mencapai 10.

Teorema 2.5.1. (Persamaan Wald (Ross(1996))) Jika $X_1, X_2, \ldots$ adalah barisan variabel acak independen dan identik dengan *mean* berhingga dan N adalah *stopping time* untuk $X_1, X_2, \ldots$ dengan $E(N) < \infty$, maka

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] = E(N)E(X).$$

Bukti. Misalkan

$$I_n = \begin{cases} 1 \text{ jika } N \geqslant n, \\ 0 \text{ jika } N < n \end{cases}$$

maka

$$\sum_{n=1}^{N} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n.$$

Di sini

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] = E\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n I_n]. \tag{2.14}$$

Akan tetapi $I_n = 1$ jika dan hanya jika kita tidak berhenti sebelum mengobservasi secara berurutan $X_1, \ldots, X_{n-1}$. Oleh karena itu I_n ditentukan oleh $X_1, \ldots, X_{n-1}$ dan independen dari I_n. Jadi dari (2.14) diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} X_n &= \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]E[I_n] \\ &= E[X] \sum_{n=1}^{\infty} E[I_n] \\ &= E[X] \sum_{n=1}^{\infty} P[N \geq n] \\ &= E[X]E[N]. \end{aligned}$$

□

Proposisi 2.5.3. Jika $\mu = E[X_1] < \infty$ maka $E[S_{N(t)+1}] = \mu(m(t) + 1)$ dimana $m(t) = E[N(t)]$.

Bukti. Sekarang misalkan $X_1, X_2, \ldots$ menyatakan barisan waktu tunggu dari proses renewal dan misalkan kita berhenti pada kejadian pertama sesudah t yakni pada kejadian $N(t)+1$. Untuk mengecek bahwa $N(t)+1$ adalah memang *stopping time* untuk barisan X_i perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} N(t) + 1 = n \quad &\Leftrightarrow \quad N(t) = n - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad X_1 + \ldots + X_{n-1} \leq t, \quad X_1 + \ldots + X_n > t. \end{aligned}$$

Dengan demikian kejadian $(N(t)+1 = n)$ hanya tergantung pada $X_1, \ldots, X_n$ dan independen dari $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$. Jadi $N(t) + 1$ adalah *stopping time.* Menggunakan persamaan Wald jika $E[X] < \infty$ maka

$$E[X_1 + \ldots + X_{N(t)+1}] = E[X]E[N(t) + 1]. \tag{2.15}$$

□

Dengan menggunakan hasil di atas dapat dibuktikan teorema berikut.

Teorema 2.5.2. (Teorema Renewal Elementer)

$$\frac{m(t)}{t} \to \frac{1}{\mu} \qquad \text{untuk} \qquad t \to \infty.$$

Bukti. Pertama anggap $\mu < \infty$. Karena

$$S_{N(t)+1} > t$$

maka dengan menggunakan Proposisi 2.5.3 diperoleh

$$\mu(m(t)+1) > t$$

yang mengakibatkan

$$\lim_{t\to\infty} \inf \frac{m(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}. \tag{2.16}$$

Untuk sebaliknya, anggap M suatu konstanta tetap. Definisikan proses renewal $(\overline{X}_n, n = 1, 2, \ldots)$ dengan

$$\bar{X}_n = \begin{cases} X_n \text{ jika } X_n \leqslant M, \ n = 1, 2, \ldots, \\ M \text{ jika } X_n > M. \end{cases}$$

Misalkan $\overline{S}_n = \sum_1^n \overline{X}_i$ dan $\overline{N}(t) = \sup\{n : \overline{S}_n \leq t\}$. Karena waktu antara proses renewal terbatas oleh M maka

$$\overline{S}_{N(t)+1} \leq t + M.$$

Dengan Proposisi 2.5.3,

$$(\overline{m}(t)+1)\mu_M \leq t + M$$

dimana $\mu_M = E[\overline{X}_n]$. Dengan demikian

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\overline{m}(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_M}.$$

Selanjutnya karena $\overline{S}_n \leq S_n$ maka $\overline{N}(t) \geq N(t)$ dan $\overline{m}(t) \geq m(t)$, sehingga

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_M}. \tag{2.17}$$

Ambil $M \to \infty$ diperoleh

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu} \tag{2.18}$$

dan bukti selesai dari (2.16) dan (2.18) untuk kasus $\mu < \infty$. Untuk $\mu = \infty$, karena $\mu_M \to \infty$ untuk $M \to \infty$, maka bukti selesai dari (2.17). $\square$

Teorema berikut menyatakan bahwa limit distribusi $N(t)$ adalah normal. Untuk membuktikannya digunakan teorema limit sentral dan relasi

$$N(t) < n \Leftrightarrow S_n > t.$$

Teorema 2.5.3. (Teorema Limit Pusat untuk $N(t)$) Misalkan μ dan σ^2 masing-masing menyatakan *mean* dan variansi dari waktu-waktu tunggu. Asumsikan μ dan σ^2 berhingga. Maka

$$P\left\{\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} < y\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2} dx, \qquad \text{untuk } t \to \infty$$

.

Bukti. Misalkan $r_t = \frac{t}{\mu} + y\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}$, maka

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} < y\right\} &= P\{N(t) < r_t\} \\ &= P\{S_{r_t} > t\} \\ &= P\left\{\frac{S_{r_t} - r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}} > \frac{t - r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}}\right\} \\ &= P\left\{\frac{S_{r_t} - r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}} > -y\left(1 + \frac{y\sigma}{\sqrt{t\mu}}\right)^{-1/2}\right\}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan teorema limit pusat, $(S_{r_t} - r_t\mu)/\sigma\sqrt{r_t}$ konvergen ke variabel acak normal dengan mean 0 dan variansi 1 untuk t (dengan demikian r_t) menuju tak hingga. Juga karena

$$-y\left(1+\frac{y\sigma}{\sqrt{t\mu}}\right)^{-1/2} \to -y \text{ untuk } t \to \infty$$

maka

$$P\left\{\frac{N(t)-t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}}<y\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$$

dan karena

$$\int_{-y}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2}dx$$

dengan demikian bukti selesai. □

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Proses Renewal dengan Waktu Diskret

Misalkan $\{X_1, X_2, ...\}$ adalah barisan variabel acak diskret tak negatif yang saling bebas dan identik dengan fungsi distribusi kumulatif F. Misalkan $W_0 = 0$ dan $W_m = \sum_{i=1}^{m} X_i,\ m \geq 1$.

Definisi 3.1.1. Proses *counting* $\{N(n), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ dimana

$$N(n) = \sup\{m : W_m \leq n\}$$

dinamakan proses renewal dengan waktu diskret.

Dalam pembahasan akan dianggap $P\{X_1 = 0\} = 0$ dan

$$P\{X_1 = k\} = p_k \geq 0 \text{ untuk } k = 1, 2, \ldots$$

dengan

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

3.1.1 Distribusi dari *N(n)*

Seperti halnya pada proses renewal dengan waktu kontinu,

$$N(n) \geq m \Leftrightarrow W_m \leq n. \tag{3.1}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} P\{N(n)=m\} &= P\{N(n)\geq m\} - P\{N(n)\geq m+1\} \\ &= P\{W_m \leq n\} - P\{W_{m+1}\leq n\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

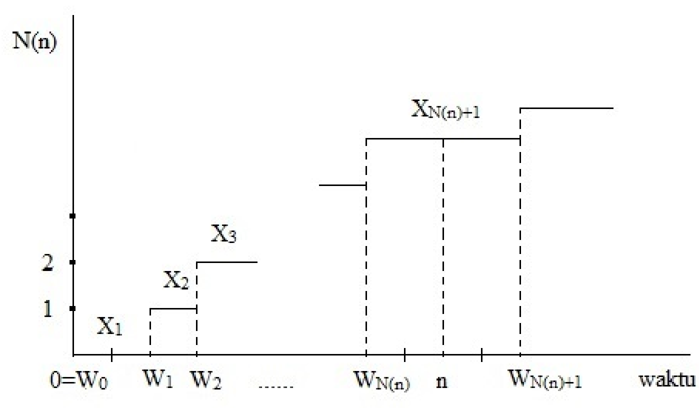
Definisikan dengan F_m fungsi distribusi kumulatif dari waktu kejadian ke-m (W_m), yakni

$$F_m(x) = P\{W_m \leq x\}.$$

Karena variabel-variabel acak $X_i, i \geq 1$ saling bebas dengan distribusi F maka $W_m = \sum_{i=1}^{m} X_i$ memiliki distribusi F_m, merupakan konvolusi m kali lipat dari distribusi F dengan dirinya sendiri. Maka rumus (3.2) dapat ditulis sebagai

$$P\{N(n)=m\} = F_m(n) - F_{m+1}(n). \tag{3.3}$$

Berikut ini contoh grafik realisasi dari proses renewal diskret,



Gambar 3.1: Proses renewal dengan waktu diskret.

