UJI HOMOGENITAS VARIANSI MENGGUNAKAN PROSEDUR UJI PERMUTASI DAN BOOTSTRAP PADA RANCANGAN ACAK LENGKAP

Skripsi
Disusun untuk melengkapi syarat-syarat
guna memperoleh gelar Sarjana Sains

HAMAS FAHMI HASYIM
3125111211

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA
2015

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

UJI HOMOGENITAS VARIANSI MENGGUNAKAN PROSEDUR UJI PERMUTASI DAN BOOTSTRAP PADA RANCANGAN ACAK LENGKAP

Nama : Hamas Fahmi Hasyim

No. Registrasi : 3125111211

	Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab			
Dekan	: Prof. Dr. Suyono, M.Si.	....	....
	NIP. 19671218 199303 1 005		
Wakil Penanggung Jawab			
Pembantu Dekan I	: Dr. Muktiningsih, M.Si.	....	....
	NIP. 19640511 198903 2 001		
Ketua	: Ir. Fariani Hermin, M.T.	....	....
	NIP. 19600211 198703 2 001		
Sekretaris	: Vera Maya Santi, M.Si.	....	....
	NIP. 19790531 200501 2 006		
Penguji	: Drs. Sudarwanto, M.Si., DEA	....	....
	NIP. 19650325 199303 1 003		
Pembimbing I	: Dra. Widyanti Rahayu, M.Si.	....	....
	NIP. 19661103 200112 2 001		
Pembimbing II	: a.n Drs. Bambang Irawan, M.Si.	....	....
	Dr. Lukita Ambarwati, S.Pd, M.Si.		
	NIP. 19721026 200112 2 001		

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal: 8 Desember 2015

ABSTRACT

HAMAS FAHMI HASYIM, 3125111211. Permutation and Bootstrap Procedure for Testing Homogeneity of Variance on Randomized Complete Designed. Thesis. Faculty of Mathematics and Natural Science Jakarta State University. 2015.

Randomized complete designed is a kind of designed experiment where the treatment is given randomly to all units of the experiment. Normality and homogeneity of variance assumption are important assumption before using analysis of variances(ANOVA) on randomized complete designed. There are three basic approaches that have been used to obtain procedures robust for testing homogeneity of variance with nonnormality assumption: (1) Adjust the normal theory test procedure using an estimate of kurtosis, (2) Perform analysis of variances(ANOVA) on a data set in which each observation is replaced by a scale variable such as the absolute deviation from the mean or median. A related procedure is to perform ANOVA on the jackknife pseudo-values of scale quantity such as the log of sample variance and (3) Use resampling to obtain p values for a given test statistic. The basic approaches which are used such as resample of permutation method and residual bootstrap by using the statistic of Bartlett test to obtain p-value. The result of p-value bootstrap for data from study on Calcium Edetate of food consumption is 0.101 for 1000 resample. So there is no difference in variation between an observation and the other ones. The result of p-value permutasi and bootstrap for data from study on basic math final score is 0.856 and 0.790 for 1000 resample. So there is no difference in variation between an observation and the other ones.

Keywords *: randomized complete designed, normality assumption, testing homogeneity of variance, permutation resample, residual bootstrap, Bartlett test, p-value.*

ABSTRAK

HAMAS FAHMI HASYIM, 3125111211. Uji Homogenitas Variansi Menggunakan Prosedur Uji Permutasi dan Bootstrap pada Rancangan Acak Lengkap. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. 2015.

Rancangan acak lengkap adalah jenis rancangan percobaan dimana perlakuan diberikan secara acak kepada seluruh unit percobaan. Asumsi normalitas dan homogenitas variansi merupakan asumsi penting sebelum menggunakan metode analisis variansi (ANOVA) pada rancangan acak lengkap. Ada 3 dasar pendekatan agar memperoleh prosedur yang valid untuk menguji homogenitas variansi dimana asumsi normalitasnya tidak terpenuhi : (1) Menyesuaikan prosedur uji pada teori kenormalan menggunakan estimasi kurtosis, (2) Melakukan analisis variansi (ANOVA) pada suatu himpunan data dimana setiap observasi digantikan dengan variabel skala seperti simpangan baku dari rataan atau median. Prosedur yang terkait adalah melakukan ANOVA pada *pseudo-values Jackknife* dari skala kuantitas seperti log dari variansi sampel dan (3) Menggunakan metode resampling untuk memperoleh *p-value* dengan suatu uji statistik yang digunakan. Dasar pendekatan yang digunakan yaitu metode resampling permutasi dan bootstrap residual dengan statistik Uji Bartlett untuk memperoleh *p-value*. Untuk studi kasus data konsumsi makanan yang mengandung *Calcium Edetate*, hasil *p-value* dengan prosedur uji bootstrap untuk 1000 resampel adalah 0.101. Jadi, tidak ada perbedaan variansi antara pengamatan yang satu dengan pengamatan lainnya. Untuk studi kasus data nilai akhir matematika dasar, hasil *p-value* masing-masing dengan prosedur uji permutasi dan prosedur uji bootstrap untuk 1000 resampel adalah 0.856 dan 0.790. Jadi, tidak ada perbedaan variansi antara pengamatan yang satu dengan pengamatan lainnya.

Kata kunci : rancangan acak lengkap, asumsi normalitas, uji homogenitas variansi, resampling permutasi, bootstrap residual, uji Bartlett, *p-value*.

PERSEMBAHANKU...

"Fainnama'al 'usriyusraa. Innama'al 'usri yusraa"

(Q.S. Al-Insyirah:5-6)

و مَنْ يَسَّرَ عَلَى مُعْسِرٍ يَسَّرَ اللهُ عَلَيهِ فِي الدُنيَا و الأَخِرَةِ

"Barang siapa yang mempermudah orang yang dalam kesulitan maka Allah akan mempermudah urusannya di dunia dan akhirat. "

- HR. Muslim

" Yakinlah dengan segala mimpi,impian dan pilihan hidup kita. Keberhasilan dalam hidup akan datang pada mereka yang terus berusaha dan berdo'a. "

- Hamas Fahmi, 2015.

Skripsi ini kupersembahkan untuk Bapak, Mama, dan Mbak Fani.

"Terima kasih atas dukungan, pengorbanan dan do'a, serta kasih sayang yang selalu terbentang luas untuk anakmu".

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT atas nikmat sehat, pengetahuan dan kemampuan yang diberikan kepada penulis sehingga skripsi yang berjudul "Uji Homogenitas Variansi Menggunakan Prosedur Uji Permutasi dan Bootstrap pada Rancangan Acak Lengkap" yang merupakan salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Jurusan Matematika Universitas Negeri Jakarta dapat terselesaikan dengan baik.

Skripsi ini berhasil diselesaikan tidak terlepas dari adanya bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin menyampaikan terima kasih terutama kepada:

1. Ibu Dra. Widyanti Rahayu, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I dan alm. Bapak Bambang Irawan, M.Si., selaku Dosen Pembimbing II, yang telah meluangkan waktunya dalam memberikan bimbingan, saran, nasehat serta arahan sehingga skripsi ini dapat menjadi lebih baik dan terarah.

2. Ibu Dr. Lukita Ambarwati, S.Pd., M.Si. selaku Ketua Prodi Matematika FMIPA UNJ dan Ibu Ratna Widyati, S.Si, M.Kom. yang telah banyak membantu dan mempermudah penulis.

3. Bapak Drs. Mulyono, M.Kom., selaku Pembimbing Akademik atas segala bimbingan dan kerja sama Bapak selama perkuliahan, dan seluruh Bapak/Ibu dosen atas pengajarannya yang telah diberikan, serta karyawan/ karyawati FMIPA UNJ yang telah memberikan informasi yang penulis butuhkan dalam menyelesaikan skripsi.

4. Ir. Fariani Hermin, M. T., Vera Maya Santi, M.Si dan Drs. Sudarwanto, M.Si., DEA selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan masukannya untuk penulisan tugas akhir ini agar menjadi lebih baik lagi.

5. Kedua orangtua penulis, Bapak dan Mama yang selalu mendukung, memberi semangat, dan berdoa tiada henti bahkan tanpa diminta agar penulis dapat menyelesaikan studinya dengan baik.

6. Kakak penulis dan suaminya, Lewis Fania dan Febry Herlambang yang terus memberi semangat, mendoakan penulis, dan mendesak penulis untuk segera menyelesaikan skripsi ini.

7. Syifa Aulia dan Anisa Idam yang telah banyak memberikan saran, petuah, motivasi dan semangat saat keyakinan dan kepercayaan diri penulis sedang berada dititik terendahnya.

8. Mahdhi yang telah membantu penulis dalam pembuatan program matlab sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan Krisfian Eka yang telah membantu penulis mencarikan dan mengirimkan laporan penelitian dari UGM.

9. Teman-teman MA Kece yaitu Afifah Arifianty, Firdha Defita dan Nida Shafiyanti. Terima kasih untuk kebersamaannya selama masa Praktek Kerja Lapangan dan tetap terus saling menyemangati dan mendoakan hingga pengerjaan tugas akhir.

10. Teman-teman matematika 2011 yaitu Musvirah, Desya, Nancy, Monic, Nita, Rifqi, Puti, Dytta, Riska, Ridianti, Debi, Danti, Indah D, Ambar, Lina, Gia, Tyan, Dinna A, Nurul, Debora, Rizki A, Indah H, Fitri. Terima kasih untuk

kebersamaannya, suka duka, dan banyak pelajaran berharga yang penulis dapat dari kalian.

11. Teman-teman D.O.T yaitu Rizki D.P, Agung, Sandy, Albert, Iyus, Agi, Bagus, Julu, Danu, dan Tedi. Terima kasih untuk setiap candaan dan keseruannya selama 4 tahun ini.

12. Mulyono, Dimas, Rohman, Sultan dan ustad Mujiadi yang telah membantu penulis dalam proses pengerjaan tugas akhir ini secara tidak langsung.

13. Teman-teman dan pihak-pihak yang tidak sempat penulis sebutkan satu per satu. Terima kasih atas segala bantuan, doa dan dukungannya bagi penulis dalam pengerjaan tugas akhir ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Masukan dan kritikan akan sangat berarti. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca sekalian.

Jakarta, 2015

Hamas Fahmi Hasyim

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Rancangan acak lengkap (RAL) adalah jenis rancangan percobaan dimana perlakuan diberikan secara acak kepada seluruh unit percobaan. Rancangan acak lengkap digunakan untuk percobaan yang memiliki media atau lingkungan percobaan yang seragam atau homogen. Model rancangan acak lengkap didefinisikan sebagai berikut :

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

Dengan $i = 1, 2, \ldots, k$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$

Y_{ij}	:	Pengamatan ke-j dalam perlakuan ke-i
μ	:	Rata-rata umum atau keseluruhan
τ_i	:	Pengaruh dari perlakuan ke-i
ε_{ij}	:	Galat percobaan dari perlakuan ke-i pada pengamatan ke-j

Pengujian hipotesis dalam rancangan acak lengkap menggunakan teknik analisis variansi (*analysis of variance*) atau lebih dikenal dengan ANOVA. Analisis variansi pertama kali diperkenalkan oleh Sir Ronald Fisher, bapak statistika modern pada tahun 1920. Teknik analisis variansi sebagai salah satu uji parametrik digunakan untuk membedakan nilai rata-rata lebih dari dua kelompok data dengan cara membandingkan variansinya (Hidayati, 2015).

Sebelum menggunakan teknik ANOVA, ada asumsi-asumsi yang harus dipenuhi yaitu galat percobaan berdistribusi normal dan saling bebas satu sama lain, variansi galat bernilai sama (konstan) untuk setiap taraf perlakuan, serta asumsi aditif. Jika dalam suatu himpunan data, asumsi homogenitas variansi tidak terpenuhi maka akan memengaruhi keabsahan dari uji F pada metode analisis variansi untuk rancangan acak lengkap (Montgomery, 2001). Uji homogenitas variansi yang digunakan pada penulisan ini yaitu uji Bartlett. Uji Bartlett menganggap bahwa untuk setiap k populasi berdistribusi normal dan sampel acak yang diambil dari tiap populasi saling bebas (Zulaela, 1990).

Uji homogenitas variansi dengan asumsi normalitas yang tidak terpenuhi dapat menggunakan 3 dasar pendekatan berikut ini (Dennis D. Boos dan Cavell Brownie, 2004):

1. Menyesuaikan prosedur uji pada teori kenormalan menggunakan estimasi kurtosis.

2. Melakukan analisis variansi (ANOVA) pada suatu himpunan data dimana setiap observasi digantikan dengan variabel skala seperti simpangan baku dari rataan atau median. Prosedur yang terkait adalah melakukan ANOVA pada *pseudo-values Jackknife* dari skala kuantitas seperti log dari variansi sampel.

3. Menggunakan metode resampling untuk memperoleh *p-value* dengan suatu uji statistik yang digunakan.

Di dalam penulisan ini akan dibahas mengenai uji homogenitas variansi dimana asumsi normalitas tidak terpenuhi dengan menggunakan dasar pendekatan yang ketiga yaitu menggunakan metode resampling permutasi dan bootstrap untuk memperoleh *p-value*. *P-value* adalah tingkat keberartian terkecil sehingga nilai suatu uji statistik yang sedang diamati masih berarti atau besarnya peluang melakukan kesalahan apabila kita memutuskan untuk menolak H_0 (Kurniawan, 2008).

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, perumusan masalah yang diuraikan dalam penulisan ini adalah bagaimana cara menguji homogenitas variansi jika asumsi normalitas tidak terpenuhi.

1.3 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah dalam penulisan skripsi ini yaitu:

1. Model rancangan acak lengkap yang digunakan adalah model rataan dan model pengaruh tetap.
2. Menganggap hanya asumsi normalitas pada rancangan acak lengkap yang tidak terpenuhi.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah :

1. Menjelaskan penggunaan metode permutasi dan bootstrap untuk menguji homogenitas variansi.

2. Menerapkan metode permutasi dan bootstrap untuk menguji homogenitas variansi pada studi kasus data Konsumsi Makanan yang Mengandung *Calcium Edetate* dan data Nilai Akhir Matematika Dasar.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Menambah pengetahuan mengenai penerapan lain dari metode permutasi dan bootstrap pada analisis variansi untuk rancangan acak lengkap yaitu menguji homogenitas variansi.

2. Sebagai uji alternatif untuk pengujian homogenitas variansi pada analisis variansi untuk rancangan acak lengkap.

1.6 Metode Penelitian

Skripsi ini merupakan kajian teoretis di bidang statistika yakni dengan mempelajari referensi yang berhubungan dengan homogenitas variansi pada analisis variansi untuk rancangan acak lengkap, metode permutasi dan metode bootstrap. Pembahasan yang diberikan merupakan hasil dari mempelajari buku, jurnal, skripsi, *paper*, laporan penelitian dan situs matematika. Referensi utama yang digunakan adalah jurnal *Bootstrap Methods for Testing Homogeneity of Variances* (Dennis D. Boos dan Cavell Brownie, 1986) dan *Comparing Variances and Other Measures of Dispersion* (Dennis D. Boos dan Cavell Brownie, 2004).

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Rancangan Acak Lengkap

Rancangan Acak Lengkap (RAL) merupakan rancangan percobaan yang paling sederhana dimana satuan atau bahan percobaan yang digunakan homogen atau tidak ada faktor lain yang mempengaruhi variabel respon diluar faktor yang dicoba atau diteliti. Keuntungan dari penggunaan rancangan acak lengkap antara lain denah perancangan percobaan lebih mudah, analisis statistika terhadap subjek percobaan sangat sederhana, fleksibel dalam penggunaan jumlah perlakuan dan ulangan. Kekurangan dari rancangan acak lengkap yaitu semakin banyak perlakuan yang diuji coba maka semakin sulit pula usaha untuk menyediakan unit percobaan yang homogen. Oleh karena itu, rancangan model ini hanya cocok untuk rancangan dengan jumlah perlakuan dan pengulangan yang relatif sedikit. Berikut ini adalah tabel rancangan acak lengkap dengan k sampel.

