PEMODELAN WAKTU HIDUP KOMPONEN DENGAN MENGGUNAKAN DISTRIBUSI EKSPONENSIAL BIVARIAT

Skripsi
Disusun untuk melengkapi syarat-syarat
guna memperoleh gelar Sarjana Sains

MUHAMMAD AGUNG SETYA NOER ISNANTO
3125111214

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA
2015

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

PEMODELAN WAKTU HIDUP KOMPONEN DENGAN MENGGUNAKAN DISTRIBUSI EKSPONENSIAL BIVARIAT

Nama : M. Agung. S. N. I

No. Registrasi : 3125111214

		Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab				
Dekan	:	Prof. Dr. Suyono, M.Si.	....	....
		NIP. 19671218 199303 1 005		
Wakil Penanggung Jawab				
Pembantu Dekan I	:	Dr. Muktiningsih, M.Si.	....	....
		NIP. 19640511 198903 2 001		
Ketua	:	Dra. Widiyanti Rahayu, M.Si.	....	....
		NIP. 19661103 200112 2 001		
Sekretaris	:	Ria Arafiyah, M.Si.	....	....
		NIP. 19751121 200501 2 004		
Penguji	:	Dian Handayani, M.Si.	....	....
		NIP. 19740415 199803 2 001		
Pembimbing I	:	Prof. Dr. Suyono, M.Si.	....	....
		NIP. 19671218 199303 1 005		
Pembimbing II	:	Vera Maya Santi, M.Si.	....	....
		NIP. 19790531 200501 2 006		

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal: 7 Juli 2015

ABSTRACT

M. AGUNG. S. N. I, 3125111214. Survival Time Component Models with using Bivariate Exponential Distribution. Thesis. Faculty of Mathematics and Natural Science Jakarta State University. 2015.

This paper discuss some properties of the bivariate exponential distribution model. The properties are probability density function, cumulative distribution function, failure rate, marginal reliability or survival function, mean, variance, Laplace transform, and covariance. Bivariate exponential distribution does not have joint density function because the left-hand limit is different from the right-hand limit. The covariance of two random variables which have bivariate exponential distribution could be obtained by applying Laplace transformation.

Keywords *: survival time, reliability, bivariate exponential distribution.*

ABSTRAK

M. AGUNG. S. N. I, 3125111214. Pemodelan Waktu Hidup Komponen dengan Menggunakan Distribusi Eksponensial Bivariat. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. 2015.

Pada skripsi ini dibahas sifat-sifat waktu hidup komponen dengan menggunakan distribusi eksponensial bivariat. Sifat-sifat yang dibahas meliputi sifat-sifat seperti fungsi densitas probabi-litas, fungsi distribusi kumulatif, laju kegagalan, reliabilitas marginal atau fungsi survival, mean, variansi, transformasi Laplace, dan kovarian. Distribusi eksponensial bivariat tidak memiliki fungsi densitas bersama karena limit kiri dan limit kanan dari fungsi distribusi kumulatif bersamanya berbeda. Untuk menghitung kovarian, terlebih dahulu dihitung transformasi Laplace bersama dari distribusi eksponensial bivariat.

Kata kunci : waktu hidup, reliabilitas, distribusi eksponensial bivariat.

PERSEMBAHANKU...

"Sesungguhnya bersama kesukaran itu ada keringanan. Karena itu bila kau sudah selesai (mengerjakan yang lain). Dan berharaplah kepada Tuhanmu. (Q.S Al Insyirah : 6-8)."

"Barangsiapa bertawakkal pada Allah, maka Allah akan memberikan kecukupan padanya, sesungguhnya Allah lah yang akan melaksanakan urusan (yang dikehendaki)-Nya.
(QS. Ath-Thalaq: 3)."

"Ini bukanlah akhir perjuangan, melainkan awal dari sebuah impian.
Karena perjalanan seribu mil dimulai dari langkah pertama.
Bismillah. "

Skripsi ini kupersembahkan untuk Papa, Mama, dan Adik tersayang.
"Terima kasih atas dukungan, do'a, serta kasih sayang kalian".

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT atas pengetahuan dan kemampuan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pemodelan Waktu Hidup Komponen dengan Menggunakan Distribusi Eksponensial Bivariat" yang merupakan salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Jurusan Matematika Universitas Negeri Jakarta.