Harga harapan dari $N(n)$ adalah

$$\begin{aligned} M(n) &\equiv E[N(n)] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} P\{N(n) \geq m\} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} P\{W_m \leq n\} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} F_m(n). \end{aligned}$$

Contoh 3.1.1. Misalkan $X_1', X_2', \ldots$ adalah barisan variabel acak yang saling bebas dan berdistribusi identik Bernoulli (p) dengan $P\{X_1' = x\} = p^x(1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$. Definisikan $X_i = X_i' + 1$. Maka

$$P\{X_1 = x\} = p^{x-1}(1-p)^{2-x}, \qquad x = 1, 2.$$

Misalkan $W_m = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$. Maka

$$\begin{aligned} W_m &= (X_1' + 1) + (X_2' + 1) + \ldots + (X_m' + 1) \\ &= X_1' + X_2' + \ldots + X_m' + m \\ &= W_m' + m \end{aligned}$$

dimana $W_m' = X_1' + X_2' + \ldots + X_m'$. Karena X_i' saling bebas dan semuanya berdistribusi Bernoulli dengan parameter p maka W_m' berdistribusi Binomial dengan parameter m dan p, yaitu

$$P\{W_m' = k\} = \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{m-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

sebagai akibatnya distribusi dari W_m adalah

$$\begin{aligned}
P\{W_m = k\} &= P\{W'_m + m = k\} \\
&= P\{W'_m = k - m\} \\
&= \begin{pmatrix} m \\ k-m \end{pmatrix} p^{k-m} (1-p)^{m-(k-m)} \\
&= \begin{pmatrix} m \\ k-m \end{pmatrix} p^{k-m} (1-p)^{2m-k}, \qquad k = m, m+1, m+2, \ldots, 2m.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, dari rumus (3.2) didapat

$$\begin{aligned}
P\{N(n) = m\} &= P\{W_m \leq n\} - P\{W_{m+1} \leq n\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} P\{W_m = k\} - \sum_{k=0}^{n} P\{W_{m+1} = k\} \\
&= \sum_{k=m}^{n} P\{W_m = k\} - \sum_{k=m+1}^{n} P\{W_{m+1} = k\} \\
&= \sum_{k=m}^{n} \begin{pmatrix} m \\ k-m \end{pmatrix} p^{k-m} (1-p)^{2m-k} \\
&- \sum_{k=m+1}^{n} \begin{pmatrix} m+1 \\ k-(m+1) \end{pmatrix} p^{k-(m+1)} (1-p)^{2(m+1)-k}.
\end{aligned}$$

Jika $p = \frac{1}{2}, n = 5$, dan $m = 3$ maka

$$\begin{aligned}
P\{N(5)=3\} &= \sum_{k=3}^{5} P\{W_3 = k\} - \sum_{k=4}^{5} P\{W_4 = k\} \\
&= P\{W_3 = 3\} + P\{W_3 = 4\} + P\{W_3 = 5\} - P\{W_4 = 4\} \\
&- P\{W_4 = 5\} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^3 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^1 \\
&- \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^4 - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^3 \\
&= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{16} - \frac{4}{16} \\
&= \frac{7}{8} - \frac{5}{16} = \frac{9}{16}.
\end{aligned}$$

Contoh 3.1.2. Misalkan $X'_1, X'_2, \ldots$ saling bebas dan berdistribusi Poisson dengan parameter $\lambda > 0$, yakni

$$P\{X'_1 = x\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ \ x = 0, 1, 2, \ldots$$

maka $W'_m = X'_1 + X'_2 + \ldots + X'_m$ berdistribusi Poisson dengan parameter $m\lambda$, karena fungsi pembangkit momen dari W'_m berbentuk

$$
\begin{aligned}
M_{W'_m}(t) &= E(e^{tW'_m}) \\
&= E(e^{t(X'_1+X'_2+\ldots+X'_m)}) \\
&= E(e^{tX'_1})E(e^{tX'_2})\ldots E(e^{tX'_m}) \\
&= \underbrace{\left(\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\right)\left(\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\right)\ldots\left(\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\right)}_{m \text{ faktor}} \\
&= e^{-m\lambda}\left(\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!}\right)^m e^t \\
&= e^{-m\lambda}e^{m\lambda e^t}e^t \\
&= e^{m\lambda(e^t-1)}e^t.
\end{aligned}
$$

Jadi, $P\{W'_m = x\} = \frac{e^{-m\lambda}(m\lambda)^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots.$

Definisikan $X_i = X'_i + 1,\ i = 1, 2, 3, \ldots$ dan $W_m = \sum_{i=1}^{m} X_i$. Maka

$$
\begin{aligned}
W_m &= \sum_{i=1}^{m}(X'_i + 1) \\
&= \sum X'_i + m \\
&= W'_m + m.
\end{aligned}
$$

Sebagai akibatnya distribusi dari W_m adalah

$$
\begin{aligned}
P\{W_m = x\} &= P\{W'_m + m = x) \\
&= P\{W'_m = x - m\} \\
&= \frac{e^{-m\lambda}(m\lambda)^{x-m}}{(x-m)!}, \qquad x = m, m+1, m+2, \ldots.
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan rumus (3.2) diperoleh

$$\begin{aligned}
P\{N(n)=m\} &= P\{W_m \leq n\} - P\{W_{m+1} \leq n\} \\
&= \sum_{x=0}^{n} P\{W_m = x\} - \sum_{x=0}^{n} P\{W_{m+1} = x\} \\
&= \sum_{x=m}^{n} P\{W_m = x\} - \sum_{x=m+1}^{n} P\{W_{m+1} = x\} \\
&= \sum_{x=m}^{n} \frac{e^{(-m\lambda)}(m\lambda)^{x-m}}{(x-m)!} - \sum_{x=m+1}^{n} \frac{e^{(-m\lambda)}(m\lambda)^{x-(m+1)}}{(x-(m+1))!}
\end{aligned}$$

Jika $\lambda = 1, n = 5$, dan $m = 3$ maka

$$\begin{aligned}
P\{N(5)=3\} &= \sum_{k=3}^{5} P\{W_3 = k\} - \sum_{k=4}^{5} P\{W_4 = k\} \\
&= P\{W_3 = 3\} + P\{W_3 = 4\} + P\{W_3 = 5\} - P\{W_4 = 4\} \\
&- P\{W_4 = 5\} \\
&= \frac{e^{(-3)(1)}(3.1)^{3-3}}{(3-3)!} + \frac{e^{(-3)(1)}(3.1)^{4-3}}{(4-3)!} + \frac{e^{(-3)(1)}(3.1)^{5-3}}{(5-3)!} \\
&- \frac{e^{(-4)(1)}(4.1)^{4-4}}{(4-4)!} - \frac{e^{(-4)(1)}(4.1)^{5-4}}{(5-4)!} \\
&= e^{-3} + 3e^{-3} + \frac{9}{2}e^{-3} - e^{-4} - 4e^{-4} \\
&= \frac{17}{2}e^{-3} - 5e^{-4} \\
&= 0.42319 + 0.09158 = 0.33161.
\end{aligned}$$

Teorema 3.1.1. Misalkan $E[N(n)] = M(n)$, maka $M(n)$ memenuhi persamaan

$$M(n) = F(n) + \sum_{k=0}^{n} p_k M(n-k)$$

dimana

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n} p_k.$$

Bukti.