Tabel 2.1: Data Rancangan Acak Lengkap Dengan k Sampel

	Perlakuan						Jumlah
	1	2	......	i	......	k	
	Y_{11}	Y_{21}	......	Y_{i1}	......	Y_{k1}	
	Y_{12}	Y_{22}	......	Y_{i2}	......	Y_{k2}	
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
	Y_{1n}	Y_{2n}	......	Y_{in}	......	Y_{kn}	
Jumlah	$Y_{1.}$	$Y_{2.}$	......	$Y_{i.}$	......	$Y_{k.}$	$Y_{..}$
Rataan	$\bar{Y}_{1.}$	$\bar{Y}_{2.}$	......	$\bar{Y}_{i.}$	......	$\bar{Y}_{k.}$	$\bar{Y}_{..}$

Dengan $\bar{Y}_{i.} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_{i.}$ dan $\bar{Y}_{..} = \frac{Y_{..}}{nk}$

$Y_{i.}$	:	Jumlah semua pengamatan dalam sampel dari perlakuan ke-i
$\bar{Y}_{i.}$	:	Rataan semua pengamatan dalam sampel dari perlakuan ke-i
$Y_{..}$	:	Jumlah semua nk pengamatan
$\bar{Y}_{..}$	:	Rataan semua nk pengamatan

2.1.1 Model Rancangan Acak Lengkap

Model linier dari rancangan acak lengkap sering disebut juga model analisis variansi satu arah atau faktor tunggal. Model linier dari rancangan acak lengkap dengan k buah perlakuan dan n buah pengamatan didefinisikan sebagai berikut:

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \tag{2.1}$$

Persamaan (2.1) dinamakan dengan model rataan karena parameter yang diteliti dalam model tersebut adalah rata-rata perlakuan ke-i. Persamaan (2.1) dapat dituliskan kembali ke dalam bentuk persamaan lainnya dimana $\mu_i = \mu + \tau_i$ menjadi

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) dinamakan dengan model pengaruh.

Dengan $i = 1, 2, \ldots, k$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$

Y_{ij} : Pengamatan ke-j dalam perlakuan ke-i

μ : Rata-rata umum atau keseluruhan

μ_i : Rata-rata dari perlakuan ke-i

τ_i : Pengaruh dari perlakuan ke-i

ε_{ij} : Galat percobaan pengamatan ke-j dari perlakuan ke-i

Asumsi-asumsi yang harus dipenuhi pada rancangan acak lengkap adalah sebagai berikut :

1. $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$.
2. ε_{ij} saling bebas satu sama lain.
3. Pengaruh dari faktor perlakuan (τ_i) dan galat (ε_{ij}) bersifat aditif artinya respon Y akibat dari penambahan faktor perlakuan (τ_i) dan galat (ε_{ij}).

Asumsi-asumsi di atas mengakibatkan observasi $Y_{ij} \sim N(\mu + \tau_i, \sigma^2)$.

Model linier untuk rancangan acak lengkap pada persamaan (2.2) dapat dipandang sebagai 2 keadaan yang berbeda berkenaan dengan pengaruh perlakuan yaitu sebagai model pengaruh tetap dan model pengaruh acak. Pada model pengaruh tetap, k perlakuan dapat dipilih secara khusus oleh peneliti. Kesimpulan dari model pengaruh tetap berlaku hanya untuk perlakuan-perlakuan yang dianalisis saja dan tidak dapat diperluas untuk seluruh perlakuan pada populasi.

Pada model pengaruh acak, k perlakuan menjadi sampel acak dari suatu populasi perlakuan. Kesimpulan dari model pengaruh acak tidak hanya berlaku untuk perlakuan-perlakuan yang dianalisis saja, tetapi dapat diperluas untuk seluruh perlakuan pada populasi berdasarkan sampel perlakuan. Dalam penulisan tugas akhir hanya dibatasi pada model pengaruh tetap saja.

2.1.2 Analisis Model Pengaruh Tetap

Tujuan dari rancangan acak lengkap adalah untuk mengetahui adanya pengaruh dari perlakuan atau tidak. Sehingga hipotesis yang diuji pada rancangan acak lengkap adalah apakah perlakuan memberikan pengaruh yang nyata terhadap respon yang diamati atau tidak. Sebelumnya diketahui bahwa $E(Y_{ij}) = \mu + \tau_i = \mu_i, (i = 1, 2, 3, \ldots, k)$. Oleh karena itu, hipotesisnya dirumuskan sebagai berikut:

H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_k$

H_1 : Minimal ada satu μ_i yang berbeda, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$

Pada model pengaruh tetap, rata-rata perlakuan ke-i (μ_i) diubah menjadi 2 komponen yaitu $\mu_i = \mu + \tau_i$. Selanjutnya μ menyatakan rataan keseluruhan dari semua μ_i yang didefinisikan dengan :

$$\mu = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i$$

Jika $\mu_i = \mu + \tau_i$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}\mu_i &= \sum_{i=1}^{k}(\mu + \tau_i) = k\mu + \sum_{i=1}^{k}\tau_i = k\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i + \sum_{i=1}^{k}\tau_i \\
\sum_{i=1}^{k}\tau_i &= 0
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, hipotesis di atas juga identik dengan hipotesis di bawah ini yaitu tidak terdapat perbedaan diantara pengaruh-pengaruh k perlakuan yang ada di percobaan.

$$H_0 \quad : \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \cdots = \tau_k = 0$$

$$H_1 \quad : \quad \text{Minimal ada satu } \tau_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3, \ldots, k$$

Dengan demikian menguji hipotesis bahwa rata-rata perlakuan adalah sama, ekuivalen dengan menguji hipotesis pengaruh-pengaruh perlakuan sama dengan nol. Selanjutnya asumsi pada model pengaruh tetap akan digunakan untuk mendapatkan estimasi parameter model. Asumsi-asumsi tersebut adalah sebagai berikut :

1. $\sum_{i=1}^{k} \tau_i = 0$ artinya semua perlakuan dianggap tetap dan
2. $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$.

2.1.3 Estimasi Parameter Model

Estimasi parameter pada rancangan acak lengkap dapat diperoleh berdasarkan model $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$ dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat Q jika $\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \mu - \tau_i$ sehingga

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (Y_{ij} - \mu - \tau_i)^2$$

1. Untuk memperoleh estimasi dari μ yang membuat Q minimum, maka Q diturunkan terhadap μ, kemudian disamakan dengan nol. Hasilnya adalah :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \mu} &= 2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (Y_{ij} - \mu - \tau_i)(-1) \\ &= -2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (Y_{ij} - \mu - \tau_i) \end{aligned}$$

Karena $\frac{\partial Q}{\partial \mu} = 0$ maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial \mu} &= -2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij} - \mu - \tau_i) = 0 \\
0 &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij} - \mu - \tau_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij} - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} \mu - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} \tau_i \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij} - kn\mu - n\sum_{i=1}^{k} \tau_i
\end{aligned}$$

Karena diasumsikan model tetap maka $\sum_{i=1}^{k} \tau_i = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij} - kn\mu \\
kn\mu &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij} \\
\mu &= \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}}{kn} \\
\hat{\mu} &= \frac{Y_{..}}{kn} = \bar{Y}_{..} \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

2. Selanjutnya untuk memperoleh estimasi dari τ_i yang membuat Q minimum, maka Q diturunkan terhadap τ_i, kemudian disamakan dengan nol. Hasilnya adalah :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial \tau_i} &= 2\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij} - \mu - \tau_i)(-1) \\
&= -2\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij} - \mu - \tau_i)
\end{aligned}$$

Karena $\frac{\partial Q}{\partial \tau_i} = 0$ maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial \tau_i} &= -2\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij} - \mu - \tau_i) = 0 \\
0 &= \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} - \sum_{j=1}^{n} \mu - \sum_{j=1}^{n} \tau_i = \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} - n\mu - n\tau_i \\
n\tau_i &= \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} - n\mu \\
\tau_i &= \frac{\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}}{n} - \mu \\
\hat{\tau}_i &= \frac{Y_{i.}}{n} - \frac{Y_{..}}{kn} = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..} \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

3. Setelah estimasi dari τ_i dan μ didapatkan, maka estimasi untuk μ_i dapat diperoleh melalui $\mu_i = \mu + \tau_i$ sehingga

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_i &= \hat{\tau}_i + \hat{\mu} = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..} + \bar{Y}_{..} \\
\hat{\mu}_i &= \bar{Y}_{i.} \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

2.1.4 Penguraian Jumlah Kuadrat

Keragaman nilai-nilai observasi sebagai akibat pengaruh perlakuan maupun galat dapat dilihat dari besarnya jumlah kuadrat total atau JKT. Untuk mengetahui seberapa besar jumlah kuadrat yang diakibatkan oleh perlakuan dan galat maka JKT diuraikan komponen-komponennya melalui teorema berikut ini.

Teorema 2.1.1. Identitas jumlah kuadrat

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = n\sum_{i=1}^{k}(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 \qquad (2.6)$$

Bukti.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij}-\bar{Y}_{..})^2 &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left[(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})+(Y_{ij}-\bar{Y}_{i.})\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left[(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})^2+2(\bar{Y}_{i}-\bar{Y}_{..})(Y_{ij}-\bar{Y}_{i.})+(Y_{ij}-\bar{Y}_{i.})^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})^2+2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})(Y_{ij}-\bar{Y}_{i.}) \\
&+ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij}-\bar{Y}_{i.})^2
\end{aligned}$$

Hasil dari $2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})(Y_{ij}-\bar{Y}_{i.})=0$ (lampiran A1) dan penjumlahan pada suku yang pertama tidak mengandung indeks j, maka dapat ditulis

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(Y_{i.}-\bar{Y}_{..})^2 = n\sum_{i=1}^{k}(Y_{i.}-\bar{Y}_{..})^2$$

Diperoleh persamaan jumlah kuadratnya yaitu

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij}-\bar{Y}_{..})^2 \;=\; n\sum_{i=1}^{k}(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij}-\bar{Y}_{i.})^2$$

Dimana

JKT : Jumlah Kuadrat Total $= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij}-\bar{Y}_{..})^2$

JKA : Jumlah Kuadrat Perlakuan $= n\sum_{i=1}^{k}(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})^2$

JKG : Jumlah Kuadrat Galat $= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij}-\bar{Y}_{i.})^2$

Sehingga identitas jumlah kuadrat dapat ditulis dengan :

$$JKT = JKA + JKG$$

□

1. Pada ukuran sampel yang sama, jumlah populasi adalah nk. Sehingga jumlah kuadrat dengan ukuran sampel yang sama ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} JKA &= n\sum_{i=1}^{k}(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})^2 = n\sum_{i=1}^{k}(\bar{Y}_{i.}^2-2\bar{Y}_{i.}\bar{Y}_{..}+\bar{Y}_{..}^2) \\ &= n\sum_{i=1}^{k}\bar{Y}_{i.}^2-2n\bar{Y}_{..}\sum_{i=1}^{k}\bar{Y}_{i.}+n\sum_{i=1}^{k}\bar{Y}_{..}^2 \\ &= n\sum_{i=1}^{k}\frac{Y_{i.}^2}{n^2}-2n\frac{Y_{..}}{nk}\frac{Y_{..}}{n}+nk\frac{Y_{..}^2}{(nk)^2} \\ &= \sum_{i=1}^{k}\frac{Y_{i.}^2}{n}-\frac{Y_{..}^2}{nk} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} JKT &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij}-\bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij}^2-2Y_{ij}\bar{Y}_{..}+\bar{Y}_{..}^2) \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}^2-2\bar{Y}_{..}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\bar{Y}_{..}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}^2-2\frac{Y_{..}}{nk}Y_{..}+nk\frac{Y_{..}^2}{(nk)^2} \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}^2-\frac{Y_{..}^2}{nk} \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} JKG &= JKT-JKA \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}^2-\frac{Y_{..}}{nk}-\sum_{i=1}^{k}\frac{Y_{i.}^2}{n}+\frac{Y_{..}^2}{nk} \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}^2-\sum_{i=1}^{k}\frac{Y_{i.}^2}{n} \end{aligned} \tag{2.9}$$

2. Sedangkan pada ukuran sampel yang tak sama, jumlah populasi adalah $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$, dimana $i = 1, 2 \ldots, k$. Sehingga jumlah kuadratnya adalah

$$\begin{aligned} JKT &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N} \\ JKA &= \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_{i.}^2}{n_i} - \frac{Y_{..}^2}{N} \\ JKG &= JKT - JKA \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_{i.}^2}{n_i} \end{aligned}$$

Teorema 2.1.2. Nilai Harapan Jumlah Kuadrat Perlakuan

$$E(JKA) = (k-1)\sigma^2 + n\sum_{i=1}^{k} \tau_i^2 \tag{2.10}$$

Bukti. Berdasarkan persamaan (2.7), persamaan jumlah kuadrat perlakuan dapat ditulis dengan,

$$JKA = n\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(Y_{i.}^2)}{n} - \frac{Y_{..}^2}{nk}$$

Nilai harapan jumlah kuadrat perlakuannya yaitu :

$$E(JKA) = E\left(\sum_{i=1}^{k} Y_{i.}^2 - \frac{Y_{..}^2}{nk}\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{E(Y_{i.}^2)}{n} - E\left(\frac{Y_{..}^2}{kn}\right)$$

Karena model yang digunakan diasumsikan model tetap maka $\sum_{i=1}^{k} \tau_i = 0$, sehingga akan diperoleh nilai dari

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{k} \frac{E(Y_{i.}^2)}{n} &= kn\mu^2 + 2n\mu \textstyle\sum_{i=1}^{k} \tau_i + n \textstyle\sum_{i=1}^{k} \tau_i^2 + k\sigma^2 && \text{(lampiran A2)} \\
&= kn\mu^2 + n \textstyle\sum_{i=1}^{k} \tau_i^2 + k\sigma^2 \\
E\left(\frac{Y_{..}^2}{kn}\right) &= kn\mu^2 + \sigma^2 && \text{(lampiran A3)}
\end{aligned}$$

Setelah kedua nilai diatas diperoleh, maka didapatkan nilai harapan jumlah kuadrat perlakuan (JKA) yaitu :

$$\begin{aligned}
E(JKA) &= E\left(\sum_{i=1}^{k} Y_{i.}^2 - \frac{Y_{..}^2}{nk}\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{E(Y_{i.}^2)}{n} - E\left(\frac{Y_{..}^2}{kn}\right) \\
&= kn\mu^2 + n\sum_{i=1}^{k} \tau_i^2 + k\sigma^2 - (kn\mu^2 + \sigma^2) \\
&= n\sum_{i=1}^{k} \tau_i^2 - k\sigma^2 - \sigma^2 \\
&= (k-1)\sigma^2 + n\sum_{i=1}^{k} \tau_i^2
\end{aligned}$$

$\square$

Selanjutnya berdasarkan persamaan (2.9), persamaan jumlah kuadrat galat (JKG) dapat ditulis dengan,

$$JKG = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_{i.}^2}{n}$$

Nilai harapan untuk jumlah kuadrat galat (JKG) didapat melalui

$$\begin{aligned}
E(JKG) &= E\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_{i.}^2}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} E\left(Y_{ij}^2\right) - \sum_{i=1}^{k} \frac{E\left(Y_{i.}^2\right)}{n}
\end{aligned}$$

Dimana nilai dari $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} E\left(Y_{ij}^2\right)$ (lampiran A4), yaitu :

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} E\left(Y_{ij}^2\right) = kn\mu^2 + 2n\mu\sum_{i=1}^{k}\tau_i + n\sum_{i=1}^{k}\tau_i^2 + kn\sigma^2$$

Sehingga diperoleh nilai harapan untuk jumlah kuadrat galat (JKG) yaitu :

$$\begin{aligned}
E(JKG) &= E\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k}\frac{Y_{i.}^2}{n}\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} E\left(Y_{ij}^2\right) - \sum_{i=1}^{k}\frac{E\left(Y_{i.}^2\right)}{n} \\
&= kn\mu^2 + 2n\mu\sum_{i=1}^{k}\tau_i + n\sum_{i=1}^{k}\tau_i^2 + kn\sigma^2 \\
&- \left(kn\mu^2 + 2n\mu\sum_{i=1}^{k}\tau_i + n\sum_{i=1}^{k}\tau_i^2 + k\sigma^2\right) \\
&= kn\sigma^2 - k\sigma^2 \\
&= k(n-1)\sigma^2
\end{aligned}$$

Nilai harapan untuk Kuadrat Tengah Perlakuan (KTA) atau s_1^2 adalah

$$\begin{aligned}
E(KTA) &= E\left(\frac{JKA}{k-1}\right) = \frac{1}{k-1}\left((k-1)\sigma^2 + n\sum_{i=1}^{k}\tau_i^2\right) \\
E\left(s_1^2\right) &= \sigma^2 + \frac{n}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\tau_i^2
\end{aligned}$$

Karena model yang digunakan adalah model tetap maka diasumsikan $\tau_i = 0$ sehingga $E(KTA) = E\left(s_1^2\right) = \sigma^2$. Oleh karena itu, s_1^2 merupakan penduga tak bias dari σ^2.