Skripsi ini berhasil diselesaikan tidak terlepas dari adanya bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin menyampaikan terima kasih terutama kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Suyono, M.Si, selaku Dosen Pembimbing I dan Ibu Vera Maya Santi, M.Si, selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktunya dalam memberikan bimbingan, saran, nasehat serta arahan sehingga skripsi ini dapat menjadi lebih baik dan terarah.

2. Bapak Drs. Makmuri, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNJ dan Ibu Ratna Widyati, S.Si, M.Kom., selaku Ketua Prodi Matematika FMIPA UNJ yang telah banyak membantu penulis.

3. Bapak Drs. Bambang Irawan, M.Si, selaku Pembimbing Akademik atas segala bimbingan dan kerja sama Bapak selama perkuliahan, dan seluruh Bapak/Ibu dosen atas pengajarannya yang telah diberikan, serta karyawan/karyawati FMIPA UNJ yang telah memberikan informasi yang penulis butuhkan dalam menyelesaikan skripsi.

4. Papa dan Mama tersayang yang selalu mendoakan, mendukung, memberi

motivasi, dan setia membantu penulis dengan penuh cinta dan kasih sayang yang tulus.

5. Dra. Sri Rubiati yang terus memberi, doa, semangat, dan dukungan untuk penulis.

6. Adik laki-laki penulis, Aditya yang terus memberi semangat, dan dukungan untuk penulis.

7. Kak Adi, Kak Rayvin, Kak Antoni, dan seluruh kakak tingkat yang selalu memberikan semangat dan motivasi untuk penulis.

8. Teman-teman tercinta Matematika 2011 terutama sahabat-sahabat DOT yang selalu ada dikala senang maupun susah, serta teman-teman UNJ yang tidak dapat disebutkan satu-persatu.

9. Terakhir Gladys Rusela Putri yang selalu memberikan doa, semangat, motivasi, dan selalu ada dikala senang maupun susah, serta selalu menghibur ketika penulis mengalami kesulitan dalam penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Masukan dan kritikan akan sangat berarti. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca sekalian.

Jakarta, Juli 2015

M. Agung. S. N. I

DAFTAR ISI

ABSTRACT i

ABSTRAK ii

KATA PENGANTAR iv

DAFTAR ISI vii

DAFTAR GAMBAR viii

DAFTAR SIMBOL ix

I PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang Masalah 1

1.2 Perumusan Masalah 2

1.3 Pembatasan Masalah 3

1.4 Tujuan Penulisan 3

1.5 Manfaat Penulisan 3

1.6 Metode Penelitian 4

II LANDASAN TEORI 5

2.1 Variabel Acak Kontinu 5

2.2 Distribusi Bersama Variabel Acak Kontinu 7

2.3 Transformasi Laplace 8

2.4 Distribusi Eksponensial 9

2.5 Distribusi Eksponensial Bivariat untuk Kasus Independen 10

2.6 Reliabilitas 12
2.6.1 Waktu Kegagalan 12
2.6.2 Fungsi Reliabilitas 13
2.6.3 Fungsi Laju Kegagalan 14
2.6.4 Ekspektasi Waktu Kegagalan 15
2.6.5 Reliabilitas Sistem dengan Komponen Independen 16

III PEMBAHASAN **18**
3.1 Distribusi Eksponensial Bivariat untuk Kasus Dependen 18
3.1.1 Reliabilitas Marginal/Fungsi Survival 19
3.1.2 Fungsi Distribusi Kumulatif Marginal dan Fungsi Distribusi Kumulatif Bersama 20
3.1.3 Fungsi Densitas Marginal dan Fungsi Densitas Bersama . . 21
3.1.4 Fungsi Laju Kegagalan 22
3.2 Sifat-sifat Distribusi Eksponensial Bivariat untuk Kasus Dependen 23
3.2.1 Mean dan Variansi 23
3.2.2 Transformasi Laplace 26
3.2.3 Kovarian 28
3.3 Contoh Aplikasi 31

IV PENUTUP **36**
4.1 Kesimpulan 36
4.2 Saran 37

DAFTAR PUSTAKA **38**

DAFTAR GAMBAR

2.1 Grafik fungsi reliabilitas 14

3.1 Gambar Ilustrasi 31

3.2 Grafik Eksponensial Ketiga Sumber Getaran 33

DAFTAR SIMBOL

			halaman
$F_T(t)$	:	fungsi kumulatif	5
$f_T(t)$	:	fungsi densitas	5
T	:	variabel acak kontinu	5
P	:	probabilitas	6
$E(T^k)$	:	fungsi pembangkit momen	6
$\hat{f_t}(s)$	:	transformasi Laplace	8
λ	:	waktu hidup	9
$R_T(t)$	:	reliabilitas	13
$\lambda(t)$	:	laju kegagalan	14
$E(T)$	:	mean	24
$Var(T)$	:	variansi	25
$Cov(T_1, T_2)$	:	kovarian	30
$Std(T)$	:	standar deviasi	34