$$\begin{aligned} M(n) &= E[N(n)] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} E[N(n)|X_1 = k]P\{X_1 = k\} \end{aligned}$$

Jika $k > n$, maka

$$E[N(n)|X_1 = k]P\{X_1 = k\} = 0$$

karena kejadian pertama terjadi setelah waktu n. Jika $k \leq n$, maka

$$E[N(n)|X_1 = k]P\{X_1 = k\} = 1 + E[N(n-k)]P\{X_1 = k\}$$

dengan demikian

$$\sum_{k=0}^{n} E[N(n)|X_1 = k]P\{X_1 = k\} = \sum_{k=0}^{n}[1 + E[N(n-k)]P\{X_1 = k\}]$$

sehingga

$$\begin{aligned} M(n) &= \sum_{k=0}^{n}(1+E[N(n-k)])P\{X_1=k\} \\ &= \sum_{k=0}^{n} P\{X_1=k\} + \sum_{k=0}^{n} E[N(n-k)]P\{X_1=k\} \\ &= F(n) + \sum_{k=0}^{n} p_k M(n-k). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.1 adalah kasus khusus dari persamaan renewal. Secara umum, persamaan renewal dengan waktu diskret ditentukan oleh barisan $\{b_k\}$ yang terbatas dan berbentuk

$$v_n = b_n + \sum_{k=0}^{n} p_k v_{n-k} \qquad \text{untuk } n = 0, 1, \ldots. \tag{3.4}$$

Variabel-variabel yang tak diketahui nilainya adalah $v_0, v_1, \ldots$ dan $p_0, p_1, \ldots$ adalah distribusi probabilitas dari waktu antar kejadian, yakni $p_k = P\{X_1 = k\}$, yang selalu diasumsikan $p_0 < 1$.

Terdapat tepat satu barisan $v_0, v_1, \ldots$ yang memenuhi persamaan renewal, karena persamaan (3.4) dapat diselesaikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{b_0}{1-p_0}, \\ v_1 &= \frac{b_1 + p_1 v_0}{1-p_0}, \end{aligned}$$

dan seterusnya.

Misalkan u_n adalah *mean* banyaknya renewal yang terjadi tepat dalam periode n. Jika $p_0 = 0$ (sehingga X_i positif dan paling banyak satu renewal dapat terjadi pada setiap periode) maka u_n adalah peluang bahwa sebuah renewal terjadi pada periode n. Barisan $u_0, u_1, \ldots$ memenuhi persamaan renewal dan sangat penting dalam teori renewal. Misalkan

$$\delta_n = \begin{cases} 1 \text{ untuk } n = 0, \\ 0 \text{ untuk } n > 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Maka $\{u_n\}$ memenuhi persamaan renewal

$$u_n = \delta_n + \sum_{k=0}^{n} p_k u_{n-k} \qquad \text{untuk } n = 0, 1, \ldots \tag{3.6}$$

karena barisan$\{\delta_n\}$ terbatas.

Anggap pada waktu 0 sebuah bola lampu dinyalakan dan misalkan $N(n)$ adalah banyaknya penggantian bola lampu yang dilakukan pada interval waktu $[0, n]$. Maka δ_n menyatakan banyaknya bola lampu pada waktu 0. Selanjutnya dengan mengkondisikan pada lama waktu hidup bola lampu pertama, jika bola lampu gagal pada periode $k \leq n$, yang terjadi dengan peluang p_k, maka proses dilanjutkan lagi dan peluang bersyarat dari renewal di periode n menjadi u_{n-k}. Hal tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} u_n &= E[N(n)] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} E[N(n)|X_1 = k] P\{X_1 = k\}. \end{aligned}$$

Jika $k > n$, maka

$$E[N(n)|X_1 = k] P\{X_1 = k\} = 0$$

karena kejadian pertama terjadi setelah waktu n. Jika $k \leq n$, maka

$$E[N(n)|X_1 = k]P\{X_1 = k\} = 1 + E[N(n-k)]P\{X_1 = k\}$$

dengan demikian

$$\sum_{k=0}^{n} E[N(n)|X_1 = k]P\{X_1 = k\} = \sum_{k=0}^{n}[1 + E[N(n-k)]P\{X_1 = k\}]$$

sehingga

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n}(1 + E[N(n-k)])P\{X_1 = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{n} P\{X_1 = k\} + \sum_{k=0}^{n} E[N(n-k)]P\{X_1 = k\} \\ &= \delta_n + \sum_{k=0}^{n} p_k u_{n-k}. \end{aligned}$$

Lemma 3.1.1. Jika $\{v_n\}$ memenuhi persamaan (3.4) dan $\{u_n\}$ memenuhi persamaan (3.6) maka

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} u_k \qquad \text{untuk } n = 0, 1, \ldots.$$

Bukti. Karena persamaan (3.4) mempunyai penyelesaian tunggal maka bukti cukup dengan memeriksa barisan $\{v_n\}$ memenuhi persamaan (3.4) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
v_n &= \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} u_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} \{\delta_k + \sum_{l=0}^{k} p_{k-l} u_l\} \\
&= b_n + \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} b_{n-k} p_{k-l} u_l \\
&= b_n + \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=l}^{n} b_{n-k} p_{k-l} u_l \\
&= b_n + \sum_{l=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-l} p_j b_{n-l-j} u_l \\
&= b_n + \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-j} p_j b_{n-l-j} u_l \\
&= b_n + \sum_{j=0}^{n} p_j v_{n-j}.
\end{aligned}$$

□

Contoh 3.1.3. Jika $b_0 = b_1 = \frac{1}{2}$ dan $b_2 = b_3 = \ldots = 0$ serta $p_0 = \frac{1}{4}, p_1 = \frac{1}{2}$, dan $p_2 = \frac{1}{2}$, maka untuk persamaan renewal

$$v_n = b_n + \sum_{k=0}^{n} p_k v_{n-k} \qquad \text{untuk } n = 0, 1, \ldots, 10$$

diperoleh nilai v_n seperti pada Tabel 3.1.

Selanjutnya, jika $\delta_0 = 1$ dan $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = 0$ serta $p_0 = \frac{1}{4}, p_1 = \frac{1}{2}$, dan $p_2 = \frac{1}{2}$, maka dari persamaan renewal

$$u_n = \delta_n + \sum_{k=0}^{n} p_k u_{n-k} \qquad \text{untuk } n = 0, 1, \ldots, 10$$

diperoleh nilai u_n seperti pada Tabel 3.2.

n	v_n
0	0.666667
1	1.111111
2	0.962963
3	1.012346
4	0.995885
5	1.001372
6	0.999543
7	1.000152
8	0.999949
9	1.000016
10	0.999994

Tabel 3.1: Tabel Perhitungan v_n

n	u_n
0	1.333333
1	0.888889
2	1.037037
3	0.987654
4	1.004115
5	0.998628
6	1.000457
7	0.999848
8	1.000051
9	0.999983
10	1.000006

Tabel 3.2: Tabel Perhitungan u_n

Dari perhitungan tersebut diperoleh bahwa v_n dan u_n memenuhi hubungan

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} u_k$$

sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
0.666667 = v_0 &= b_0u_0 = \frac{1}{2} \times 1.333333 = 0.666667 \\
1.111111 = v_1 &= b_0u_1 + b_1u_0 \\
&= \left(\frac{1}{2} \times 0.888889\right) + \left(\frac{1}{2} \times 1.333333\right) = 1.111111 \\
0.962963 = v_2 &= b_0u_2 + b_1u_1 + b_2u_0 \\
&= \left(\frac{1}{2} \times 0.037037\right) + \left(\frac{1}{2} \times 0.888889\right) + (0 \times 1.333333) = 0.962963 \\
&\vdots \\
0.999994 = v_{10} &= b_0u_{10} + b_1u_9 + b_2u_8 + \ldots + b_{10}u_0 \\
&= \left(\frac{1}{2} \times 1.000006\right) + \left(\frac{1}{2} \times 0.999983\right) + (0 \times 1.000051) + \ldots \\
&+ (0 \times 1.333333) = 0.999994.
\end{aligned}
$$