Nilai harapan untuk Kuadrat Tengah Galat (KTG) atau s^2 adalah

$$\begin{aligned} E(KTG) &= E\left(\frac{JKG}{k(n-1)}\right) = \frac{k(n-1)\sigma^2}{k(n-1)} \\ E\left(s^2\right) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Sehingga s^2 merupakan penduga tak bias dari σ^2.

2.1.5 Analisis Variansi Rancangan Acak Lengkap

Metode analisis yang biasa digunakan untuk rancangan percobaan adalah analisis variansi atau *analysis of variance* (ANOVA). Analisis variansi adalah prosedur statistika untuk mengkaji apakah rata-rata hitung dari 3 populasi atau lebih, sama atau tidak. Analisis variansi dibagi kedalam dua jenis yaitu :

1. Analisis Variansi Klasifikasi Satu Arah : klasifikasi pangamatan yang hanya didasarkan pada satu kriteria yaitu hanya ada satu sumber keragaman dalam variabel respon.

2. Analisis Variansi Klasifikasi Dua Arah : membahas tentang keragaman dalam satu variabel respon Y yang ditimbulkan oleh keragaman dua faktor. Analisis variansi klasifikasi dua arah terbagi menjadi dua yaitu analisis variansi klasifikasi dua arah dengan interaksi dan tanpa interaksi.

Model Rancangan Acak Lengkap pada persamaan (2.1) ataupun (2.2) disebut juga model analisis variansi klasifikasi satu arah karena analisis variansi klasifikasi satu arah umumnya dilakukan pada rancangan perlakuan yang faktor-faktor lingkungannya dapat dikontrol. Sehingga hanya ada satu sumber keragaman yang dianalisis dan berlangsung satu arah yaitu antar perlakuan (*between* *group*) dan faktor lain yang berpotensi mempengaruhi keragaman data dimasukkan ke dalam galat (*within group*).

Berikut ini merupakan tabel analisis variansi klasifikasi satu arah.

Tabel 2.2: Tabel Analisis Variansi Klasifikasi Satu Arah

Sumber Variasi	Derajat Kebebasan	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	F Hitung
Perlakuan	k-1	JKA	$s_1^2 = KTA = \frac{JKA}{k-1}$	$\frac{s_1^2}{s^2} = \frac{KTA}{KTG}$
Galat	k(n-1)	JKG	$s^2 = KTG = \frac{JKG}{k(n-1)}$	
Total	kn-1	JKT		

Sehingga untuk menguji hipotesis bahwa perlakuan mempunyai pengaruh nyata, uji statistik yang digunakan adalah:

$$F_{hit} = \frac{KTA}{KTG} = \frac{JKA/k-1}{JKG/k(n-1)} \tag{2.11}$$

Dengan rumusan hipotesisnya yaitu:

H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_k$

H_1 : Minimal ada satu μ_i yang berbeda, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$

Kesimpulan terahkir diambil jika :

$F_{hit} > F_{\alpha,k-1,k(n-1)}$ maka Tolak H_0

$F_{hit} \leq F_{\alpha,k-1,k(n-1)}$ maka Terima H_0

2.2 Uji Normalitas

Salah satu asumsi penting dari metode analisis variansi untuk rancangan acak lengkap adalah galat berdistribusi normal, asumsi ini disebut juga sebagai asumsi normalitas. Asumsi normalitas yang tidak terpenuhi mengakibatkan uji statistik menjadi tidak valid untuk jumlah sampel kecil (Hanipah, 2014). Asumsi normalitas disimbolkan dengan:

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2). \tag{2.12}$$

dengan $i = 1, \ldots, k$ dan $j = 1, 2, \ldots, n_i$

Rumusan hipotesis untuk menguji kenormalan galat adalah sebagai berikut:

H_0 : Variabel galat berdistribusi normal

H_1 : Variabel galat tidak berdistribusi normal

Beberapa uji yang dapat digunakan untuk menguji apakah variabel galat berdistribusi normal atau tidak yaitu Uji Chi-Square, Uji Kolmogorov Smirnov, Uji Lilliefors dan Uji Shapiro Wilk. Dalam penulisan tugas akhir ini hanya menggunakan Uji Kolmogorov Smirnov.

2.2.1 Uji Kolmogorov Smirnov

Uji Kolmogorov-Smirnov adalah salah satu statistik uji untuk menguji apakah variabel galat berdistribusi normal atau tidak. Statistik uji Kolmogorov-Smirnov yaitu :

$$\begin{aligned} D &= maksimum\,|S(z_i) - P(z_i)| \\ z_i &= \frac{\varepsilon_i - \varepsilon}{s} \end{aligned} \tag{2.13}$$

$S(z_i)$: Peluang proporsional dari z_i

$P(z_i)$: Peluang dari z_i

z_i : Transformasi nilai galat ε_i

ε dan s : Rata-rata dan Simpangan baku dari nilai galat

Dengan rumusan hipotesis pada uji Kolmogorov Smirnov yaitu:

H_0 : Variabel galat berdistribusi normal

H_1 : Variabel galat tidak berdistribusi normal

Kesimpulan terahkir diambil jika :

$D > D_{0,05}$ maka Tolak H_0

$D \leq D_{0,05}$ maka Terima H_0

2.3 Uji Homogenitas Variansi

Salah satu asumsi penting dari metode analisis variansi untuk rancangan acak lengkap adalah variansi galat bernilai sama (konstan) untuk setiap taraf perlakuan, asumsi ini disebut juga sebagai asumsi homogenitas variansi yang disimbolkan dengan:

$$var(\varepsilon_{ij}) = E(\varepsilon_{ij}^2) = \sigma^2 \tag{2.14}$$

dengan $i = 1, \ldots, k$ dan $j = 1, 2, \ldots, n_i$

Asumsi homogenitas variansi yang tidak terpenuhi akan mempengaruhi keabsahan dari uji F pada metode analisis variansi untuk rancangan acak lengkap. Selain itu, jika variansi yang lebih besar dengan ukuran sampel lebih kecil akan meningkatkan kesalahan tipe I yaitu tampak seperti ada pengaruh dari perlakuan tetapi sebenarnya tidak ada (Montgomery, 2001).

Rumusan hipotesis untuk menguji kehomogenitasan variansi adalah sebagai berikut:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \cdots = \sigma_k^2$

Artinya variansi data homogen atau tidak ada perbedaan variansi antara pengamatan yang satu dengan pengamatan lainnya.

H_1 : Minimal ada satu σ_i^2 yang berbeda.

Artinya variansi data tidak homogen atau minimal ada satu perbedaan variansi antara pengamatan yang satu dengan pengamatan lainnya.

Beberapa uji yang dapat digunakan untuk menguji apakah variansi dari tiap populasi sama atau tidak yaitu Uji Hartley, Uji Bartlett, Uji Havley dan Uji Levene. Dalam penulisan tugas akhir ini hanya menggunakan Uji Bartlett.

2.3.1 Uji Bartlett

Uji Bartlett digunakan untuk menguji apakah k sampel yang lebih dari 2 berasal dari populasi dengan variansi yang sama (konstan). Uji Bartlett pertama kali diperkenalkan oleh M. S. Bartlett (1937). Uji Bartlett dapat digunakan apabila data yang digunakan sudah di uji normalitas dan datanya merupakan data normal. Jika asumsi kenormalan galat tidak terpenuhi maka uji permutasi dan bootstrap dapat digunakan sebagai metode alternatif untuk uji homogenitas variansi.

Tabel 2.3: Data Sampel Dari k Buah Populasi

	Dari Populasi Ke-				
	1	2	3	....	k
Data Hasil Pengamatan	Y_{11}	Y_{21}	Y_{31}	....	Y_{k1}
	Y_{12}	Y_{22}	Y_{32}	....	Y_{k2}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	Y_{1n_1}	Y_{2n_2}	Y_{3n_3}	....	Y_{kn_k}

Tabel 2.4: Harga-Harga Yang Perlu Untuk Uji Bartlett

Sampel ke-	dk	1/dk	s_i^2	$\log s_i^2$	(dk)log s_i^2
1	$n_1 - 1$	$1/n_1 - 1$	s_1^2	$\log s_1^2$	$(n_1 - 1)\log s_1^2$
2	$n_2 - 1$	$1/n_2 - 1$	s_2^2	$\log s_2^2$	$(n_2 - 1)\log s_2^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$n_k - 1$	$1/n_k - 1$	s_k^2	$\log s_k^2$	$(n_k - 1)\log s_k^2$
Jumlah	$\Sigma\,(n_i - 1)$	$\Sigma\,(1/n_i - 1)$	-	-	$\Sigma\,(n_i - 1)\log s_i^2$

Statistik yang digunakan pada uji Bartlett yaitu:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{C}\left[(N-k)\log\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)s_i^2}{N-k}\right) - \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\log s_i^2\right] \qquad (2.15) \\ C &= 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(n_i-1)} - \frac{1}{N-k}\right] \end{aligned}$$

Dimana:

T : Statistik Uji Bartlett mendekati distribusi Chi-Kuadrat dengan db = k-1

C : Faktor Koreksi

n_i : Sampel pada Perlakuan ke-i

k : Jumlah perlakuan

s_i^2 : Variansi dari perlakuan ke-i

N : $\sum_{i=1}^{k} n_i$

Dengan rumusan hipotesis pada uji Bartlett yaitu:

H_0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \cdots = \sigma_k^2$

H_1 : Minimal ada σ_i^2 yang berbeda

Karena statistik uji T mendekati distribusi $\chi^2_{(1-\alpha)(k-1)}$ maka :

Tolak H_0 jika $T > \chi^2_{(1-\alpha)(k-1)}$

Terima H_0 jika $T \leq \chi^2_{(1-\alpha)(k-1)}$

2.4 Metode Permutasi

Definisi 2.4.1. Pengaturan atau penyusunan sebanyak r objek yang diambil dari suatu himpunan yang terdiri dari n objek yang berbeda secara matematis dinamakan permutasi secara sekaligus sebanyak r dari n objek yang berbeda dimana $r \leq n$. Secara simbolis, permutasi sedemikian itu dinyatakan sebagai

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 2.1} $$

Jika terdapat suatu himpunan yang terdiri dari n objek dimana n_1 merupakan kumpulan objek yang sama (tidak dapat dibedakan), n_2 merupakan kumpulan objek lain yang sama dan seterusnya hingga n kumpulan objek yang sama sedangkan $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ maka jumlah permutasi dari n objek yang meliputi seluruh objek diatas menjadi

$$ \binom{n}{n_1, n_2, \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \ldots\, n_k!} \tag{2.16} $$

Dimana $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Dengan sendirinya, jika $k = n$ dan $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$ maka

$$ \binom{n}{n_1, n_2, \ldots n} = n! = {}_nP_n $$

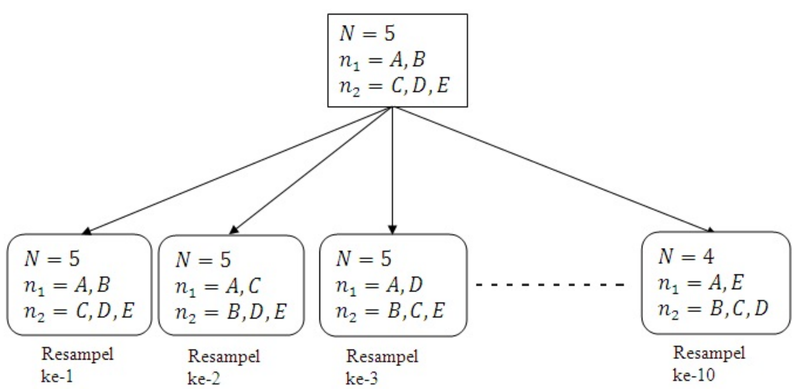
Metode permutasi merupakan metode dengan menyusun kembali data dalam seluruh kombinasi yang mungkin dengan teknik resampling permutasi.

Dasar pendekatan metode permutasi adalah resampling data yang diambil tanpa pengembalian pada datanya. Metode permutasi dapat digunakan pada data yang tidak memenuhi asumsi kenormalan karena metode ini tidak memerlukan asumsi parametrik (Marzuki, 2011).

Contoh 2.4.1. Resampling Permutasi

Misalkan jumlah populasi pada rancangan acak lengkap yaitu N = 5 yang terdiri dari 2 grup yaitu n_1 dan n_2. Anggota dari $n_1 = A, B$ dan anggota dari $n_2 = B, C, D$. Selanjutnya akan diambil sampel-sampel baru dari data awal, sehingga banyaknya resampling permutasi yang mungkin yaitu :

$$M = \frac{N}{n_1!\, n_2!} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$



Gambar 2.1: Contoh Resampel Permutasi

2.5 Metode Bootstrap

Metode bootstrap adalah metode yang didasarkan pada simulasi data untuk keperluan inferensi statistik. Pada tahun 1979 Bradley Efron memperkenalkan metode bootstrap untuk menduga parameter dari sebaran yang tidak diketahui bentuknya. Istilah bootstrap berasal dari "*pull one-self up by one's bootstrap*", yang berarti berpijak diatas kaki sendiri, berusaha dengan sumber daya minimal. Dalam sudut pandang statistika, sumber daya minimal adalah data yang sedikit, data yang menyimpang dari asumsi tertentu, atau data yang tidak mempunyai asumsi apapun tentang distribusi populasinya.

2.5.1 Sampel Bootstrap

Definisi 2.5.1. Sebuah sampel yang acak dan saling bebas ialah sebuah sampel yang dipilih dengan suatu prosedur acak dimana pemilihannya dilakukan dengan sistem pemulihan (*with replacement*).

Sampel acak merupakan hasil pengambilan sampel sedemikian hingga setiap elemen populasi mempunyai kemungkinan yang sama untuk terpilih sebagai anggota sampel. Sampel acak berukuran k didefinisikan sebagai koleksi unit sebanyak $k\,(Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{ij})$ dengan $i = 1, 2, \ldots, k$ dan $j = 1, 2, \ldots, n_i$ yang dipilih secara acak dari semesta. Adapun frekuensi kemunculannya berbeda-beda, ada yang tidak pernah muncul, muncul satu kali, muncul dua kali dan seterusnya.