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam kehidupan sehari - hari banyak dijumpai berbagai jenis sistem yang terdiri dari beberapa komponen. Beberapa contoh sistem yang sering dijumpai antara lain peralatan-peralatan seperti mobil dengan komponen antara lain (pedal gas, mesin mobil, roda penggerak), dan komputer dengan komponen antara lain (keyboard, CPU komputer, layar monitor). Komponen-komponen dalam sistem tersebut biasanya saling berinteraksi satu sama lain.

Baik tidaknya kinerja suatu sistem dapat dilihat dari ketahanan dan kehandalan waktu hidup (*reliability*) pada sistem tersebut. Kinerja sistem biasanya tergantung dari kinerja komponennya. Menurut Miller (1985), kehandalan waktu hidup (*reliability*) didefinisikan sebagai suatu peluang bahwa suatu sistem atau komponen akan beroperasi selama rentang waktu tertentu, jika sistem tersebut dioperasikan pada kondisi yang disarankan.

Secara matematis, reliabilitas variabel acak kontinu T dalam rentang waktu t dinyatakan sebagai :

$$R_T(t) = P(T > t)$$

Semakin tinggi nilai reliabilitas kinerja dari suatu sistem maka komponen dalam sistem tersebut akan bekerja secara optimal. Komponen-komponen yang terdapat dalam suatu sistem mungkin bisa saling independen atau tidak saling independen.

Dalam kasus nyata, seperti bidang mesin, sering terjadi gangguan terhadap komponen seperti adanya getaran yang ditimbulkan saat mesin sedang beroperasi akibat dari pengoperasian mesin itu sendiri. Akibatnya , banyak komponen yang tidak bekerja semestinya. Diperlukan suatu perhitungan untuk memperkirakan kinerja dari komponen pada mesin yang sedang beroperasi agar komponen tersebut dapat bekerja optimal. Dengan teori analisis reliabilitas yang telah dijelaskan sebelumnya, akan ditentukan suatu model reliabilitas untuk mengetahui sifat-sifat dari masing-masing komponen agar dapat diketahui ketahanan komponen dalam suatu sistem pada mesin tersebut.

Banyak peneliti yang menggunakan beberapa jenis distribusi pada bidang statistika dalam menentukan suatu reliabilitas, antara lain distribusi eksponensial, distribusi normal, distribusi gamma, dan lain sebagainya. Beberapa peneliti yang telah membahas tentang konsep pengkajian reliabilitas menggunakan distribusi kontinu, antara lain Sulong (2013) yang membahas tentang sifat-sifat reliabilitas sistem dengan komponen yang dapat ditukar dan Hanagal (2010) yang membahas tentang estimasi reliabilitas tekanan sebuah komponen subjektif dengan distribusi eksponensial.

Skripsi ini membahas sifat-sifat waktu hidup komponen-komponen dalam sistem dengan 2 komponen dengan menggunakan distribusi eksponensial bivariat apabila waktu hidup komponen - komponennya dependen.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka perumusan masalah yang akan dikaji adalah bagaimana sifat-sifat waktu hidup komponen-komponen dalam sistem dengan 2 komponen dengan menggunakan distribusi eksponensial bivariat apabila waktu hidup komponen - komponennya dependen?

1.3 Pembatasan Masalah

Agar pemecahan masalah tidak menyimpang dari ruang lingkup pengkajian, maka perlu dilakukan pembatasan masalah. Adapun pembatasan masalah dalam penulisan ini adalah:

1. Sifat-sifat waktu hidup komponen yang akan dibahas meliputi fungsi kumulatif, fungsi densitas, fungsi pembangkit momen, dan transformasi Laplace,
2. Distribusi yang digunakan adalah distribusi eksponensial bivariat,
3. Waktu hidup komponen dalam sistem adalah dependen dan tidak berupa interval.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan yang ingin dicapai dalam skripsi ini adalah menentukan sifat-sifat waktu hidup komponen-komponen dalam sistem dengan 2 komponen dengan menggunakan distribusi eksponensial bivariat.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari skripsi ini adalah memperoleh sifat-sifat waktu hidup komponen-komponen dalam sistem dengan 2 komponen dengan menggunakan distribusi eksponensial bivariat.