Dari Tabel 3.1 dan Tabel 3.2 juga terlihat bahwa

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1$$

dan

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 1.$$

Contoh 3.1.4. Misalkan $X_1, X_2, \ldots$ secara berturut-turut waktu hidup bola lampu dan misalkan $W_0 = 0$ serta $W_n = X_1 + \ldots + X_n$ merupakan waktu penggantian. Asumsikan $p_0 = P\{X_1 = 0\} = 0$. Banyaknya penggantian (tanpa menghitung bola lampu pertama) sampai waktu n diberikan oleh

$$N(n) = k, \qquad \text{dimana } W_k \leq n < W_{k+1}.$$

Harga harapan $E[N(n)] = M(n)$ memenuhi Teorema 3.1.1

$$M(n) = p_0 + \ldots + p_n + \sum_{k=0}^{n} p_k M(n-k).$$

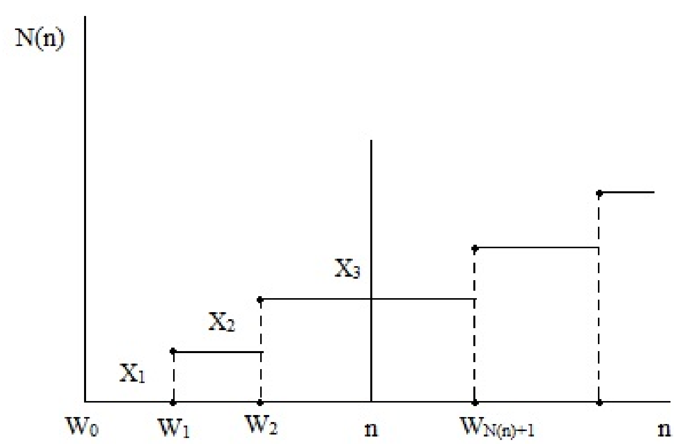
Perhatikan bahwa $m_n = E[N(n)+1] = M(n)+1$ memenuhi

$$m_n = 1 + \sum_{k=0}^{n} p_k m_{n-k} \qquad \text{untuk } n = 0, 1, \ldots. \tag{3.7}$$

Persamaan (3.7) adalah persamaan renewal dimana $b_n \equiv 1$ untuk semua n. Dengan menggunakan Lemma (3.1.1) diperoleh

$$m_n = \sum_{k=0}^{n} 1 u_k = u_1 + \ldots + u_n.$$

Sebaliknya, $u_n = m_n - m_{n-1} = M(n) - M(n-1)$.



Gambar 3.2: $W_{N(n)+1}$ selalu memuat X_1 dan memuat tambahan durasi ketika $X_1 = k \leq n$.

Untuk melanjutkan Contoh 3.1.4, misalkan $g_n = E[W_{N(n)+1}]$. Definisi g_n diilustrasikan pada Gambar (3.2). Akan ditunjukkan suatu g_n memenuhi persamaan renewal. Seperti yang ditunjukkan pada Gambar (3.2), $W_{N(n)+1}$ selalu memuat waktu penggantian pertama, yakni X_1. Selanjutnya, jika $X_1 = k \leq n$, yang terjadi dengan probabilitas p_k, maka $E[W_{N(n)+1}|X_1 = k] = g_{n-k}$. Kondisi rata-rata dengan masing-masing peluangnya dan penambahan menurut hukum peluang total diberikan sebagai

$$g_n = E[X_1] = \sum_{k=0}^{n} g_{n-k} p_k.$$

Misalkan

$$\begin{aligned} g_n &= E[W_{N(n)+1}] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} E[W_{N(n)+1}|X_1 = k] P\{X_1 = k\}. \end{aligned}$$

Jika $k > n$, maka

$$E[W_{N(n)+1}|X_1 = k] P\{X_1 = k\} = 0$$

karena kejadian pertama terjadi setelah waktu n. Jika $k \leq n$, maka

$$E[W_{N(n)+1}|X_1 = k] P\{X_1 = k\} = 1 + E[W_{N(n-k)+1}] P\{X_1 = k\}$$

dengan demikian

$$\sum_{k=0}^{n} E[W_{N(n)+1}|X_1 = k] P\{X_1 = k\} = \sum_{k=0}^{n} [1 + E[W_{N(n-k)+1}] P\{X_1 = k\}]$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
g_n &= \sum_{k=0}^{n}(1+E[W_{N(n-k)+1}])P\{X_1=k\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} P\{X_1=k\} + \sum_{k=0}^{n} E[W_{N(n-k)+1}]P\{X_1=k\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} g_{n-k}p_k
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu, dengan menggunakan Lemma 3.1.1 diperoleh

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} E[X_1]u_k = E[X_1]m_n.$$

Kareana $m_n = E[N(n)+1]$ dan $g_n = E[W_{N(n)+1}] = E[X_1 + \ldots + X_{N(n)+1}]$ maka diperoleh

$$E[X_1 + \ldots + X_{N(n)+1}] = E[X_1] \times E[N(n)+1]. \tag{3.8}$$

Perhatikan bahwa $N(n)$ tidak independen terhadap $\{X_k\}$, namun persamaan (3.8) masih berlaku.

Contoh 3.1.5. Misalkan $X_1, X_2, \ldots$ adalah waktu hidup dengan distribusi geometrik sebagai berikut

$$P\{X_1 = k\} = \alpha(1-\alpha)^{k-1} \qquad \text{untuk } n = 1, 2, \ldots$$

dimana $0 < \alpha < 1$. Maka dengan menggunakan rumus (3.5) dan (3.6), yakni

$$\delta_n = \begin{cases} 1 \text{ untuk } n = 0, \\ 0 \text{ untuk } n > 0 \end{cases}$$

dan

$$u_n = \delta_n + \sum_{k=0}^{n} p_k u_{n-k}$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
u_0 &= \delta_0 = 1 \\
u_1 &= \delta_1 + \alpha(1-\alpha)^0 u_0 = \alpha \\
u_2 &= \delta_2 + \alpha(1-\alpha)^0 u_1 + \alpha(1-\alpha)^1 u_0 = \alpha(\alpha + (1-\alpha)) = \alpha \\
u_3 &= \delta_2 + \alpha(1-\alpha)^0 u_2 + \alpha(1-\alpha)^1 u_1 + \alpha(1-\alpha)^2 u_0 \\
&= \alpha(\alpha^2 + 2\alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)^2) = \alpha \\
&\vdots
\end{aligned}$$

dan secara umum

$$u_n = \delta_n + \sum_{k=0}^{n} \alpha(1-\alpha)^{k-1} u_{n-k}.$$

3.1.2 Teorema Limit untuk *N(n)*

Proposisi 3.1.1.

$$\frac{N(n)}{n} \to \frac{1}{\mu} \qquad \text{untuk} \qquad n \to \infty.$$

Bukti. Karena $W_{N(n)} \leq n < W_{N(n)+1}$ maka

$$\frac{W_{N(n)}}{N(n)} \leq \frac{n}{N(n)} < \frac{W_{N(n)+1}}{N(n)}. \tag{3.9}$$

Menurut hukum bilangan bulat besar $\frac{W_{N(n)}}{N(n)} \to \mu$ untuk $N(n) \to \infty$. Tetapi karena $N(n) \to \infty$ untuk $n \to \infty$ maka

$$\frac{W_{N(n)}}{N(n)} \to \mu \qquad \text{untuk} \qquad n \to \infty.$$

Selanjutnya

$$\frac{W_{N(n)+1}}{N(n)} = \left[\frac{W_{N(n)+1}}{N(n)+1}\right]\left[\frac{N(n)+1}{N(n)}\right]$$

dan dengan alasan yang sama maka diperoleh

$$\frac{W_{N(n)+1}}{N(n)} \to \mu \qquad \text{untuk} \qquad n \to \infty.$$

Dengan menggunakan (3.10) maka bukti selesai. □

Teorema 3.1.2. (Teorema Limit Pusat untuk $N(n)$) Misalkan $\mu < \infty$ dan $\sigma^2 < \infty$ masing-masing menyatakan *mean* dan variansi dari waktu-waktu tunggu. Maka

$$P\left\{\frac{N\,(n) - n/\mu}{\sigma\sqrt{n/\mu^3}} < y\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2}dx,\ n \to \infty$$

.