Sampel adalah suatu himpunan bagian dari populasi. Istilah sampel asli digunakan untuk menyebut himpunan bagian yang pertama diambil dari populasi, sebelum dilakukan *resampling. Resampling* yaitu proses pengambilan sampel kembali dari sampel yang telah diambil dari populasi, sedangkan istilah sampel bootstrap (*resample*) digunakan untuk menyebut sampel yang telah di *resampling* dari sampel asli. Sampel asli dilambangkan dengan,

$$Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, \ldots, Y_{ij} \tag{2.17}$$

dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ dan $j = 1, 2, 3, \ldots, n_i$. Sampel bootstrap dimana B adalah jumlah resampling bootstrap dilambangkan dengan

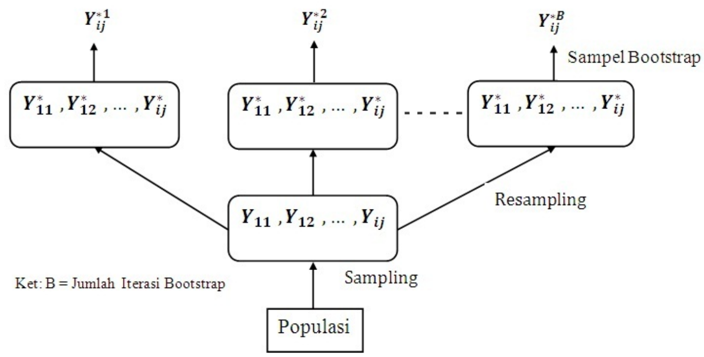
$$Y_{ij}^{*1}, Y_{ij}^{*2}, Y_{ij}^{*3}, \ldots, Y_{ij}^{*B} \tag{2.18}$$

Sampel bootstrap diperoleh dengan cara sampling secara acak dengan pengembalian dari sampel asli. Sampling secara acak dengan pengembalian berarti setelah secara acak mengambil sebuah observasi dari sampel asli lalu diletakkan kembali sebelum mengambil observasi berikutnya. Sampel dengan pengembalian memungkinkan satu data diambil beberapa kali. Peluang sampel dengan pengembalian dapat dinotasikan

$$P(Y_{ij}) = \frac{1}{N} \tag{2.19}$$

Masing-masing sampel bootstrap yang diambil setiap kali pengambilan adalah sama banyaknya dengan sampel asli. Proses sampling bootstrap dilakukan dengan menggunakan bantuan program komputer karena besarnya jumlah *resampling* yang bisa mencapai ribuan kali sehingga sangatlah sulit untuk melakukan perhitungan secara manual.

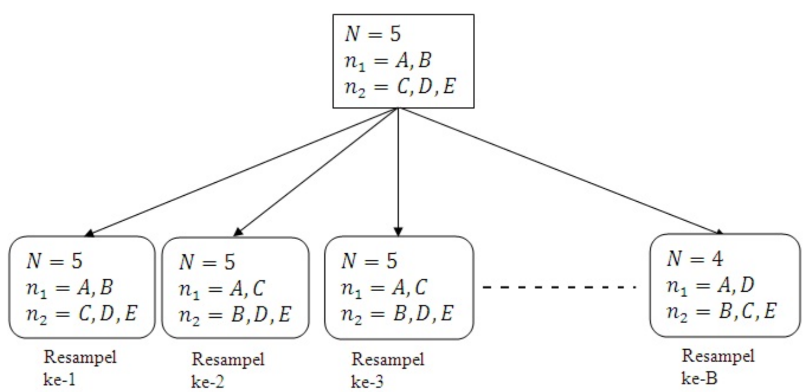
Berikut ini adalah skema resampel bootstrap.



Gambar 2.2: Skema Resampel

Contoh 2.5.1. Resampling Bootstrap

Misalkan dengan kasus yang sama pada resampling permutasi dimana banyaknya resampel bootstrap yang mungkin yaitu $B = N^N = 5^5 = 3125$.



Gambar 2.3: Contoh Pengambilan Sampel Bootstrap

2.5.2 Fungsi Distribusi Empiris

Definisi 2.5.2. Fungsi distribusi kumulatif (*cumulative distribution function*) atau diringkas fungsi distribusi dari variabel acak X didefinisikan untuk setiap bilangan real x sebagai

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Maka fungsi distribusi dari variabel acak Y untuk setiap bilangan real y dapat ditulis sebagai $F(y) = P(Y \leq y)$.

Definisi 2.5.3. Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan suatu sampel dari suatu populasi dengan fungsi distribusi kumulatif kontinu, F. Suatu fungsi distribusi empiris yang didasarkan pada suatu sampel acak didefinisikan sebagai

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq x) \tag{2.20}$$

Dimana $I(X_i \leq x)$ adalah fungsi indikator dari kejadian $X_i \leq x$. $I(X_i \leq x)$ bernilai 1 jika hubungannya dengan $X_i \leq x$ adalah benar, dan bernilai 0 jika hubungannya dengan $X_i \leq x$ salah. Berdasarkan pada observasi (amatan) yang terurut $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ fungsi distribusi empiris dinyatakan sebagai

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{jika } \; x < X_{1:n}; \\ \frac{k}{n}, & \text{jika } \; X_{k:n} \leq x < X_{k+1:n}; \\ 1, & \text{jika } \; x \geq X_{n:n} \end{cases}$$

Menurut definisi diatas, untuk $F_n(x)$ bernilai $\frac{k}{n}$, untuk $k = 1, 2, \ldots, n-1$; k amatan dari $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ harus lebih kecil atau sama dengan x, dan $k+1$ amatan lebih besar dari x.

Contoh 2.5.2. Fungsi Distribusi Empiris

Misalkan terdapat observasi (amatan) yang terurut dengan $n = 5$ yaitu $X_{1:5} \leq X_{2:5} \leq X_{3:5} \leq X_{4:5} \leq X_{5:5}$.

Dimana $(X_{1:5}, X_{2:5}, X_{3:5}, X_{4:5}, X_{5:5}) = (10, 20, 30, 40, 50)$. Fungsi distribusi empirisnya dapat dinyatakan dengan,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{jika } \; x < X_{1:5}; \\ \frac{k}{5}, & \text{jika } \; X_{k:5} \le x < X_{k+1:5}; \\ 1, & \text{jika } \; x \ge X_{5:5} \end{cases}$$

$F_n(x)$ bernilai $\frac{k}{5}$ untuk $k = 1, 2, \ldots, n-1$ yaitu $k = 1, 2, 3, 4$, sehingga

$$\begin{aligned} k = 1,\; F_n(x) &= \frac{1}{5}, \quad jika \quad 10 \le x < 20 \\ k = 2,\; F_n(x) &= \frac{2}{5}, \quad jika \quad 20 \le x < 30 \\ k = 3,\; F_n(x) &= \frac{3}{5}, \quad jika \quad 30 \le x < 40 \\ k = 4,\; F_n(x) &= \frac{4}{5}, \quad jika \quad 40 \le x < 50 \end{aligned}$$

Sehingga fungsi distribusi empiris dari observasi (amatan) terurut adalah sebagai berikut :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{jika } \; x < 10; \\ \frac{1}{5}, & \text{jika } \; 10 \le x < 20; \\ \frac{2}{5}, & \text{jika } \; 20 \le x < 30; \\ \frac{3}{5}, & \text{jika } \; 30 \le x < 40; \\ \frac{4}{5}, & \text{jika } \; 40 \le x < 50; \\ 1, & \text{jika } \; x \ge 50 \end{cases}$$

Selanjutnya jika terdapat sampel berupa rancangan acak lengkap yaitu $Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{ij}\,(i = 1, 2, \ldots, k$ dan $j = 1, 2, \ldots, n_i)$ maka fungsi distribusi empirisnya dapat ditulis dengan

$$F_N(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} I(Y_{ij} \leq y) \tag{2.21}$$

Teorema 2.5.1. (Glivenko-Cantelli) Jika $F_n(x)$ adalah fungsi distribusi empiris berdasarkan sampel $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yang merupakan variabel acak i.i.d dari $F(x)$, dengan $F(x)$ kontinu maka

$$\sup_x |F_n(x) - F(x)| \to 0, n \to \infty$$

Bukti. Apabila diberikan $\varepsilon > 0$ dengan barisan x, karena $F(x)$ kontinu yaitu

$$-\infty = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = \infty$$

Sedemikian sehingga untuk $0 \leq i \leq k$ berlaku $|F(x_i) - F(x)| \leq \varepsilon$, dalam hal ini dituliskan $F(x_i) \to F(x)$ (konvergen titik), sehingga

$$F_n(x) - F(x) \leq [F_n(x_i) - F(x_i)] + [F(x_i) - F(x)]$$

Ambil $x \in \mathbb{R}, \exists\, i \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$ sedemikian sehingga $x_{i-1} \leq x < x_i$ atau dapat ditulis dengan $x \in [x_{i-1}, x_i)$. Karena $x \in [x_{i-1}, x_i)$, dan $[F(x_i) - F(x)] \leq \varepsilon$, maka

$$F_n(x) - F(x) \leq [F_n(x_i) - F(x_i)] + \varepsilon \tag{2.22}$$

dari arah lain untuk $0 \leq i \leq k$ berlaku $|F(x_{i-1}) - F(x)| \leq \varepsilon$, dalam hal ini dituliskan $F(x_{i-1}) \to F(x)$ (konvergen titik),

$$F_n(x) - F(x) = [F_n(x_{i-1}) - F(x_{i-1})] + [F(x_{i-1}) - F(x)]$$

karena $x \in [x_{i-1}, x_i)$, dan $[F(x_{i-1}) - F(x)] \geq -\varepsilon$,

$$F_n(x) - F(x) \geq [F_n(x_{i-1}) - F(x_{i-1})] - \varepsilon \tag{2.23}$$

Dengan menggabungkan hasil dari persamaan (2.22) dan (2.23) didapatkan nilai mutlak dari $F_n(x) - F(x)$ dan memperoleh

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \leq \max_{x\in x_i, i=0,\ldots,k} |F_n(x) - F(x)| + \varepsilon$$

Jadi

$$P(\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \geq 2\varepsilon) \leq P(\max_{x\in x_i, i=0,\ldots,k} |F_n(x) - F(x)| > \varepsilon) \to 0.$$

$\square$

Teorema (2.5.1) menunjukkan bahwa selisih terbesar antara $F_n(x)$ dengan $F(x)$ untuk semua nilai x akan menuju ke nol jika n membesar. Hal itu juga berlaku untuk suatu fungsi distribusi empiris $F_N(y)$ dengan fungsi distribusi $F_i(y)$. Sehingga semakin banyak data yang digunakan, maka semakin baik fungsi distribusi empiris mendekati fungsi distribusi populasi. Teorema (2.5.1) merupakan alasan mengapa fungsi distribusi empiris digunakan sebagai taksiran fungsi distribusi populasi pada teknik resampling metode bootstrap.

2.5.3 Metode Monte Carlo

Metode Monte Carlo adalah metode dengan algoritma komputasi menggunakan angka acak, probabilitas dan statistik. Dasar dari metode ini adalah percobaan elemen kemungkinan dengan menggunakan sampel acak. Simulasi Monte Carlo dikategorikan sebagai metode sampling karena input yang dihasilkan secara acak dari probabilitas statistik untuk mensimulasikan proses sampling dari populasi yang sebenarnya. Langkah-langkah umum Simulasi Monte Carlo yaitu:

1. Membuat distribusi peluang untuk setiap variabel.
2. Membangun distribusi peluang kumulatif untuk setiap variabel.
3. Menentukan interval angka acak untuk tiap variabel.
4. Membuat atau membangitkan bilangan acak.
5. Membuat simulasi dari rangkaian percobaan.

Contoh 2.5.3. Simulasi Monte Carlo. Misalkan terdapat data permintaan ban di suatu toko ban selama 200 hari kebelakang, selanjutnya langkah 1-3 di atas dapat dilihat pada tabel berikut ini :

Tabel 2.5: Contoh Simulasi Monte Carlo (Langkah 1-3)

Variabel Permintaan	Frekuensi	Peluang Terjadi	Peluang Kumulatif	Interval Angka Acak
0	10	10/200 = 0,05	0,05	1 - 5
1	20	20/200 = 0,10	0,15	6 - 15
2	40	40/200 = 0,20	0,35	16 - 35
3	60	60/200 = 0,30	0,65	36 - 65
4	40	40/200 = 0,20	0,85	65 - 85
5	30	30/200 = 0,15	1,00	85 - 100
Jumlah	200			

Metode bootstrap mengaplikasikan Monte Carlo Sampling untuk menggeneralisasi secara empiris distribusi sampling statistik. Konsep yang digunakan pada bootstrap dari Monte Carlo adalah membangun sebuah estimasi dari distribusi sampling dengan mengambil sampel berukuran N secara acak dalam jumlah besar dari sebuah populasi dan menghitung statistik pada setiap sampelnya. Sampel acak tersebut merupakan sebuah simulasi empiris dari komponen acak dari statistik yang diestimasi. Misalkan suatu sampel bootstrap $Y_{11}^*, Y_{12}^*, \ldots, Y_{ij}^*$ dengan $i = 1, 2, \ldots, k$ dan $j = 1, 2, \ldots, n_i$. Probabilitas munculnya satu sampel bootstrap adalah:

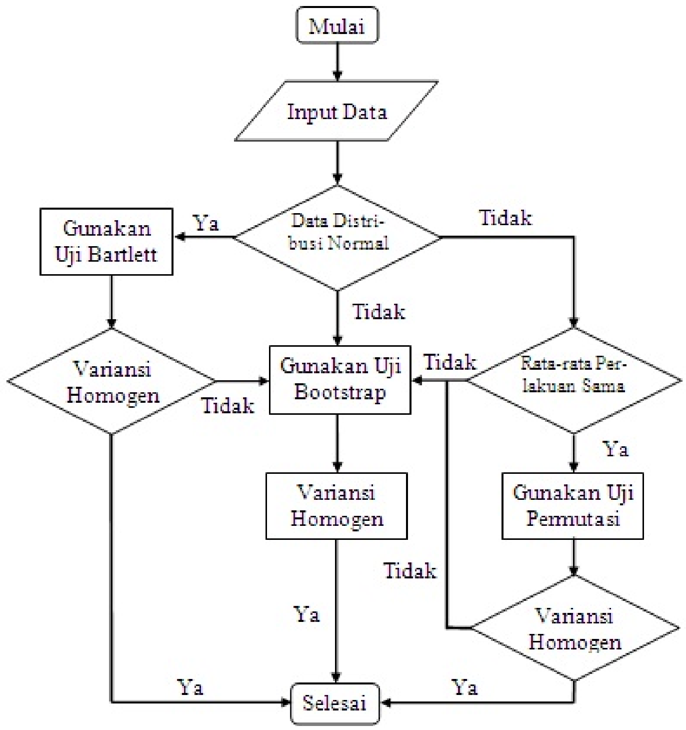
$$P(Y_{11}^*, Y_{12}^*, \ldots, Y_{ij}^*) = P(Y_{11}^*).P(Y_{12}^*) \ldots P(Y_{ij}^*)$$

Karena $\forall\, Y_{ij}^*,\ i = 1, 2, \ldots, k$ dan $j = 1, 2, \ldots, n_i$, probabilitas terpilihnya adalah $1/N$ dimana $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ maka

$$P(Y_{11}^*, Y_{12}^*, \ldots, Y_{ij}^*) = \frac{1}{N}.\frac{1}{N} \cdots \frac{1}{N} = \frac{1}{N^N} \tag{2.24}$$

Karena nilai dari faktor N^N pada persamaan diatas akan naik dengan cepat seiring bertambahnya N, sebagai contoh untuk $N = 10$, maka probabilitas terpilihnya suatu sampel bootstrap dari sampel awal adalah 10^{-10} sehingga faktor tersebut digantikan oleh suatu nilai tetap, B, dimana B cukup besar. Proses penggantian N^N dengan B adalah proses yang dinamakan dengan simulasi Monte Carlo.