1.6 Metode Penelitian

Skripsi ini merupakan kajian teori dalam bidang matematika pemodelan yang didasarkan pada buku-buku dan jurnal-jurnal tentang teori permasalahan di bidang pemodelan matematika dan statistika reliabilitas. Referensi utama yang digunakan salah satunya adalah buku dari Richard E. Barlow dan Frank Proschan serta beberapa jurnal yaitu *Conditional Distribution and Reliability Analysis with Marshall-Olkin Bivariate Exponential Distribution* dan *Estimation of Reliability of A Component Subjected to Bivariate Exponential Stress.*

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas beberapa konsep yang akan digunakan dalam pembahasan, yaitu variabel acak kontinu, distribusi bersama variabel acak kontinu, distribusi eksponensial, transformasi Laplace, dan reliabilitas.

2.1 Variabel Acak Kontinu

Misalkan T adalah waktu hidup dari sebuah komponen pada sebuah sistem.

Definisi 2.1.1. Variabel acak T dikatakan kontinu jika fungsi distribusi kumulatifnya dapat dinyatakan oleh

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^{t} f_T(s)ds, t > 0, \tag{2.1}$$

untuk suatu fungsi non negatif f_T yang terintegralkan. Fungsi f_T ini dinamakan fungsi densitas probabilitas dari variabel acak T.

Sifat-sifat dari $f_T(t)$ antara lain adalah

1. Fungsi f_T merupakan derivatif dari F_T, yaitu

$$f_T(t) = \frac{d}{dt}F_T(t), \tag{2.2}$$

2.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)dt = 1, \tag{2.3}$$

3. Fungsi $f_T(t)$ adalah kontinu sebagian-sebagian,

4. Probabilitas

$$P(a < T < b) = \int_a^b f_T(t)dt = F_T(b) - F_T(a) \tag{2.4}$$

Karena

$$\begin{aligned} P(a < T < b) &= \int_a^b f_T(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^b f_T(t)dt - \int_{-\infty}^a f_T(t)dt \\ &= F_T(b) - F_T(a). \end{aligned}$$

Untuk variabel acak kontinu berlaku juga

$$P(a < T < b) = P(a \leq T < b) = P(a < T \leq b) = P(a \leq T \leq b).$$

Definisi 2.1.2. Fungsi pembangkit momen dari variabel acak kontinu T didefinisikan sebagai
$$M_T(u) = E(e^{ut}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ut} f_T(t)dt \tag{2.5}$$

Definisi 2.1.3. Misalkan T sebagai variabel acak kontinu dengan fungsi pembangkit momen $M_T(u)$. Maka pada saat $u = 0$ berlaku

$$E(T^k) = \frac{d^k}{du^k} M_T(u)|_{u=0} \tag{2.6}$$

2.2 Distribusi Bersama Variabel Acak Kontinu

Misalkan T_1 dan T_2 masing - masing waktu hidup dari komponen 1 dan komponen 2 dari sebuah sistem.

Definisi 2.2.1. Variabel acak T_1 dan T_2 dikatakan kontinu jika fungsi distribusi kumulatif bersamanya dapat dinyatakan oleh

$$F_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = P(T_1 \le t_1, T_2 \le t_2) = \int_{-\infty}^{t_2}\int_{-\infty}^{t_1} f_{T_1,T_2}(s_1,s_2)ds_1 ds_2. \tag{2.7}$$

Dalam kasus kontinu berlaku

$$\begin{aligned} P(a < T_1 < b, c < T_2 < d) &= P(a \le T_1 < b, c \le T_2 < d) \\ &= P(a < T_1 \le b, c < T_2 \le d) \\ &= P(a \le T_1 \le b, c \le T_2 \le d) \end{aligned}$$

Sifat dari *PDF* bersama pada dua variabel acak kontinu yang saling independen memenuhi

$$\begin{aligned} f_{T_1,T_2}(t_1,t_2) &= \frac{d^2}{dt_1 dt_2} F_{T_1,T_2}(t_1,t_2) \\ &= \frac{d}{dt_1} F_{T_1}(t_1) \cdot \frac{d}{dt_2} F_{T_2}(t_2) \\ &= f_{T_1}(t_1) f_{T_2}(t_2). \end{aligned}$$