Bukti. Misalkan $r_n = \frac{n}{\mu} + y\sigma\sqrt{\frac{n}{\mu^3}}$, maka

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{N\,(n) - n/\mu}{\sigma\sqrt{n/\mu^3}} < y\right\} &= P\{N(n) < r_n\} \\ &= P\{W_{r_n} > n\} \\ &= P\left\{\frac{W_{r_n} - r_n\mu}{\sigma\sqrt{r_n}} > \frac{n - r_n\mu}{\sigma\sqrt{r_n}}\right\} \\ &= P\left\{\frac{W_{r_n} - r_n\mu}{\sigma\sqrt{r_n}} > -y\left(1 + \frac{y\sigma}{\sqrt{n\mu}}\right)^{-1/2}\right\}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan teorema limit pusat, $(W_{r_n} - r_n\mu) = \sigma\sqrt{r_n}$ konvergen ke variabel acak normal dengan mean 0 dan variansi 1 untuk n (dengan demikian r_n) menuju tak hingga. Juga karena

$$-y\left(1+\frac{y\sigma}{\sqrt{n\mu}}\right)^{-1/2} \to -y \text{ untuk } n \to \infty$$

maka

$$P\left\{\frac{N(n)-n/\mu}{\sigma\sqrt{n/\mu^3}} < y\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$$

dan karena

$$\int_{-y}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2}dx$$

dengan demikian bukti selesai. □

3.1.3 Teorema Renewal Diskret

Teorema 3.1.3. (Taylor dan Karlin(1998)) Misalkan $0 < p_1 < 1$, $\{u_n\}$ dan $\{v_n\}$ masing-masing merupakan penyelesaian dari persamaan renewal (3.6) dan (3.4), secara berturut-turut. Maka

1. $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} kp_k}$ dan
2. Jika $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < \infty$ maka $\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{\{\sum_{k=0}^{\infty} b_k\}}{\{\sum_{k=0}^{\infty} kp_k\}}$.

Karena $\sum_{k=0}^{\infty} kp_k = E[X_1]$ adalah rata-rata waktu hidup dari suatu unit, maka persamaan (1) pada Teorema 3.1.3 menyatakan bahwa dalam waktu panjang, peluang renewal terjadi dalam interval tertentu adalah satu dibagi dengan rata-rata hidup suatu unit.

Contoh 3.1.6. Misalkan $\gamma_n = W_{N(n)+1} - n$ adalah *excess time*, yakni waktu terjadinya renewal pertama setelah waktu m dikurangi waktu n. Untuk bilangan bulat m, misalkan $f_n(m) = P\{\gamma_n = m\}$. Akan ditentukan persamaan renewal untuk $f_n(m)$ dengan kondisi pada hidup pertama adalah X_1. Untuk $m \geq 1$ maka

$$P\left\{\gamma_n = m|X_1 = k\right\} = \begin{cases} f_{n-k}\left(m\right) \text{ jika } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 1 \text{ jika k} = n+m, \\ 0 \text{ sebaliknya.} \end{cases}$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} f_n(m) &= P\{\gamma_n = m\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{\gamma_n = m|X_1 = k\}p_k \\ &= p_{m+n} + \sum_{k=0}^{\infty} f_{n-k}(m)p_k. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Teorema 3.1.3 dimana $b_n = p_{m+n}$ maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\gamma_n = m\right\} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_{m+k}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} kp_k} = \frac{P\left\{X_1 \geqslant m\right\}}{E\left[X_1\right]}, \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

Limit merupakan fungsi peluang bersyarat, karena jumlah keseluruhannya sama dengan satu, yakni

$$\frac{\sum\limits_{m=1}^{\infty} P\left\{X_1 \geqslant m\right\}}{E\left[X_1\right]} = \frac{E\left[X_1\right]}{E\left[X_1\right]} = 1.$$

3.2 Pertumbuhan Populasi Deterministik dengan Distribusi Usia

Pada bagian ini akan dibahas aplikasi proses renewal dengan waktu diskret pada model deterministik sederhana untuk pertumbuhan populasi yang memperhitungkan struktur usia dari populasi. Teorema renewal diskret (Teorema 3.1.3) akan digunakan dalam analisis.

3.2.1 Model Pertumbuhan Sederhana

Pertama akan dibahas model sederhana tanpa struktur usia. Anggap satu spesies berkembang dalam waktu diskret $t = 0, 1, 2, \ldots$ dan $N(t)$ menyatakan ukuran populasi pada waktu t. Asumsikan bahwa setiap individu yang ada di dalam populasi pada waktu t akan memberi keturunan dengan laju konstan λ yang membentuk populasi pada waktu $t+1$. (Jika kematian tidak terjadi dalam model, maka orang tua dianggap sebagai salah satu keturunannya sehingga $\lambda \geq 1$). Jika $N(0)$ adalah ukuran awal populasi, dan setiap individu menghasilkan keturunan dengan laju λ, maka

$$\begin{aligned} N(1) &= \lambda N(0), \\ N(2) &= \lambda N(1) = \lambda^2 N(0), \end{aligned}$$

atau dalam bentuk umum

$$N(t) = \lambda^t N(0). \tag{3.10}$$

Jika $\lambda > 1$, maka populasi tumbuh tanpa batas seiring dengan bertambahnya waktu, jika $\lambda < 1$, maka populasi akan musnah; sedangkan jika $\lambda = 1$, maka ukuran populasi tetap konstan jika $N(t) = N(0)$ untuk semua $t = 0, 1, \ldots$

3.2.2 Model Pertumbuhan dengan Struktur Usia

Notasi yang diperlukan dalam model dengan struktur usia dalam pertumbuhan populasi adalah sebagai berikut:

$n_{u,t}$ = banyak individu berusia u dalam populasi pada waktu t,

$N(t) = \sum_{u=0}^{\infty} n_{u,t}$ = total individu dalam populasi pada waktu t,

b_t = banyak individu baru yang diciptakan dalam populasi pada waktu t (jumlah kelahiran),

β_u = harga harapan banyak keturunan dari satu individu berusia u dalam satu periode waktu,

l_u = probabilitas bahwa seorang individu akan bertahan, sejak lahir sampai setidaknya berusia u.

Probabilitas bersyarat individu bertahan setidaknya sampai usia u apabila individu telah bertahan sampai usia $u - 1$ adalah

$$\begin{aligned} P\{X > u | X > u-1\} &= \frac{P\{X > u, X > u-1\}}{P\{X > u-1\}} \\ &= \frac{P\{X > u\}}{P\{X > u-1\}} = \frac{l_u}{l_{u-1}}. \end{aligned}$$

Fungsi m_u yang didefinisikan sebagai

$$m_u = l_u \beta_u$$

dinamakan fungsi *net maternity* yang merupakan laju kelahiran yang disesuaikan dengan kematian beberapa bagian dari populasi. Artinya, m_u adalah harga harapan banyaknya keturunan pada usia u dari individu sekarang berusia 0.

Selanjutnya akan dibahas total keturunan satu individu selama masa hidupnya. Seorang individu bertahan setidaknya sampai usia u dengan probabilitas l_u, dan selama satuan waktu berikutnya menghasilkan β_u keturunan. Dengan menjumlahkan $l_u\beta_u = m$ atas semua u akan diperolah total keturunan satu individu, yaitu

$$M = \sum_{u=0}^{\infty} l_u\beta_u = \sum_{u=0}^{\infty} m_u. \tag{3.11}$$

Jika $M > 1$ maka diharapkan populasi meningkat seiring dengan bertambahnya waktu. Jika $M < 1$ maka diharapkan populasi menurun. Sedangkan jika $M = 1$ maka ukuran populasi seharusnya tidak meningkat maupun menurun dalam jangka panjang.