Berikut ini adalah diagram alir untuk uji homogenitas variansi.



Gambar 2.4: Diagram Alir untuk Uji Homogenitas Variansi

Diagram alir untuk uji homogenitas variansi diatas dapat dijelaskan melalui langkah-langkah seperti berikut ini:

1. Masukkan data berupa rancangan acak lengkap, kemudian data tersebut diuji normalitas. Jika data berdistribusi normal maka uji Bartlett dapat digunakan untuk menguji homogenitas variansi. Namun, jika data tidak berdistribusi normal dapat digunakan uji permutasi dan bootstrap.

2. Sebelum menggunakan uji permutasi, data tersebut terlebih dahulu diuji rata-rata perlakuannya. Jika rata-rata perlakuannya sama maka dilanjutkan uji homogenitas variansi. Namun, jika rata-rata perlakuannya tidak sama dapat digunakan uji bootstrap untuk menguji homogenitas variansi.

3. Jika hasil uji homogenitas variansi menggunakan uji Bartlett atau uji permutasi adalah variansi data tidak homogen maka gunakan uji bootstrap. Namun, jika variansi data homogen maka selesai.

4. Jika data tidak berdistribusi normal, rata-rata perlakuannya tidak sama ataupun variansi data tidak homogen maka gunakan uji bootstrap untuk menguji homogenitas variansi.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Uji Homogenitas Variansi Jika Data Tidak Normal

Dasar pendekatan yang digunakan untuk menguji homogenitas variansi dengan asumsi normalitas yang tidak terpenuhi yaitu menggunakan metode resampling untuk memperoleh *p-value* dengan suatu uji statistik yang digunakan. Metode resampling yang digunakan adalah resampling permutasi dan bootstrap dengan statistik uji Bartlett. Pada bagian ini akan dibahas mengenai uji permutasi dan uji bootstrap.

3.1.1 Uji Permutasi

Uji permutasi merupakan salah satu teknik resampling data dimana resampling diambil tanpa pengembalian pada datanya. Uji permutasi dapat digunakan dalam masalah k sampel dengan statistik uji Bartlett dimana uji hipotesis nulnya adalah semua populasi berdistribusi identik. Resampling permutasi akan menghasilkan sampel-sampel baru yang berbeda karena teknik resampling yang dilakukan tanpa pengembalian. Teknik resampling permutasi ini akan digunakan untuk memperoeh *p-value* pada pengujian homogenitas variansi.

Pada uji permutasi untuk menguji homogenitas variansi, hipotesis nul yang digunakan adalah semua populasi berdistribusi identik, yaitu :

$$
\begin{aligned}
H_0 &: F_1(y) = F_2(y) = F_3(y) = \cdots = F_k(y) \\
H_1 &: \text{Minimal ada satu } F_i(y) \text{ yang berbeda.}
\end{aligned}
$$

dengan k adalah jumlah perlakuan/kelompok.

Hipotesi nul diatas berlaku untuk masalah pengujian rataan dengan asumsi variansinya sama yaitu :

$$F_i(y) = F_0\left(\frac{y-\mu_i}{\sigma}\right) \tag{3.1}$$

Berlaku juga untuk masalah pengujian variansi dengan asumsi rataannya sama yaitu :

$$F_i(y) = F_0\left(\frac{y-\mu}{\sigma_i}\right) \tag{3.2}$$

Karena uji permutasi ini akan digunakan untuk menguji homogenitas variansi maka fungsi distribusi yang digunakan pada persamaan (3.2) yaitu:

$$F_i(y) = F_0\left(\frac{y-\mu}{\sigma_i}\right)$$

dimana $i = 1, 2, \ldots, k$.

Selanjutnya misalkan terdapat data rancangan acak lengkap yaitu pengamatan ke-j dalam perlakuan ke-i berupa $Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{ij} (i = 1, 2, \ldots, k$ dan $j = 1, 2, \ldots, n_i)$, berikut ini langkah-langkah uji permutasi secara lebih rinci:

1. Menghitung statistik uji Bartlett (uji T) seperti pada persamaan (2.15) untuk data $(Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{ij})$. Statistik uji Bartlett (uji T) untuk data awal dapat ditulis dengan T_0.

2. Memilih resampel permutasi sehingga nantinya diperoleh sampel baru yang berlainan. Pengambilan sampel permutasi berdasarkan

$$S = \{Y_{ij}, i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, n_i\} \tag{3.3}$$

3. Dengan cara resampel permutasi akan diperoleh sampel-sampel baru sebanyak M dari k sampel dengan ukuran $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, dirumuskan dengan

$$M = \frac{N!}{n_1!\, n_2!\, \ldots\, n_k!} \tag{3.4}$$

4. Setelah diperoleh sampel baru sebanyak M dimana $1.000 \leq M \leq 10.000$ sudah cukup baik, maka hitung kembali statistik uji Bartlett (uji T) untuk setiap sampel permutasi, dapat ditulis dengan

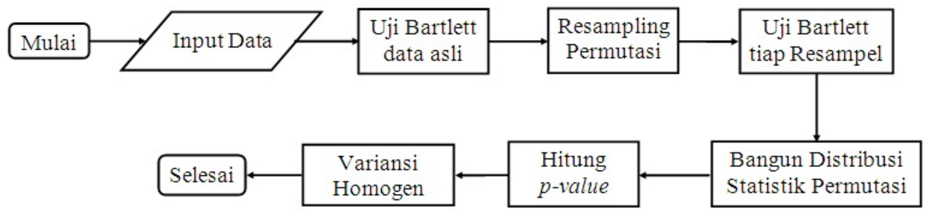
$$T_1, T_2, T_3, \ldots, T_M \tag{3.5}$$

5. Bangun distribusi statistik permutasi berdasarkan persamaan (3.5).

6. Langkah terakhirnya adalah menguji homogenitas variansi dengan menghitung *p-value* uji permutasi yang dirumuskan dengan

$$p_M = \frac{\#(T_1, T_2, T_3, \ldots, T_M \geq T_0)}{M} \tag{3.6}$$

Kesimpulan diperoleh jika $p_M \leq 0,05(\alpha)$ maka tolak H_0 artinya minimal ada satu $F_i(y)$ yang berbeda sehingga variansi data tidak homogen atau minimal ada satu perbedaan variansi antara pengamatan yang satu dengan pengamatan lainnya. Berikut ini diagram alir uji permutasi.



Gambar 3.1: Diagram Alir Uji Permutasi

3.1.2 Uji Bootstrap

Penjelasan tentang uji bootstrap, dimulai dari dua masalah yang sangat mendekati atau menyerupai yaitu masalah real dan buatan. Masalah buatan tersebut dikenal sebagai masalah bootstrap. Dalam masalah real, terdapat data observasi $Y_{i1}, Y_{i2}, \ldots, Y_{in_i}$ dan suatu model yang hanya menyatakan bahwa data ini merupakan data yang saling bebas dari suatu distribusi $F_i(y)$.

Masalah bootstrap meniru masalah real tetapi distribusi $F_i(y)$ diganti dengan fungsi distribusi empiris $F_N(y)$. Selanjutnya Y_{ij} disimulasikan dalam jumlah yang sama observasi saling bebas dari $F_N(y)$ dan dinyatakan sebagai sampel bootstrap,

$$Y^*_{i1}, Y^*_{i2}, Y^*_{i3}, \ldots, Y^*_{in_i} \quad dengan \quad Y^*_{ij} \in F_N(y) \tag{3.7}$$

Resampling bootstrap memungkinkan untuk menghasilkan sampel-sampel bootstrap yang sama karena teknik resampling yang dilakukan dengan pengembalian. Teknik resampling bootstrap ini akan digunakan untuk memperoleh *p-value* pada pengujian homogenitas variansi.

Hipotesis nul yang digunakan pada prosedur uji bootstrap berbeda dengan prosedur uji permutasi. Rumusan hipotesis pada uji bootstrap adalah

$$H_0 \quad : \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \cdots = \sigma_k^2 = \sigma^2$$

$$H_1 \quad : \quad \text{Minimal ada } \sigma_i^2 \text{ yang berbeda}$$

dengan k adalah jumlah perlakuan/kelompok.

Misalkan $(Y_{i1}, Y_{i2}, \ldots, Y_{in_i}, i = 1, 2, \ldots k)$ adalah k sampel saling bebas dimana tiap sampel $Y_{ij}(j = 1, 2, \ldots n_i)$ berdistribusi identik dan saling bebas (iid) dengan fungsi distribusinya yaitu

$$F_i(y) = F_0\left(\frac{y - \mu_i}{\sigma_i}\right) \tag{3.8}$$

Misalkan $F_0(y)$ mempunyai rataan 0 dan variansi 1 maka Y_{ij} memiliki rataan μ_i dan variansi σ_i^2. Uji Bartlett untuk hipotesis nul akan valid jika fungsi distribusi $F_0(y)$ normal. Jika fungsi distribusi $F_0(y)$ tidak normal atau tidak diketahui maka digunakan prosedur uji bootstrap yaitu mengestimasi distribusi nul dari uji Bartlett dengan memperhatikan H_0 yang benar atau H_1 yang benar. Jika H_1 benar maka sampling bootstrap mengestimasi distribusi H_0. Pengambilan sampel bootstrap berdasarkan

$$\bar{S} = \{\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \hat{\mu}_i\} \tag{3.9}$$

Estimasi dari μ_i adalah $\bar{Y}_{i.}$ yaitu rataan sampel ke-i. Sampel-sampel bootstrap yaitu Y_{ij}^* merupakan pengambilan sampel yang berdistribusi identik dan saling bebas dari "pseudopopulasi" yang memiliki fungsi distribusi

$$F_N(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} I\left(Y_{ij} - \hat{\mu}_i \leq y\right) \tag{3.10}$$

dimana I adalah fungsi indikator. Karena

$$F_N(y) \quad \approx \quad F_0\left(\frac{y}{\sigma}\right) \tag{3.11}$$

di bawah $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \cdots = \sigma_k^2 = \sigma^2$, maka distribusi statistik uji Bartlett dari $F_N(y) \approx$ distribusi statistik uji Bartlett dari $F_0\left(\frac{y}{\sigma}\right)$.

Jika semua sampel diambil dari $F_0\left(\frac{y}{\sigma}\right)$ maka distribusi statistik berdasarkan variansi adalah sama. Jika H_1 benar (minimal ada σ_i^2 yang berbeda), maka k sampel bootstrap diambil dari $F_N(y)$ dimana $F_N(y) \approx F_0\left(\frac{y}{\sigma}\right)$ sehingga memiliki variansi sama. Oleh karena itu H_0 terpenuhi di lingkungan bootstrap.

Berikut ini langkah-langkah uji bootstrap secara lebih rinci :

1. Menghitung statistik uji Bartlett (uji T) seperti pada persamaan (2.15) untuk data $(Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, \ldots, Y_{ij})$. Statistik uji Bartlett (uji T) untuk data awal dapat ditulis dengan T_0.

2. Membangun sebuah distribusi peluang empiris dari sampel dengan peluang 1/N pada setiap data observasi, ditulis dengan

$$F_N(y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} I(Y_{ij} - \hat{\mu}_i \leq y) \tag{3.12}$$

3. Dari fungsi distribusi empiris, ambil sebuah sampel acak berukuran N dengan pengembalian. Sampel tersebut disebut dengan sampel bootstrap, ditulis dengan

$$Y_{i1}^*, Y_{i2}^*, Y_{i3}^*, \ldots, Y_{in_i}^* \quad dengan \quad Y_{ij}^* \in F_N(y) \tag{3.13}$$

4. Setelah diperoleh sampel bootstrap, maka hitung kembali statistik uji Bartlett

(uji T) untuk tiap sampel bootstrap, dapat ditulis dengan T^*.

5. Banyaknya sampel bootstrap yang diambil dari $F_N(y)$ dengan pengembalian adalah N^N. Karena N^N menghasilkan bilangan yang terlalu besar maka digunakan simulasi Monte Carlo, mengganti N^N dengan B dimana $1.000 \leq B \leq 10.000$ sudah cukup baik. Sehingga diperoleh sampel bootstrap sebanyak B kali, ditulis dengan

$$Y_{ij}^{*1}, Y_{ij}^{*2}, Y_{ij}^{*3}, \ldots, Y_{ij}^{*B} \tag{3.14}$$

dan statistik uji Bartlett untuk setiap sampel bootstrap ditulis dengan,

$$T_1^*, T_2^*, T_3^*, \ldots, T_B^* \tag{3.15}$$

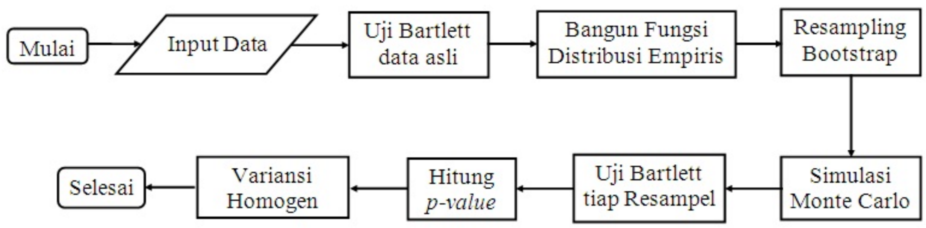
6. Langkah terakhirnya adalah menguji homogenitas variansi dengan menghitung *p-value* uji bootstrap yang dirumuskan dengan,

$$\hat{p}_B = \frac{\#(T_1^*, T_2^*, T_3^*, \ldots, T_B^* \geq T_0)}{B} \tag{3.16}$$

dimana $\hat{p}_B$ merupakan penduga dari p dan p didefinisikan dengan,

$$p = \frac{\#(T_1^*, T_2^*, T_3^*, \ldots, T_K^* \geq T_0)}{N^N} \tag{3.17}$$

Kesimpulan diperoleh jika $\hat{p}_B \leq 0,05(\alpha)$ maka tolak H_0 artinya minimal ada satu σ_i^2 yang berbeda sehingga variansi data tidak homogen atau minimal ada satu perbedaan variansi antara pengamatan yang satu dengan pengamatan lainnya. Berikut ini diagram alir uji bootstrap.



Gambar 3.2: Diagram Alir Uji Bootstrap

3.2 Studi Kasus Konsumsi Makanan yang Mengandung *Calcium Edetate*

Calcium Edetate merupakan salah satu zat tambahan makanan yang dapat menghambat proses oksidasi dan mencegah perubahan warna makanan. Pengaruh *Calcium Edetate* yang berlebihan akan menyebabkan tubuh kekurangan Kalsium (Ca) dan mineral lainnya. Data berikut ini berasal dari penelitian (Brownie, et al. 1986) tentang sifat *Calcium Edetate* yang digunakan untuk menggambarkan uji homogenitas variansi untuk $k = 5$ kelompok hewan. Konsumsi makanan yang mengandung *Calcium Edetate* dengan dosis tertentu diamati pada sejumlah kecil hewan yang dipilih secara acak.
Berikut ini adalah tabel data konsumsi makanan yang mengandung *Calcium Edetate*.

Tabel 3.1: Data Konsumsi Makanan yang Mengandung *Calcium Edetate*

Kelompok	n_i	Konsumsi makanan sehari-hari (gram)							
1	6	17.98	18.25	21.08	18.50	18.26	19.95		
2	7	16.42	16.45	16.58	18.08	19.14	17.40	18.53	
3	7	14.27	17.15	13.67	17.72	11.57	18.33	14.42	
4	8	11.48	9.45	8.17	12.68	10.25	5.08	17.50	16.33
5	12	7.78	5.88	6.55	4.88	4.95	8.77	5.17	4.10
		9.25	1.92	3.03	15.65				

3.2.1 Uji Normalitas dan Homogenitas Variansi Data Awal

Dari data pada Tabel 3.1 yaitu data tentang konsumsi makanan yang mengandung *Calcium Edetate* diberikan pada 5 kelompok hewan dimana banyaknya hewan tiap kelompok berbeda. Konsumsi makanan sehari-hari diberikan kepada 6 hewan pada kelompok pertama, 7 hewan kepada kelompok kedua dan ketiga, 8 hewan kepada kelompok keempat, dan 12 hewan kepada kelompok kelima. Selanjutnya data tersebut akan di uji normalitas dan uji homogenitas variansi. Rumusan hipotesis untuk uji normalitas adalah sebagai berikut.

H_0 : Variabel galat berdistribusi normal

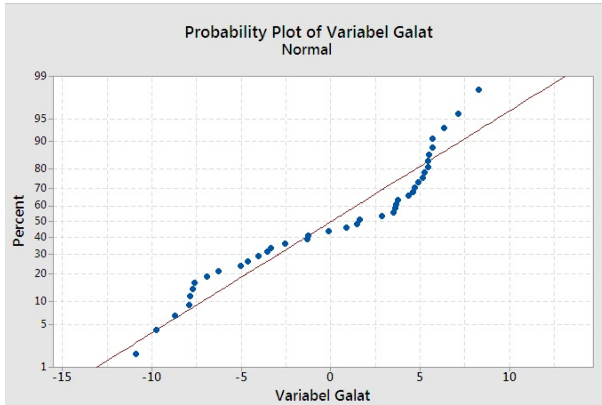
H_1 : Variabel galat tidak berdistribusi normal

Dengan menggunakan rumus statistik uji Kolmogorov-Smirnov pada persamaan (2.13) yaitu

$$D = maksimum\,|S(z_i) - P(z_i)|$$

Kesimpulan akhir diambil jika $D > D_{0,05}$ maka tolak H_0 atau dengan menggunakan tingkat kepercayaan (α) sebesar 5%, tolak H_0 jika *p-value* $\leq 0.05(\alpha)$.

Selanjutnya, hasil statistik uji Kolmogorov-Smirnov untuk uji normalitas diberikan pada gambar dan tabel berikut ini.



Gambar 3.3: Grafik Uji Normalitas

Dari grafik uji normalitas dengan statistik uji Kolmogorov-Smirnov di atas, plot-plot dari variabel galat tidak mengikuti garis *fit line* maka variabel galat tidak berdistribusi normal. Secara analitik, uji normalitas dengan statistik uji Kolmogorov-Smirnov ditunjukkan pada tabel di bawah ini.

Tabel 3.2: Hasil Statistik Uji Kolmogorov-Smirnov

Method	N	Mean	Standard Deviation	Test Statistic	P-Value
Kolmogorov-Smirnov	40	-4,44089E-17	5.635	0.184	0.010

Berdasarkan hasil pada tabel di atas diperoleh statistik uji Kolmogorov-Smirnov sebesar 0.184 dengan signifikansi *p-value* sebesar 0.010 atau *p-value* $\leq$ $0.05(\alpha)$ maka H_0 ditolak dan H_1 diterima artinya variabel galat tidak berdistribusi normal.

Selanjutnya rumusan hipotesis untuk uji homogenitas adalah sebagai berikut.

H_0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_5^2$

H_1 : Minimal ada σ_i^2 yang berbeda

Dengan menggunakan rumus statistik uji Bartlett pada persamaan (2.15) yaitu

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{C}\left[(N-k)\log\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)s_i^2}{N-k}\right)-\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\log s_i^2\right] \\
C &= 1+\frac{1}{3(k-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(n_i-1)}-\frac{1}{N-k}\right]
\end{aligned}
$$

Kesimpulan akhir diambil jika $T > \chi^2_{(1-\alpha)(k-1)}$ maka tolak H_0 atau dengan menggunakan tingkat kepercayaan (α) sebesar 5%, tolak H_0 jika *p-value* $\leq 0.05(\alpha)$.

Selanjutnya, hasil statistik uji Bartlett untuk uji homogenitas variansi diberikan pada tabel berikut ini.

Tabel 3.3: Hasil Statistik Uji Bartlett

Method	Test Statistic	P-Value
Bartlett	13,77	0,008

Berdasarkan hasil pada tabel di atas diperoleh statistik uji Bartlett sebesar 13.77 dengan signifikansi *p-value* sebesar 0.008 atau *p-value* $\leq$ 0.05 maka H_0 ditolak dan H_1 diterima artinya minimal ada σ_i^2 yang berbeda sehingga variansi data tidak homogen. Jadi, ada perbedaan variansi konsumsi makanan yang mengandung *Calcium Edetate* yang diberikan kepada kelompok hewan yang satu dengan kelompok hewan lainnya.

Setelah diuji normalitas dan homogenitas variansi, berikut ini adalah rumusan hipotesis untuk pengujian rata-rata perlakuan.

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 \\
H_1 &: \text{Minimal ada satu } \mu_i \text{ yang berbeda}
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan rumus statistik uji Fisher pada persamaan (2.15) yaitu

$$F_{hit} = \frac{KTA}{KTG} = \frac{JKA/k-1}{JKG/k(n-1)}$$

Kesimpulan akhir diambil jika $F_{hit} > F_{\alpha,k-1,k(n-1)}$ maka tolak H_0 atau dengan menggunakan tingkat kepercayaan (α) sebesar 5%, tolak H_0 jika *p-value* $\leq 0.05(\alpha)$.

Selanjutnya, hasil statistik uji Fisher untuk uji rata-rata perlakuan diberikan pada tabel berikut ini.

Tabel 3.4: Tabel Hasil ANOVA

Sumber variasi	Derajat Kebebasan	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	F Hitung	P-Value
Perlakuan	4	923.929	230.982	25.714	0.000
Galat	35	314.392	8.983		
Total	39	1238.321			

Berdasarkan hasil pada tabel di atas diperoleh F hitung sebesar 25.714 dengan signifikansi *p-value* sebesar 0.000 atau *p-value* ≤ 0.05 maka H_0 ditolak dan H_1 diterima artinya minimal ada satu μ_i yang berbeda. Jadi, konsumsi makanan yang mengandung *Calcium Edetate* yang diberikan pada setiap kelompok hewan mempunyai pengaruh yang nyata terhadap respon tubuh hewan tersebut.

Karena asumsi normalitas dan homogenitas variansi tidak terpenuhi, selanjutnya akan digunakan prosedur uji permutasi dan bootstrap. Namun, prosedur uji permutasi tidak dapat digunakan pada kasus ini karena hasil uji rata-rata perlakuan pada Tabel 3.4 menunjukkan bahwa minimal ada satu rata-rata perlakuan yang berbeda, sedangkan pada prosedur uji permutasi rata-rata perlakuan harus diasumsikan sama. Sehingga untuk menguji homogenitas variansi digunakan prosedur uji bootstrap. Pada uji bootstrap, rata-rata perlakuannya tidak perlu diketahui sebelumnya.

3.2.2 Uji Homogenitas Variansi Dengan Prosedur Uji Bootstrap

Data konsumsi makanan yang mengandung *Calcium Edetate* pada Tabel 3.1 tidak memenuhi asumsi normalitas dan homogenitas variansi. Sehingga untuk menguji homogenitas variansi dimana asumsi normalitasnya tidak terpenuhi digunakan prosedur uji bootstrap. Rumusan hipotesis untuk menguji homogenitas variansi pada uji bootstrap yaitu :

H_0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_5^2 = \sigma^2$

H_1 : Minimal ada σ_i^2 yang berbeda

Dengan menggunakan rumus *p-value* bootstrap pada persamaan (3.16) yaitu

$$\hat{p}_B = \frac{\#(T_1^*, T_2^*, T_3^*, \ldots, T_B^* \geq T_0)}{B}$$

Maka dengan menggunakan tingkat kepercayaan (α) sebesar 5%, kesimpulan akhir diperoleh jika $\hat{p}_B \leq 0.05(\alpha)$ maka tolak H_0.

Sebelumnya dari data awal pada Tabel 3.1, diperoleh hasil statistik uji Bartlett untuk data awal (T_0) pada Tabel 3.3 yaitu **13.77**. Kemudian data awal tersebut diresampel sebanyak B=1000 resampel dengan pengambilan sampel bootstrap seperti pada persamaan (3.9) yaitu

$$\bar{S} = \{\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \hat{\mu}_i\}$$

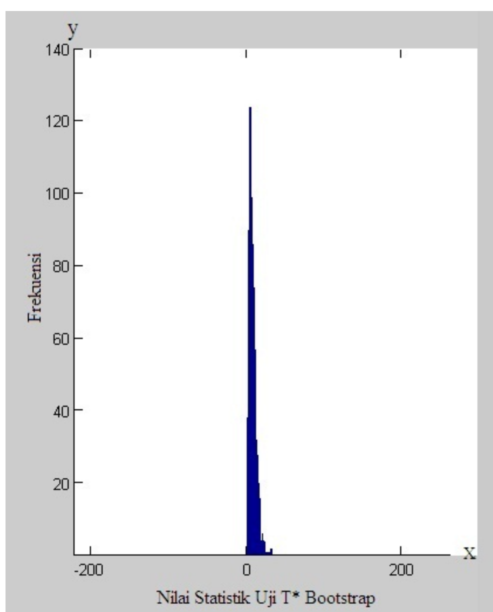
Setelah diperoleh 1000 sampel bootstrap, hitung kembali statistik uji Bartlett untuk tiap sampel bootstrap maka diperoleh T^* bootstrap yaitu $T_1^*, T_2^*, T_3^*, \ldots, T_{1000}^*$.

Hasilnya diberikan pada tabel berikut ini.

Tabel 3.5: Tabel Statistik Uji T^* Bootstrap untuk B=1000 Resampel

Statistik Uji T^* Bootstrap untuk B=1000 Resampel					
No.	1	2	3	....	10
1	10.0044	2.5923	10.0642	....	11.3431
2	8.0559	**15.1679**	5.2550	....	**17.9429**
3	8.6821	4.2285	1.1930	....	5.9447
4	**15.5941**	1.4731	10.1098	....	13.6867
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	7.7919	4.1406	8.7954	....	2.7502

Apabila nilai-nilai statistik uji T^* bootstrap tersebut disajikan dalam histogram maka diperoleh gambar bahwa nilai-nilai statistik uji T^* bootstrap menyebar mendekati normal. Hal ini dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Gambar 3.4: Nilai-Nilai Statistik Uji T^* Bootstrap untuk B=1000 Resampel

Berdasarkan hasil pada Tabel 3.5, banyaknya statistik uji T^* bootstrap yang lebih besar daripada T_0 adalah sebanyak 101 dari 1000 resampel. Jadi, *p-value* bootstrap dapat dihitung seperti berikut ini.

$$\begin{aligned}\hat{p}_{1000} &= \frac{\#(T_1^*, T_2^*, T_3^*, \ldots, T_{1000}^* \geq T_0)}{1000} \\ &= \frac{101}{1000} \\ &= 0.101\end{aligned}$$

Hasil *p-value* bootstrap untuk 1000 resampel sebesar 0.101 atau $\hat{p}_{1000} > 0.05$ sehingga H_0 diterima artinya $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_5^2 = \sigma^2$ maka variansi data homogen. Jadi, tidak ada perbedaan variansi konsumsi makanan yang mengandung *Calcium Edetate* yang diberikan kepada kelompok hewan yang satu dengan kelompok hewan lainnya.

3.3 Studi Kasus Data Nilai Akhir Matematika Dasar

Data berikut ini berasal dari soal rancangan percobaan (Kismiantini,2011) tentang nilai akhir kuliah matematika dasar dengan tiga dosen pengajar (A, B, C). Berikut ini adalah tabel data nilai akhir matematika dasar yang didapatkan oleh setiap mahasiswa pada setiap kelas.

Tabel 3.6: Data Nilai Akhir Matematika Dasar

Dosen	n_i	Nilai Akhir Matematika Dasar										
A	11	73	89	82	80	73	66	60	45	93	36	77
B	15	88	78	48	91	51	85	74	77	31	78	62
		76	96	80	56							
C	9	68	79	56	71	71	87	41	53	15		

3.3.1 Uji Normalitas dan Homogenitas Variansi Data Awal

Dari data pada Tabel 3.6 yaitu data tentang nilai akhir matematika dasar yang diberikan oleh dosen A, B, dan C dengan banyaknya mahasiswa tiap kelas berbeda-beda. Kelas pertama dengan dosen A sebanyak 11 mahasiswa, kelas kedua dengan dosen B sebanyak 15 mahasiswa, dan kelas ketiga dengan dosen C sebanyak 9 mahasiswa. Selanjutnya data tersebut akan di uji normalitas dan uji homogenitas variansi.

Rumusan hipotesis untuk uji normalitas adalah sebagai berikut.

H_0 : Variabel galat berdistribusi normal

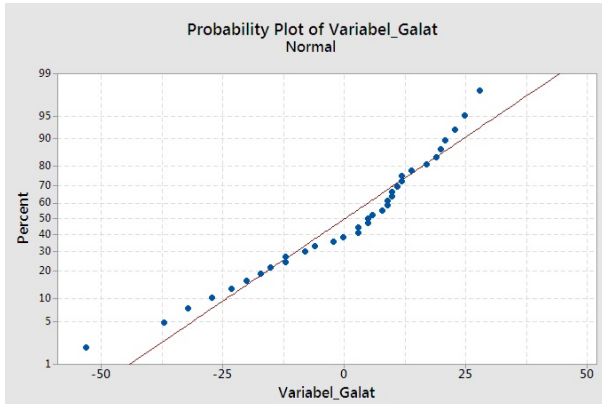
H_1 : Variabel galat tidak berdistribusi normal

Dengan menggunakan rumus statistik uji Kolmogorov-Smirnov pada persamaan (2.13) yaitu

$$D = maksimum\,|S(z_i) - P(z_i)|$$

Kesimpulan akhir diambil jika $D > D_{0{,}05}$ maka tolak H_0 atau dengan menggunakan tingkat kepercayaan (α) sebesar 5%, tolak H_0 jika *p-value* $\leq 0.05(\alpha)$.

Selanjutnya, hasil statistik uji Kolmogorov-Smirnov untuk uji normalitas diberikan pada gambar dan tabel berikut ini.



Gambar 3.5: Grafik Uji Normalitas

Dari grafik uji normalitas dengan statistik uji Kolmogorov-Smirnov di atas, plot-plot dari variabel galat tidak mengikuti garis *fit line* maka variabel galat tidak berdistribusi normal. Secara analitik, uji normalitas dengan statistik uji Kolmogorov-Smirnov ditunjukkan pada tabel di bawah ini.

Tabel 3.7: Hasil Statistik Uji Kolmogorov-Smirnov

Method	N	Mean	Standard Deviation	Test Statistic	P-Value
Kolmogorov-Smirnov	35	0.0004286	19.04	0.159	0.033

Berdasarkan hasil pada tabel di atas diperoleh statistik uji Kolmogorov-Smirnov sebesar 0.159 dengan signifikansi *p-value* sebesar 0.033 atau *p-value* $\leq 0.05(\alpha)$ maka H_0 ditolak dan H_1 diterima artinya variabel galat tidak berdistribusi normal.