Dalam mempertimbangkan efek dari struktur usia pada populasi yang berkembang, akan dipusatkan pada b_t, yakni banyaknya individu baru yang diciptakan dalam populasi pada waktu t. Akan dianggap β_u, l_u dan $n_{u,0}$ diketahui, dan masalahnya adalah menentukan b_t untuk $t \geq 0$. Setelah b_t diketahui, maka $n_{u,t}$ dan $N(t)$ dapat ditentukan. Sebagai contoh

$$n_{0,1} = b_1, \tag{3.12}$$

$$n_{u,1} = n_{u-1,0}\left[\frac{l_u}{l_{u-1}}\right] \text{ untuk } u \geqslant 1, \tag{3.13}$$

dan

$$N(1) = \sum_{u=0}^{\infty} n_{u,1}. \tag{3.14}$$

Pada persamaan (3.12), $n_{0,1}$ adalah banyaknya populasi saat waktu 1 yang berusia

0, yakni sama dengan b_1, mereka yang lahir dalam populasi pada waktu 1. Untuk persamaan kedua, $n_{u,1}$ adalah jumlah populasi pada saat waktu 1 yang berusia u. Individu-individu ini harus telah bertahan dari $n_{u-1,0}$ individu dalam populasi pada waktu 0 yang berusia $u-1$, probabilitas bersyarat ketahanan hidupnya adalah $[l_u/l_{u-1}]$, yang menjelaskan persamaan kedua. Hubungan terakhir menyatakan bahwa total populasi diperoleh dengan menjumlahkan banyaknya individu dari segala usia. Bentuk umum dari (3.12) sampai (3.14) adalah

$$n_{0,t} = b_t, \tag{3.15}$$

$$n_{u,t} = n_{u-1,t-1}\left[\frac{l_u}{l_{u-1}}\right] \text{ untuk } u \geqslant 1, \tag{3.16}$$

dan

$$N(t) = \sum_{u=0}^{\infty} n_{u,t} \text{ untuk } u \geqslant 1. \tag{3.17}$$

Setelah menjelaskan bagaimana $n_{u,t}$ dan $N(t)$ ditentukan setelah b_t ditemukan, maka akan dibahas bagaimana menentukan b_t. Banyaknya individu yang lahir pada waktu t memiliki dua komponen. Komponen pertama, a_t, adalah banyaknya keturunan dari individu-individu dalam populasi pada waktu t yang sudah ada pada waktu 0. Dalam kasus yang paling sederhana, populasi dimulai pada saat $t = 0$ dengan orang tua tunggal berusia $u = 0$, kemudian jumlah keturunan individu ini pada waktu t adalah $a_t = m_t$ yang sama dengan fungsi *net maternity*. Secara umum, asumsikan bahwa ada individu $n_{u,0}$ berusia u pada waktu 0. Probabilitas bahwa seorang individu berusia u saat waktu 0 akan bertahan sampai waktu t (pada waktu itu akan berusia $t+u$) adalah l_{t+u}/l_u. Oleh karena itu jumlah individu yang berusia u pada waktu 0 yang bertahan sampai waktu

t adalah $n_{u,0}(l_{t+u}/l_u)$, dan masing-masing individu, sekarang berusia $t+u$, akan menghasilkan β_{t+u} keturunan baru. Dengan menjumlahkan seluruh usia diperoleh

$$\begin{aligned} a_t &= \sum_{u=0}^{\infty} \beta_{t+u} n_{u,0} \frac{l_{t+u}}{l_u} \\ &= \sum_{u=0}^{\infty} \frac{m_{t+u} n_{u,0}}{l_u}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Komponen kedua dari b_t adalah banyaknya individu-individu yang dilahirkan pada waktu t yang orang tuanya tidak dalam populasi tetapi lahir setelah waktu 0. Sekarang, banyaknya individu yang dibuat pada waktu τ adalah b_τ. Probabilitas bahwa salah satu dari individu-individu ini bertahan sampai waktu t, waktu dimana ia akan berusia $t-\tau$, adalah $l_{t-\tau}$. Tingkat kelahiran bagi individu usia $t-\tau$ adalah $\beta_{t-\tau}$. Komponen b_t diperoleh dengan menjumlahkan atas seluruh kemungkinan τ, yakni

$$\begin{aligned} b_t &= a_t + \sum_{\tau=0}^{t} \beta_{t-\tau} l_{t-\tau} b_\tau \\ &= a_t + \sum_{\tau=0}^{t} m_{t-\tau} b_\tau. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Contoh 3.2.1. (Taylor dan Karlin(1998)) Perhatikan sebuah organisme yang menghasilkan dua anak pada usia 1, dan dua lagi pada usia 2, dan kemudian mati. Populasi dimulai dengan satu organisme berusia 0 pada waktu 0. Data yang dimiliki sebagai berikut

$$n_{0,0} = 1, \quad n_{u,0} = 0 \quad \text{untuk } u \geq 1,$$

$$b_1 = b_2 = 2,$$

$$l_0 = l_1 = l_2 = 1, \quad \text{dan} \quad l_u = 0 \quad \text{untuk } u > 2.$$

Dengan menggunakan (3.18) diperoleh

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 2, \quad \text{dan} \quad a_t = 0 \quad \text{untuk } t > 2.$$

Selanjutnya, (3.19) diselesaikan secara rekursif sebagai berikut

$$\begin{aligned}
b_0 &= 0, \\
b_1 &= a_1 + m_0 b_1 + m_1 b_0 \\
&= 2 + 0 + 0 = 2, \\
b_2 &= a_2 + m_0 b_2 + m_1 b_1 + m_2 b_0 \\
&= 2 + 0 + (2)(2) + 0 = 6, \\
b_3 &= a_3 + m_0 b_3 + m_1 b_2 + m_2 b_1 + m_3 b_0 \\
&= 0 + 0 + (2)(6) + (2)(2) + 0 = 16.
\end{aligned}$$

Jadi, misalnya, seorang individu berusia 0 pada waktu 0 menghasilkan 16 individu baru yang memasuki populasi pada waktu 3.

3.2.3 Perilaku Jangka Panjang

Teorema renewal diskret (Teorema 3.1.3) akan digunakan untuk menyimpulkan perilaku jangka panjang dari model populasi struktur usia ini. Perhatikan bahwa persamaan (3.19)

$$\begin{aligned} b_t &= a_t + \sum_{\tau=0}^{t} m_{t-\tau} b_\tau \\ &= a_t + \sum_{v=0}^{t} m_v b_{t-v} \end{aligned} \tag{3.20}$$

memiliki bentuk seperti persamaan renewal kecuali bahwa $\{m_v\}$ belum tentu merupakan distribusi probabilitas karena biasanya jumlah seluruh m_v tidak sama dengan 1. Untungnya terdapat cara untuk mengatasi hal tersebut. Akan digunakan variabel s yang nilainya akan dipilih kemudian, dan misalkan

$$m_v^\# = m_v s^v, \quad b_v^\# = b_v s^v, \quad \text{dan} \quad a_v^\# = a_v s^v.$$

Dengan mengalikan persamaan (3.20) dengan s^t dan karena

$$s^t m_v b_{t-v} = (m_v s^v)(b_{t-v} s^{t-v}) = m_v^\# b_{t-v}^\#,$$

maka

$$b_t^\# = a_t^\# + \sum_{v=0}^{t} m_v^\# b_{t-v}^\#. \tag{3.21}$$

Persamaan renewal ini berlaku dengan pilihan s yang manapun. Oleh karena itu akan dipilih s sehingga $\{m_v^\#\}$ merupakan distribusi probabilitas, yakni dipilih s sedemikian sehingga

$$\sum_{v=0}^{\infty} m_v^\# = \sum_{v=0}^{\infty} m_v s^v = 1.$$

Akan selalu ada s yang tunggal apabila $1 < \sum_{v=0}^{\infty} m_v < \infty$. Selanjutnya dapat diterapkan teorema renewal untuk (3.21) apabila asumsi nonperiodik dipenuhi. Untuk ini cukup bahwa $m_1 > 0$. Maka dapat disimpulkan bahwa

$$\lim_{t\to\infty} b_t^{\#} = \lim_{t\to\infty} b_t s^t = \frac{\sum_{v=0}^{\infty} a_v^{\#}}{\sum_{v=0}^{\infty} v m_v^{\#}}. \tag{3.22}$$