Selanjutnya rumusan hipotesis untuk uji homogenitas adalah sebagai berikut.

H_0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$

H_1 : Minimal ada σ_i^2 yang berbeda

Dengan menggunakan rumus statistik uji Bartlett pada persamaan (2.15) yaitu

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{C}\left[(N-k)\log\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)s_i^2}{N-k}\right)-\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\log s_i^2\right] \\
C &= 1+\frac{1}{3(k-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(n_i-1)}-\frac{1}{N-k}\right]
\end{aligned}
$$

Kesimpulan akhir diambil jika $T > \chi^2_{(1-\alpha)(k-1)}$ maka tolak H_0 atau dengan menggunakan tingkat kepercayaan (α) sebesar 5%, tolak H_0 jika *p-value* $\leq 0.05(\alpha)$.

Selanjutnya, hasil statistik uji Bartlett untuk uji homogenitas variansi diberikan pada tabel berikut ini.

Tabel 3.8: Hasil Statistik Uji Bartlett

Method	Test Statistic	P-Value
Bartlett	0,51	0,773

Berdasarkan hasil pada tabel di atas diperoleh statistik uji Bartlett sebesar 0.51 dengan signifikansi *p-value* sebesar 0.773 atau *p-value* > 0.05 maka H_0 diterima artinya $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$ sehingga variansi data homogen. Jadi, tidak ada perbedaan variansi nilai akhir matematika dasar yang diberikan antara dosen yang satu dengan dosen lainnya untuk setiap kelas.

Setelah diuji normalitas dan homogenitas variansi, berikut ini adalah rumusan hipotesis untuk pengujian rata-rata perlakuan.

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\
H_1 &: \text{Minimal ada satu } \mu_i \text{ yang berbeda}
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan rumus statistik uji Fisher pada persamaan (2.15) yaitu

$$F_{hit} = \frac{KTA}{KTG} = \frac{JKA/k-1}{JKG/k(n-1)}$$

Kesimpulan akhir diambil jika $F_{hit} > F_{\alpha,k-1,k(n-1)}$ maka tolak H_0 atau dengan menggunakan tingkat kepercayaan (α) sebesar 5%, tolak H_0 jika *p-value* $\leq 0.05(\alpha)$.

Selanjutnya, hasil statistik uji Fisher untuk uji rata-rata perlakuan diberikan pada tabel berikut ini.

Tabel 3.9: Tabel Hasil ANOVA

Sumber variasi	Derajat Kebebasan	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	F Hitung	P-Value
Perlakuan	2	793.9	397.0	1.10	0.345
Galat	32	11535.0	360.5		
Total	34	12329.0			

Berdasarkan hasil pada tabel di atas diperoleh F hitung sebesar 1.10 dengan signifikansi *p-value* sebesar 0.345 atau *p-value* > 0.05 maka H_0 diterima artinya $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Jadi, nilai akhir matematika dasar yang diberikan oleh ketiga dosen tersebut tidak mempunyai pengaruh yang nyata terhadap mahasiswa-mahasiswa di tiap kelas.

Karena asumsi normalitas tidak terpenuhi sehingga uji Bartlett untuk menguji homogenitas variansi tidak valid, selanjutnya akan digunakan prosedur uji permutasi dan bootstrap untuk menguji homogenitas variansi. Prosedur uji permutasi dapat digunakan pada kasus ini karena hasil uji rata-rata perlakuan pada Tabel 3.9 menunjukkan bahwa rata-rata perlakuannya sama.

3.3.2 Uji Homogenitas Variansi Dengan Prosedur Uji Permutasi

Data nilai akhir matematika dasar pada Tabel 3.6 tidak memenuhi asumsi normalitas. Sehingga untuk menguji homogenitas variansi dimana asumsi normalitasnya tidak terpenuhi digunakan prosedur uji permutasi. Rumusan hipotesis untuk menguji homogenitas variansi pada uji permutasi yaitu :

H_0 : $F_1(y) = F_2(y) = F_3(y)$

H_1 : Minimal ada satu $F_i(y)$ yang berbeda.

Dengan menggunakan rumus *p-value* permutasi pada persamaan (3.6) yaitu

$$p_M = \frac{\#(T_1, T_2, T_3, \ldots, T_M \geq T_0)}{M}$$

Maka dengan menggunakan tingkat kepercayaan (α) sebesar 5%, kesimpulan akhir diperoleh jika $p_M \leq 0.05(\alpha)$ maka tolak H_0.

Sebelumnya dari data awal pada Tabel 3.6, diperoleh hasil statistik uji Bartlett untuk data awal (T_0) pada Tabel 3.8 yaitu **0.51**. Kemudian data awal tersebut diresampel sebanyak M=1000 resampel dengan pengambilan sampel permutasi seperti pada persamaan (3.3) yaitu

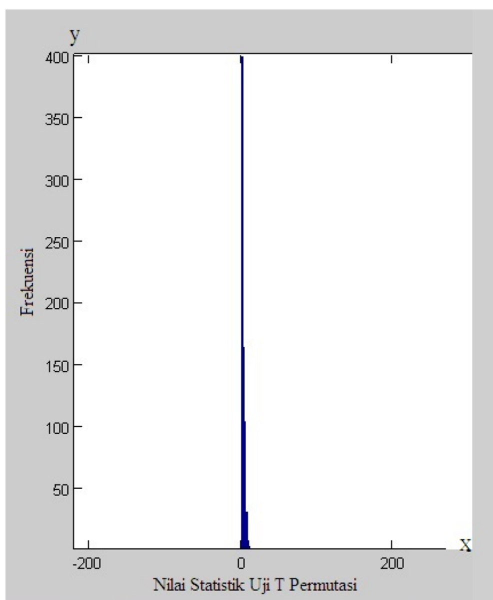
$$S = \{Y_{ij}, i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, n_i\}$$

Setelah diperoleh 1000 sampel permutasi, hitung kembali statistik uji Bartlett untuk tiap sampel permutasi maka diperoleh T permutasi yaitu $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_M$. Hasilnya diberikan pada tabel berikut ini.

Tabel 3.10: Tabel Statistik Uji T Permutasi untuk M=1000 Resampel

Statistik Uji T Permutasi untuk M=1000 Resampel					
No.	1	2	3	....	10
1	0.1484	**4.1179**	**2.1297**	....	**2.7409**
2	**3.6621**	**0.6921**	**5.8839**	....	0.4013
3	0.4637	**2.4597**	0.4534	....	**1.2246**
4	**3.3187**	0.2383	**3.9965**	....	**2.7135**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	**2.2861**	0.2341	**2.9637**	....	0.0670

Apabila nilai-nilai statistik uji T permutasi tersebut disajikan dalam histogram maka diperoleh gambar bahwa nilai-nilai statistik uji T permutasi menyebar mendekati normal. Hal ini dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Gambar 3.6: Nilai-Nilai Statistik Uji T Permutasi untuk M=1000 Resampel

Berdasarkan hasil pada Tabel 3.10, banyaknya statistik uji T permutasi yang lebih besar daripada T_0 adalah sebanyak 856 dari 1000 resampel. Jadi, *p-value* permutasi dapat dihitung seperti berikut ini.

$$\begin{aligned} p_{1000} &= \frac{\#(T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{1000} \geq T_0)}{1000} \\ &= \frac{856}{1000} \\ &= 0.856 \end{aligned}$$

Hasil *p-value* permutasi untuk 1000 resampel sebesar 0.856 atau $p_{1000} > 0.05$ sehingga H_0 diterima artinya $F_1(y) = F_2(y) = F_3(y)$ maka populasi berdistribusi identik dengan rata-rata perlakuan sama dan variansi homogen. Jadi, tidak ada perbedaan variansi nilai akhir matematika dasar yang diberikan antara dosen yang satu dengan dosen lainnya untuk setiap kelas.

3.3.3 Uji Homogenitas Variansi Dengan Prosedur Uji Bootstrap

Data nilai akhir matematika dasar pada Tabel 3.6 tidak memenuhi asumsi normalitas. Sehingga untuk menguji homogenitas variansi dimana asumsi normalitasnya tidak terpenuhi digunakan prosedur uji bootstrap. Rumusan hipotesis untuk menguji homogenitas variansi pada uji bootstrap yaitu :

H_0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma^2$

H_1 : Minimal ada σ_i^2 yang berbeda

Dengan menggunakan rumus *p-value* bootstrap pada persamaan (3.16) yaitu

$$\hat{p}_B = \frac{\#(T_1^*, T_2^*, T_3^*, \ldots, T_B^* \geq T_0)}{B}$$

Maka dengan menggunakan tingkat kepercayaan (α) sebesar 5%, kesimpulan akhir diperoleh jika $\hat{p}_B \leq 0.05(\alpha)$ maka tolak H_0.

Sebelumnya dari data awal pada Tabel 3.6, diperoleh hasil statistik uji Bartlett untuk data awal (T_0) pada Tabel 3.8 yaitu **0.51**. Kemudian data awal tersebut diresampel sebanyak B=1000 resampel dengan pengambilan sampel bootstrap seperti pada persamaan (3.9) yaitu

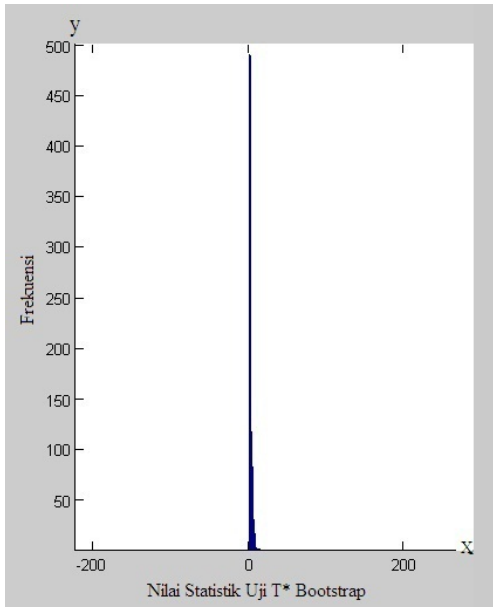
$$\bar{S} = \{\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \hat{\mu}_i\}$$

Setelah diperoleh 1000 sampel bootstrap, hitung kembali statistik uji Bartlett untuk tiap sampel bootstrap maka diperoleh T^* bootstrap yaitu $T_1^*, T_2^*, T_3^*, \ldots, T_{1000}^*$. Hasilnya diberikan pada tabel berikut ini.

Tabel 3.11: Tabel Statistik Uji T^* Bootstrap untuk B=1000 Resampel

Statistik Uji T^* Bootstrap untuk B=1000 Resampel					
No.	1	2	3	....	10
1	0.3840	**2.5484**	**10.3818**	....	**1.2157**
2	**2.7827**	0.0608	**7.2972**	....	**5.2923**
3	0.1534	0.1886	**5.0015**	....	**1.4160**
4	0.0989	**4.1588**	**1.8753**	....	**7.7376**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	**3.4341**	**0.6714**	0.4968	....	0.1954

Apabila nilai-nilai statistik uji T^* bootstrap tersebut disajikan dalam histogram maka diperoleh gambar bahwa nilai-nilai statistik uji T^* bootstrap menyebar mendekati normal. Hal ini dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Gambar 3.7: Nilai-Nilai Statistik Uji T^* Bootstrap untuk B=1000 Resampel

Berdasarkan hasil pada Tabel 3.11, banyaknya statistik uji T^* bootstrap yang lebih besar daripada T_0 adalah sebanyak 790 dari 1000 resampel. Jadi, *p-value* bootstrap dapat dihitung seperti berikut ini.

$$\begin{aligned} \hat{p}_{1000} &= \frac{\#(T_1^*, T_2^*, T_3^*, \ldots, T_{1000}^* \geq T_0)}{1000} \\ &= \frac{790}{1000} \\ &= 0.790 \end{aligned}$$

Hasil *p-value* bootstrap untuk 1000 resampel sebesar 0.790 atau $\hat{p}_{1000} > 0.05$ sehingga H_0 diterima artinya $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma^2$ maka variansi data homogen. Jadi, tidak ada perbedaan variansi nilai akhir matematika dasar yang diberikan antara dosen yang satu dengan dosen lainnya untuk setiap kelas.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Prosedur uji permutasi dan bootstrap dengan statistik uji Bartlett dapat digunakan untuk menguji homogenitas variansi pada rancangan acak lengkap dimana asumsi normalitasnya tidak terpenuhi. Distribusi statistik permutasi dan fungsi distribusi empiris pada bootstrap mengatasi asumsi normalitas yang tidak terpenuhi.

2. Uji permutasi untuk menguji homogenitas variansi dapat digunakan hanya jika telah diasumsikan bahwa rata-rata perlakuannya sama, sedangkan uji bootstrap untuk menguji homogenitas variansi dapat digunakan meskipun rata-rata perlakuannya tidak diketahui sebelumnya.

3. Dari analisis pada data konsumsi makanan yang mengandung *Calcium Edetate*, diperoleh hasil *p-value* bootstrap dengan 1000 resampel sebesar 0.101 atau *p-value* $> 0.05(\alpha)$ sehingga H_0 diterima. Artinya variansi data homogen atau tidak ada perbedaan variansi konsumsi makanan yang mengandung *Calcium Edetate* yang diberikan kepada kelompok hewan yang satu dengan kelompok hewan lainnya.

4. Dari analisis pada data nilai akhir matematika dasar, diperoleh bahwa *p-value* permutasi dan *p-value* bootstrap masing-masing adalah sebesar 0.856

dan 0.790 untuk 1000 resampel. Kedua uji tersebut menghasilkan *p-value* $>$ $0.05(\alpha)$ sehingga H_0 diterima. Artinya variansi data homogen atau tidak ada perbedaan variansi nilai akhir matematika dasar yang diberikan antara dosen yang satu dengan dosen lainnya untuk setiap kelas.

4.2 Saran

1. Dalam penulisan selanjutnya, untuk menguji homogenitas variansi selain menggunakan metode resampling dengan uji permutasi dan bootstrap dapat juga menggunakan 2 pendekatan lainnya yaitu :
    - Menyesuaikan prosedur uji pada teori kenormalan menggunakan estimasi kurtosis
    - Melakukan analisis variansi (ANOVA) pada suatu himpunan data dimana setiap observasi digantikan dengan variabel skala seperti simpangan baku dari rataan atau median. Prosedur yang terkait adalah melakukan ANOVA pada *pseudo-values Jackknife* dari skala kuantitas seperti log dari variansi sampel.
2. Uji homogenitas variansi dengan metode resampling (uji permutasi dan bootstrap) selain menggunakan statistik uji Bartlett, dapat juga menggunakan statistik uji lainnya seperti Uji Havley untuk kasus k = 2, Uji Hartley dan Uji Levene untuk kasus k $>$ 2.

DAFTAR PUSTAKA

Boos, Dennis D. dan Cavell Brownie. 1986. "Bootstrap Methods for Testing Homogeneity of Variances". Institute of Statistics Mimeo. Series No.1676. http://www.stat.ncsu.edu/

Boos, Dennis D. dan Cavell Brownie. 2004. "Comparing Variances and Other Measures Of Dispersion". *Statistical Science*. Institute of Mathematics Statistics. Vol.19, No.4, 571-578.
http://www.stat.ncsu.edu/

Budiansyah, Mardian. 2009. *Analisis Regresi linier dengan Metode Bootstrap.* Skripsi. Jakarta. Fakultas Matematika, Universitas Negeri Jakarta.

Dajan, Anto. 1986. *Pengantar Metode Statistik Jilid II.* Jakarta : LP3ES.