Dengan menetapkan $\lambda = 1/s$ dan $K = \sum_{v=0}^{\infty} a_v^{\#} / \sum_{v=0}^{\infty} v m_v^{\#}$ maka dari (3.22) dapat dituliskan

$$b_t \sim K\lambda^t \qquad \text{untuk } t \text{ yang besar.}$$

Dengan kata lain, secara asimtotik, populasi tumbuh dengan laju λ dimana $\lambda = 1/s$ adalah solusi untuk

$$\sum_{v=0}^{\infty} m_v \lambda^{-v} = 1.$$

Ketika t besar ($t > u$), maka (3.16) dapat diiterasi dengan cara

$$\begin{aligned}
n_{u,t} &= n_{u-1,t-1}\left[\frac{l_u}{l_{u-1}}\right] \\
&= n_{u-2,t-2}\left[\frac{l_{u-1}}{l_{u-2}}\right]\left[\frac{l_u}{l_{u-1}}\right] \\
&= n_{u-2,t-2}\left[\frac{l_u}{l_{u-2}}\right] \\
&\vdots \\
&= n_{0,t-u}\left[\frac{l_u}{l_0}\right] = b_{t-u} l_u.
\end{aligned}$$

Penulisan di atas menyatakan individu yang berusia u pada waktu t dilahirkan $t-u$ waktu yang lalu dan bertahan. Karena untuk t yang besar dimiliki $b_{t-u} \sim K\lambda^{t-u}$, maka

$$\begin{aligned} n_{u,t} \sim K l_u \lambda^{t-u} &= K(l_u \lambda^{-u})\lambda^t, \\ N(t) &= \sum_{u=0}^{\infty} n_{u,t} \sim K \sum_{u=0}^{\infty} (l_u \lambda^{-u})\lambda^t, \end{aligned}$$

dan

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n_{u,t}}{N(t)} = \frac{l_u \lambda^{-u}}{\sum_{v=0}^{\infty} l_v \lambda^{-v}}.$$

Ekspresi ini merupakan distribusi usia secara asimtotik atau distribusi usia yang stabil pada suatu populasi.

Contoh 3.2.2. (Taylor dan Karlin(1998)) Melanjutkan Contoh 3.2.1, dimana $m_1 = m_2 = 2$ dan $m_k = 0$ untuk yang lain, diperoleh

$$\sum_{v=0}^{\infty} m_v s^v = 2s + 2s^2 = 1.$$

Persamaan ini mempunyai penyelesaian sebagai berikut

$$\begin{aligned} s &= \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 + (4)(2)(1)}}{(2)^2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

yakni $s_1 = 0.366$ dan $s_2 = -1.366$.

Akar yang relevan adalah $s = 0.366$, sehingga $\lambda = 1/s = 2.732$. Jadi secara asimtotik, populasi tumbuh secara geometris pada tingkat $\lambda = 2.732...$, dan distribusi usia yang stabil adalah seperti yang ditunjukkan pada Tabel 3.3.

Usia	Bagian dari Populasi
0	$1/(1+s+s^2) = 0.6667$
1	$s/(1+s+s^2) = 0.2440$
2	$s^2/(1+s+s^2) = 0.0893$

Tabel 3.3: Tabel Distribusi Usia

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Distribusi dari banyaknya kejadian renewal merupakan selisih konvolusi dari distribusinya. Fungsi renewal berhingga untuk waktu yang berhinnga. Sedangkan intensitas proses renewal akan konvergen berbanding terbalik dengan rataannya untuk waktu yang berjangka. Harga harapan Untuk harga harapan dari banyaknya kejadian renewal sama dengan ekspektasi dari waktu antar kejadian renewal dibagi dengan rataannya. Kemudian limit fungsi dari banyaknya kejadian renewal pada waktu n $(N(n))$ adalah normal, berdasarkan teorema limit pusat dengan *mean* $\frac{n}{\mu}$ dan variansi $\frac{\sigma^2 n}{\mu^3}$. Dalam limit laju kejadian renewal sama dengan $\frac{1}{\mu}$.

2. Harga harapan dari banyaknya kejadian renewal dapat ditulis dalam persamaan renewal sebagai $M(n) = F(n) + \sum_{k=0}^{n} p_k M(n-k)$

3. Sifat proses renewal berdasarkan teorema renewal diskret, yaitu

   (a) $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} kp_k}$

   (b) Jika $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < \infty$ maka $\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{\{\sum_{k=0}^{\infty} b_k\}}{\{\sum_{k=0}^{\infty} kp_k\}}$

4. Dengan menggunakan proses renewal diskret untuk memodelkan pertumbuhan populasi dapat dihitung banyaknya individu dalam populasi, banyaknya individu baru, harga harapan dari banyaknya keturunan, probabilitas

individu yang bertahan, serta waktu dan usia dari individu dalam populasi tersebut.

4.2 Saran

Pembahasan pada skripsi ini, membahas proses renewal dengan waktu diskret secara umum, untuk perluasan dapat dibahas proses renewal reward dan proses renewal delayed dengan waktu diskret.

DAFTAR PUSTAKA

Barbu, V.S. dan Limnios, N.,. 2008. *Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models toward Applications: Discrete-Time Renewal Processes.* USA : Springer Science. pp.17-39

Brezavšček, Alenka. 2013. *A Simple Discrete Approximation for The Renewal Function.* Slovenia : University of Maribor. pp.65-75

Grinstead, C.M. dan Snell, J.L.,. 1997. *Introduction of Probability.* Edisi ke-2. New York : American Mathematical Society.

Radim, Briš. 2007. *Stochastic Ageing Models-Extensions of The Classic Renewal Theory.* Czech Republic : VŠB Technical University of Ostrava. pp.19-27

Ross, S.M. 2000. *Introduction to Probability Models.* Edisi ke-7. San Diego : Academic Press.

Ross, S.M. 1996. *Stochastic Processes.* New York : John Wiley.

Taylor, H.M. dan Karlin, S.,. 1998. *An Introduction to Stochastic Modeling.* Edisi ke-3. San Diego : Academic Press.

Walpole, R.E. dan Myers, R.H.,. 1995. *Probability and Statistics for Engineers and Scientists.* Edisi ke-4. Bandung : Institut Teknologi Bandung.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