Hanipah, Hani. 2014. "Pengaruh Keputusan Investasi, Keputusan Pendanaan dan Kebijakan Deviden terhadap Nilai Perusahaan (Studi Empiris pada Perusahaan Manufaktur yang Listing di Bursa Efek Indonesia Tahun 2012)". Universitas Pendidikan Indonesia.

Hesterberg, Tim, dkk. 2003. *Bootstrap Methods and Permutation Test.* New York : W. H. Freeman and Company.

Hidayati. 2015. "Laporan Statistik Elementer Uji Analisis Varian Satu Arah (ANOVA)". Malang. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Kismiantini. 2011. "Handout Rancangan Percobaan". Universitas Negeri Yogyakarta. Yogyakarta.

Kurniawan, Deny. 2008. ”Regresi Linier(Linear Regression)”. http://ineddeni.wordpress.com

Marzuki. 2011. ”Pengaruh Bimbingan Belajar terhadap Nilai Mahasiswa dengan Uji Permutasi”. Banda Aceh. Universitas Syiah Kuala.

Montgomery, Douglas C. 2001. *Design and Analysis of Experiments*. Arizona State University : Fifth Edition.

Mu, Zhiqiang. 2006. *Comparing The Statistical Test For Homogeneity Of Variances*. Electronic Theses and Dissertations. The Faculty of The Departments Of Mathematics. East Tennesse State University. http://dc.etsu.edu/

Setiawan, Adi dkk. 2013. ”Penerapan Metode Bootstrap pada Uji Komparatif Non Parametrik Lebih dari 2 Sampel”. Salatiga. Universitas Kristen Satya Wacana.

Sungkono, Joko. 2013. ”Resampling Bootstrap pada R”. Klaten. UNWIDHA.

Sutyana, Ester. 2006. *Analisis Perbandingan Model Regresi linier Berganda dengan Metode Bootstrap Pairs dan Bootstrap Residual dengan R-Language*. Skripsi. Jakarta. Teknik Informatika-Statistika, Universitas Bina Nusantara.

Walpole, Ronald E. dan Raymond H.Myers. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuan*. Terjemahan RK Sembiring Edisi ke-4. Bandung : ITB.

Wijaya. 2008. ”Uji Asumsi Klasik Regresi Linier”. Fakultas Pertanian. Universitas Swadaya Gunung Jati Cirebon.

Zulaela. 1990. ”Metode Bootstrap untuk Uji Homogenitas Variansi”. Laporan Penelitian. Universitas Gadjah Mada.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

LAMPIRAN A

Penurunan Rumus JKA dan JKG

1. Perkalian silang $2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})(Y_{ij}-\bar{Y}_{i.})=0$ karena

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})(Y_{ij}-\bar{Y}_{i.}) &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij}\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{i.}^{2}-Y_{i}\bar{Y}_{..}+\bar{Y}_{i.}\bar{Y}_{..}) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}\bar{Y}_{i.}-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\bar{Y}_{i.}^{2}-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{i}\bar{Y}_{..}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\bar{Y}_{i.}\bar{Y}_{..} \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}}{n}\right)-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}}{n}\right)\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}}{n}\right) \\
&- \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}\left(\frac{Y_{..}}{n}\right)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}}{n}\right)\left(\frac{Y_{..}}{nk}\right) \\
&= Y_{..}\frac{Y_{i.}}{n}-\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}}{n}\right)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}}{n}\right)-Y_{..}\left(\frac{Y_{..}}{nk}\right) \\
&+ \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}}{n}\right)\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{Y_{..}}{nk}\right) \\
&= \frac{Y_{i.}Y_{..}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}}{n}\right)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{Y_{i.}}{n}\right)-\frac{Y_{..}^{2}}{nk} \\
&+ \left(\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}}{n}\right)n\left(\frac{Y_{..}}{nk}\right) \\
&= \frac{Y_{i.}Y_{..}}{n}-\frac{Y_{..}}{n}n\frac{Y_{i.}}{n}-\frac{Y_{..}^{2}}{nk}+\frac{Y_{..}}{n}n\frac{Y_{..}}{nk} \\
&= \frac{Y_{i.}Y_{..}}{n}-\frac{Y_{i.}Y_{..}}{n}-\frac{Y_{..}^{2}}{nk}+\frac{Y_{..}^{2}}{nk} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nilai Harapan JKA dan JKG

Asumsikan $\varepsilon_{ij} \sim NIID\,(0, \sigma^2)$, sehingga $E(\varepsilon_{ij}) = 0$ dan $Var(\varepsilon_{ij}) = E\left(\varepsilon_{ij}^2\right) = \sigma^2$.

2. Nilai harapan dari $\sum_{i=1}^{k} \frac{(Y_{i.}^2)}{n}$ atau $\sum_{i=1}^{k} \frac{E(Y_{i.}^2)}{n}$

$$
\begin{aligned}
Y_{i.} &= \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(\mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}) = n\mu + n\tau_i + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} \\
Y_{i.}^2 &= \left(n\mu + n\tau_i + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}\right)^2 \\
&= n^2\mu^2 + n^2\mu\tau_i + n\mu \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} + n^2\tau_i\mu + n^2\tau_i^2 + n\tau i \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} \\
&+ n\mu \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} + n\tau_i \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}^2 \\
\frac{E(Y_{i.}^2)}{n} &= \frac{1}{n} E\left(n^2\mu^2 + n^2\mu\tau_i + n\mu \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} + n^2\tau_i\mu + n^2\tau_i^2 + n\tau i \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}\right) \\
&+ \frac{1}{n} E\left(n\mu \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} + n\tau_i \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}^2\right) \\
&= \frac{1}{n}(n^2\mu^2 + 2n^2\mu\tau_i + n^2\tau_i^2 + n\sigma^2) \\
&= n\mu^2 + 2n\mu\tau_i + n\tau_i^2 + \sigma^2 \\
\sum_{i=1}^{k} \frac{E(Y_{i.}^2)}{n} &= \sum_{i=1}^{k} \left(n\mu^2 + 2n\mu\tau_i + n\tau_i^2 + \sigma^2\right) \\
&= kn\mu^2 + 2n\mu \sum_{i=1}^{k} \tau_i + n \sum_{i=1}^{k} \tau_i^2 + k\sigma^2
\end{aligned}
$$

3. Nilai harapan dari $\left(\frac{Y_{..}^2}{kn}\right)$ atau $E\left(\frac{Y_{..}^2}{kn}\right)$

$$
\begin{aligned}
Y_{..} &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}) = kn\mu + n\sum_{i=1}^{k}\tau_i + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij} \\
Y_{..}^2 &= \left(kn\mu + n\sum_{i=1}^{k}\tau_i + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}\right)^2 \\
&= k^2n^2\mu^2 + 2kn\mu\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}^2 \\
E\left(\frac{Y_{..}^2}{kn}\right) &= \frac{1}{kn}E\left(k^2n^2\mu^2 + 2kn\mu\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}^2\right) \\
&= \frac{1}{kn}(k^2n^2\mu^2 + kn\sigma^2) \\
&= kn\mu^2 + \sigma^2
\end{aligned}
$$

4. Nilai harapan dari $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}^2\right)$ atau $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}E\left(Y_{ij}^2\right)$

$$
\begin{aligned}
Y_{ij}^2 &= (\mu + \tau_i + \varepsilon_{ij})^2 = \mu^2 + 2\mu\tau_i + 2\mu\varepsilon_{ij} + \tau_i^2 + 2\tau_i\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^2 \\
E(Y_{ij}^2) &= E(\mu^2 + 2\mu\tau_i + 2\mu\varepsilon_{ij} + \tau_i^2 + 2\tau_i\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^2) = \mu^2 + 2\mu\tau_i + \tau_i^2 + \sigma^2 \\
\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}E\left(Y_{ij}^2\right) &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\mu^2 + 2\mu\tau_i + \tau_i^2 + \sigma^2) \\
&= kn\mu^2 + 2n\sum_{i=1}^{k}\mu\tau_i + n\sum_{i=1}^{k}\tau_i^2 + kn\sigma^2
\end{aligned}
$$

LAMPIRAN B

Listing Program Matlab

1. Uji Bartlett (Uji T)

```
function [T]=BARTLETT(Ax)
%---------- Outputnya T, inputnya matrix Ax ----------
N=length(Ax);
k=max(Ax(:,2));
n=zeros(1,k);
for i=1:N
    n(1,Ax(i,2))=n(1,Ax(i,2))+1;
end
%---------- D & E untuk mempersingkat rumus ----------
D=1/(3*(k-1));
E=1/(N-k);
%---------- Rumus sigma ----------
jumlah1=0;
for i=1:k
    jumlah1=jumlah1+(1/((n(i)-1)));
end
%---------- Rumus C ----------
F=D*(jumlah1-E);
C=1+F;
%---------- Mean tiap kelas ----------
m_n=zeros(1,k);
for i=1:N
```

```
    m_n(1,Ax(i,2))=m_n(1,Ax(i,2))+Ax(i,1);
end
m_n=m_n./n;
%---------- Variansi tiap kelompok ----------
var=zeros(1,k);
for i=1:N
    ru=Ax(i,1)-m_n(Ax(i,2));
    var(Ax(i,2))=var(Ax(i,2))+(ru)^2;
end
var=var./(n-1);
%---------- MSE ----------
MSE=0;
for i=1:k
    MSE=MSE+(n(i)-1)*var(i);
end
MSE=MSE/(N-k);
%---------- GMSE ----------
GMSE=1;
for i=1:k
    GMSE=GMSE*var(i)^(n(i)-1);
end
GMSE=(GMSE)^(1/(N-k));
%---------- Uji Bartlett (Uji T) ----------
T=((N-k)/C)*(log(MSE)-log(GMSE));
%---------- Menampilkan jawaban ----------
disp(T);
```

```
disp(m_n);
disp(MSE);
end
```

2. *P-value* Permutasi

```
function [ p_value ] = permut( B )
%UNTITLED2 Summary of this function goes here
%Detailed explanation goes here
clc
N=length(B);
grinding=input('banyak pengambilan sampel?  ');
toleransi=input('alfa? ');
if toleransi==[]
    toleransi=0.05;
end

T0=BARTLETT(B);
ruo=0;
%---------- definisikan n ----------
n=zeros(1,k);
for i=1:N
    n(1,B(i,2))=n(1,B(i,2))+1;
end
%---------- mean tiap kelas ----------
m_n=zeros(1,k);
for i=1:N
```

```
    m_n(1,B(i,2))=m_n(1,B(i,2))+B(i,1);
end
m_n=m_n./n;
%---------- Residual ----------
daridulu=B;
for i=1:N
    B(i,1)=B(i,1)-m_n(B(i,2));
end
disp(B)
%---------- Resampling permutasi ----------
hindi=zeros(N,grinding);
cal=B;
T_permut=zeros(1,grinding);
for im=1:grinding
    smpl=randperm(N);
    for k=1:N
        hindi(k,im)=B(smpl(k),1);
    end
    cal(:,1)=hindi(:,im);
    rex=BARTLETT(cal);
    T_permut(im)=rex;
    if rex>=T0
        ruo=ruo+1;
    end
end
%---------- Penampilan hasil ----------
```

```
disp(' uji Bartlett pada data awal')
disp(T0);
disp('T_permut')
disp(T_permut);
%hilangkan persen dibawah untuk menampilakn matrix
%in=input(''hasil resampling ke?  ')
%disp(hindi(:,2*in-1:2*in))
%---------- Histogram uji T ----------
A=1:grinding;
B=T_permut;
B=zeros(1,grinding);
for i=1:grinding
    B(i)=B(i)+T_permut(i);
end
hist(B,A,1)
%---------- P-value uji T ----------
disp('besar p-value permutasi uji T')
p_value=ruo/grinding;
disp(p_value)
if p_value<=toleransi
    disp('tolak H0')
else
    disp('terima H0')
end
end
```

3. *P-value* Bootstrap

```
function [ p_value ] = boot( B )
%UNTITLED2 Summary of this function goes here
%Detailed explanation goes here
clc
N=length(B);
k=length(B);
%---------- definisikan n ----------
n=zeros(1,k);
for i=1:N
    n(1,B(i,2))=n(1,B(i,2))+1;
end
%---------- Uji data awal ----------
grinding=input('banyak pengambilan sampel?  ');
toleransi=input('alfa? ');
if toleransi==[]
    toleransi=0.05;
end

T0=BARTLETT(B);
ruo=0;
%---------- mean tiap kelas ----------
m_n=zeros(1,k);
for i=1:N
    m_n(1,B(i,2))=m_n(1,B(i,2))+B(i,1);
```

```
end
m_n=m_n./n;
%---------- Residual ----------
daridulu=B;
for i=1:N
    B(i,1)=B(i,1)-m_n(B(i,2));
end
disp(B)
%---------- Resampling bootstrap ----------
hindi=zeros(N,grinding);
cal=B;
T_boot=zeros(1,grinding);
for im=1:grinding
    smpl=randint(1,N,[1,N]);
    for k=1:N
        hindi(k,im)=B(smpl(k),1);
    end
    cal(:,1)=hindi(:,im);
    rex=BARTLETT(cal);
    T_boot(im)=rex;
    if rex>=T0
        ruo=ruo+1;
    end
end
B=daridulu;
%---------- Histogram uji T----------
```

```
A=1:grinding;
B=T_boot;
B=zeros(1,grinding);
for i=1:grinding
    B(i)=B(i)+T_boot(i)
end
hist(B,A,1)
%---------- Penampilan hasil ----------
disp(' uji Bartlett pada data awal')
disp(T0);
disp('T_boot')
disp(T_boot);
```

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama	:	Hamas Fahmi Hasyim
No. Registrasi	:	3125111211
Jurusan	:	Matematika
Program Studi	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul "**Uji Homogenitas Variansi Menggunakan Prosedur Uji Permutasi dan Bootstrap pada Rancangan Acak Lengkap**" adalah :

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, Desember 2015

Yang membuat pernyataan

Hamas Fahmi Hasyim

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

HAMAS FAHMI HASYIM. Lahir di Purworejo, 17 April 1993. Anak kedua dari pasangan Bapak Sudarmaji dan Ibu Khuzaimah. Saat ini bertempat tinggal di Pondok Ungu Permai, Kaliabang Tengah Bekasi Utara, Bekasi 17125.

No. Ponsel	:	-
Email	:	hasyimf335@yahoo.com

Riwayat Pendidikan : Penulis mengawali pendidikan di SD Negeri Bahagia 06 Bekasi pada tahun 1999 - 2005. Setelah itu, penulis melanjutkan ke SMP Negeri 3 Babelan Bekasi hingga tahun 2008. Kemudian kembali melanjutkan ke SMA Negeri 1 Bekasi dan lulus tahun 2011. Di Tahun yang sama penulis melanjutkan ke Universitas Negeri Jakarta (UNJ), jurusan Matematika, melalui jalur SNMPTN. Di akhir tahun 2015 penulis telah memperoleh gelar Sarjana Sains untuk Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, FMIPA, UNJ.

Riwayat Organisasi : Selama di bangku perkuliahan, penulis aktif di berbagai organisasi kemahasiswaaan. Dalam satu tahun pertama, penulis mendapat kepercayaan sebagai staff Departemen Advokasi dan Olahraga BEMJ Matematika. Di tahun yang sama penulis aktif di berbagai acara kemahasiswaan seperti Math League, Math Cup, Seminar Matematika, MPA Jurusan dan lain sebagainya. Di tahun kedua penulis tidak melanjutkan keanggotan di BEMJ Matematika, namun tetap ikut dalam kepanitiaan acara kemahasiswaan seperti MPA Fakultas.

Riwayat Pekerjaan : Penulis mulai menjadi pengajar matematika sejak tahun 2011 di bimbingan belajar New Concept English Education Centre sampai sekarang. Pada tahun 2014, penulis bekerja di Berita Satu.