Perhitungan untuk v_n

$$
\begin{aligned}
v_0 &= \frac{b_0}{1-p_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} = 0.666667 \\
v_1 &= \frac{b_1+p_1v_0}{1-p_0} = \frac{\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}.\frac{2}{3})}{1-\frac{1}{4}} = \frac{10}{9} = 1.111111 \\
v_2 &= \frac{b_2+p_1v_1+p_2v_0}{1-p_0} = \frac{0+(\frac{1}{2}.\frac{10}{9})+(\frac{1}{4}.\frac{2}{3})}{1-\frac{1}{4}} = \frac{26}{27} = 0.962963 \\
v_3 &= \frac{b_3+p_1v_2+p_2v_1+p_3v_0}{1-p_0} = \frac{0+(\frac{1}{2}.\frac{26}{27})+(\frac{1}{4}.\frac{10}{9})+(0.\frac{2}{3})}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{82}{81} = 1.012346 \\
v_4 &= \frac{b_4+p_1v_3+p_2v_2+p_3v_1+p_4v_0}{1-p_0} \\
&= \frac{0+(\frac{1}{2}.\frac{82}{81})+(\frac{1}{4}.\frac{26}{27})+(0.\frac{10}{9})+(0.\frac{2}{3})}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{242}{243} = 0.995885 \\
v_5 &= \frac{b_5+p_1v_4+p_2v_3+p_3v_2+p_4v_1+p_5v_0}{1-p_0} \\
&= \frac{0+(\frac{1}{2}.\frac{242}{243})+(\frac{1}{4}.\frac{82}{81})+(0.\frac{26}{27})+(0.\frac{10}{9})+(0.\frac{2}{3})}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{730}{729} = 1.001372
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_6 &= \frac{b_6 + p_1 v_5 + p_2 v_4 + p_3 v_3 + \ldots + p_6 v_0}{1 - p_0} \\
&= \frac{0 + (\frac{1}{2}.\frac{730}{729}) + (\frac{1}{4}.\frac{242}{243}) + (0.\frac{82}{81}) + \ldots + (0.\frac{2}{3})}{1 - \frac{1}{4}} \\
&= \frac{2186}{2187} = 0.999543 \\
v_7 &= \frac{b_7 + p_1 v_6 + p_2 v_5 + p_3 v_4 + \ldots + p_7 v_0}{1 - p_0} \\
&= \frac{0 + (\frac{1}{2}.\frac{2186}{2187}) + (\frac{1}{4}.\frac{730}{729}) + (0.\frac{242}{243}) + \ldots + (0.\frac{2}{3})}{1 - \frac{1}{4}} \\
&= \frac{6562}{6561} = 1.000152 \\
v_8 &= \frac{b_8 + p_1 v_7 + p_2 v_6 + p_3 v_5 + \ldots + p_8 v_0}{1 - p_0} \\
&= \frac{0 + (\frac{1}{2}.\frac{6562}{6561}) + (\frac{1}{4}.\frac{2186}{2187}) + (0.\frac{730}{729}) + \ldots + (0.\frac{2}{3})}{1 - \frac{1}{4}} \\
&= \frac{19682}{19683} = 0.999949 \\
v_9 &= \frac{b_9 + p_1 v_8 + p_2 v_7 + p_3 v_6 + \ldots + p_9 v_0}{1 - p_0} \\
&= \frac{0 + (\frac{1}{2}.\frac{19682}{19683}) + (\frac{1}{4}.\frac{6562}{6561}) + (0.\frac{2186}{2187}) + \ldots + (0.\frac{2}{3})}{1 - \frac{1}{4}} \\
&= \frac{59050}{59049} = 1.000016 \\
v_{10} &= \frac{b_{10} + p_1 v_9 + p_2 v_8 + p_3 v_7 + \ldots + p_{10} v_0}{1 - p_0} \\
&= \frac{0 + (\frac{1}{2}.\frac{59050}{59049}) + (\frac{1}{4}.\frac{19682}{19683}) + (0.\frac{6562}{6561}) + \ldots + (0.\frac{2}{3})}{1 - \frac{1}{4}} \\
&= \frac{177146}{177147} = 0.999994
\end{aligned}
$$

LAMPIRAN 2

Perhitungan untuk u_n

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \frac{\delta_0}{1-p_0} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 1.333333 \\
u_1 &= \frac{\delta_1 + p_1 u_0}{1-p_0} = \frac{0+(\frac{1}{2}.\frac{4}{3})}{1-\frac{1}{4}} = \frac{8}{9} = 0.888889 \\
u_2 &= \frac{\delta_2 + p_1 u_1 + p_2 u_0}{1-p_0} = \frac{0+(\frac{1}{2}.\frac{8}{9})+(\frac{1}{4}.\frac{4}{3})}{1-\frac{1}{4}} = \frac{28}{27} = 1.037037 \\
u_3 &= \frac{\delta_3 + p_1 u_2 + p_2 u_1 + p_3 u_0}{1-p_0} = \frac{0+(\frac{1}{2}.\frac{28}{27})+(\frac{1}{4}.\frac{8}{9})+(0.\frac{4}{3})}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{80}{81} = 0.987654 \\
u_4 &= \frac{\delta_4 + p_1 u_3 + p_2 u_2 + p_3 u_1 + p_4 u_0}{1-p_0} \\
&= \frac{0+(\frac{1}{2}.\frac{80}{81})+(\frac{1}{4}.\frac{28}{27})+(0.\frac{8}{9})+(0.\frac{4}{3})}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{244}{243} = 1.004115 \\
u_5 &= \frac{\delta_5 + p_1 u_4 + p_2 u_3 + p_3 u_2 + p_4 u_1 + p_5 u_0}{1-p_0} \\
&= \frac{0+(\frac{1}{2}.\frac{244}{243})+(\frac{1}{4}.\frac{80}{81})+(0.\frac{28}{27})+(0.\frac{8}{9})+(0.\frac{4}{3})}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{728}{729} = 0.998628
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_6 &= \frac{\delta_6 + p_1u_5 + p_2u_4 + p_3u_3 + \ldots + p_6u_0}{1 - p_0} \\
&= \frac{0 + (\frac{1}{2}.\frac{728}{729}) + (\frac{1}{4}.\frac{244}{243}) + (0.\frac{80}{81}) + \ldots + (0.\frac{4}{3})}{1 - \frac{1}{4}} \\
&= \frac{2188}{2187} = 1.000457 \\
u_7 &= \frac{\delta_7 + p_1u_6 + p_2u_5 + p_3u_4 + \ldots + p_7u_0}{1 - p_0} \\
&= \frac{0 + (\frac{1}{2}.\frac{2188}{2187}) + (\frac{1}{4}.\frac{728}{729}) + (0.\frac{244}{243}) + \ldots + (0.\frac{4}{3})}{1 - \frac{1}{4}} \\
&= \frac{6560}{6561} = 0.999848 \\
u_8 &= \frac{\delta_8 + p_1u_7 + p_2u_6 + p_3u_5 + \ldots + p_8u_0}{1 - p_0} \\
&= \frac{0 + (\frac{1}{2}.\frac{6560}{6561}) + (\frac{1}{4}.\frac{2188}{2187}) + (0.\frac{728}{729}) + \ldots + (0.\frac{4}{3})}{1 - \frac{1}{4}} \\
&= \frac{19684}{19683} = 1.000051 \\
u_9 &= \frac{\delta_9 + p_1u_8 + p_2u_7 + p_3u_6 + \ldots + p_9u_0}{1 - p_0} \\
&= \frac{0 + (\frac{1}{2}.\frac{19684}{19683}) + (\frac{1}{4}.\frac{6560}{6561}) + (0.\frac{2188}{2187}) + \ldots + (0.\frac{4}{3})}{1 - \frac{1}{4}} \\
&= \frac{59048}{59049} = 0.999983 \\
u_{10} &= \frac{\delta_{10} + p_1u_9 + p_2u_8 + p_3u_7 + \ldots + p_{10}u_0}{1 - p_0} \\
&= \frac{0 + (\frac{1}{2}.\frac{59048}{59049}) + (\frac{1}{4}.\frac{19684}{19683}) + (0.\frac{6560}{6561}) + \ldots + (0.\frac{4}{3})}{1 - \frac{1}{4}} \\
&= \frac{177148}{177147} = 1.000006
\end{aligned}
$$

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama	:	Dwi Ariyani
No. Registrasi	:	3125102335
Jurusan	:	Matematika
Program Studi	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul "**Sifat-Sifat dan Aplikasi Proses Renewal Diskret**" adalah :

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, Juni 2015

Yang membuat pernyataan

Dwi Ariyani

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

DWI ARIYANI. Lahir di Bekasi, 18 Januari 1992. Anak kedua dari pasangan Bapak Ikun dan Ibu Supranti. Saat ini bertempat tinggal di Jalan Cendana XIV dalam, KP. Pulo Gede RT.05/RW.11 no.12, Jakasampurna, Bekasi Barat 17137.

No. Ponsel : 0856 994 2491

Email : ariyani2dwi@gmail.com

Riwayat Pendidikan : Penulis mengawali pendidikan di TK Al Irsyad selama 1 tahun dan kemudian melanjutkan pendidikan di SD Negeri Jakasampurna IV Bekasi selama 6 tahun. Tahun 2004, setelah itu melanjutkan ke SMP Negeri 4 Bekasi hingga tahun 2007. Di tahun 2007 penulis melanjutkan ke SMA Negeri 3 Bekasi dan lulus tahun 2010. Di tahun itu pula penulis mengikuti Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN) dan mendapat Jurusan Matematika, Universitas Negeri Jakarta (UNJ). Di pertengahan tahun 2015, penulis telah memperoleh gelar Sarjana Sains untuk Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, FMIPA, UNJ.