Sifat dari *CDF* bersama pada dua variabel acak kontinu yang saling independen memenuhi

$$\begin{aligned}
F_{T_1,T_2}(t_1,t_2) &= \int_{-\infty}^{t_2}\int_{-\infty}^{t_1} f_{T_1,T_2}(s_1,s_2)ds_1ds_2 \\
&= \int_{-\infty}^{t_1} f_{T_1}(s_1)ds_1 \cdot \int_{-\infty}^{t_2} f_{T_2}(s_2)ds_2 \\
&= P(T_1 \leq t_1)P(T_2 \leq t_2) \\
&= F_{T_1}(t_1)F_{T_2}(t_2).
\end{aligned}$$

Sifat dari fungsi pembangkit momen bersama dua variabel acak kontinu yang saling independen memenuhi

$$\begin{aligned}
M_{T_1,T_2}(u_1,u_2) &= E(e^{u_1t_1+u_2t_2}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{u_1t_1+u_2t_2} f_{T_1,T_2}(t_1,t_2)dt_1dt_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{u_1t_1} f_{T_1}(t_1)dt_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{u_2t_2} f_{T_2}(t_2)dt_2 \\
&= M_{T_1}(u_1)M_{T_2}(u_2)
\end{aligned}$$

dan pada saat $u_1 = 0$ dan $u_2 = 0$ berlaku

$$E(T_1^kT_2^l) = \frac{d^{k+l}}{du_1^kdu_2^l} M_{T_1T_2}(u_1,u_2)|_{u_1=u_2=0}.$$

2.3 Transformasi Laplace

Definisi 2.3.1. Diberikan $f_T(t)$ fungsi kontinu pada $[0,\infty)$. Transformasi Laplace dari fungsi f_T didefinisikan oleh

$$\hat{f}_T(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_T(t)dt \tag{2.8}$$

Daerah asal dari $\hat{f}_T(s)$ adalah semua nilai dari s yang mana integral tersebut ada. Sebagai catatan bahwa integral tersebut merupakan integral tak wajar. Lebih tepatnya diberikan oleh

$$\begin{aligned}\hat{f}_T(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f_T(t)dt \\ &= \lim_{N\longrightarrow\infty} \int_0^N e^{-st} f_T(t)dt\end{aligned}$$

jika limitnya ada. Sifat dari transformasi Laplace bersama dari fungsi $f(s_1, s_2)$ yang saling independen adalah

$$\begin{aligned}\hat{f}_{T_1,T_2}(s_1, s_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s_1t_1-s_2t_2} f_{T_1,T_2}(t_1, t_2)dt_1dt_2 \\ &= \int_0^\infty e^{-s_1t_1} f_{T_1}(t_1)dt_1 \cdot \int_0^\infty e^{-s_2t_2} f_{T_2}(t_2)dt_2 \\ &= \hat{f}_{T_1}(s_1)\hat{f}_{T_2}(s_2).\end{aligned}$$

2.4 Distribusi Eksponensial

Definisi 2.4.1. Variabel acak kontinu T dikatakan berdistribusi eksponensial jika fungsi densitas probabilitasnya dapat dinyatakan sebagai

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \tag{2.9}$$

dengan $\lambda > 0$, dan $t > 0$ dan $f_T(t) = 0$ untuk $t \leq 0$.

Fungsi distribusi kumulatif eksponesial dari T adalah

$$\begin{aligned}F_T(t) &= \int_0^t f_T(t)dt \\ &= 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0\end{aligned}$$

Fungsi pembangkit momen eksponesial dari T adalah

$$
\begin{aligned}
M_T(u) &= \int_0^\infty e^{ut} f_T(t)dt \\
&= \lambda e^{ut} e^{-\lambda t} \\
&= \lambda e^{-(\lambda - u)t}, \quad \lambda - u > 0 \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - u}, \quad u < \lambda.
\end{aligned}
$$

Transformasi Laplace eksponensial dari T adalah

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_T(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f_T(t)dt \\
&= \lambda e^{-st} e^{-\lambda t} \\
&= \lambda e^{-(s+\lambda)t}, \quad s + \lambda > 0 \\
&= \frac{\lambda}{s + \lambda}, \quad s < -\lambda.
\end{aligned}
$$

2.5 Distribusi Eksponensial Bivariat untuk Kasus Independen

Distribusi eksponensial bivariat merupakan distribusi dengan 2 parameter, dengan kata lain 2 variabel yang diamati. Misalkan T_1 dan T_2 berturut - turut adalah variabel acak yang berdistribusi eksponensial dengan parameter $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 > 0$ dengan fungsi probabilitas densitasnya adalah

$$f_{T_1}(t_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1}, \tag{2.10}$$

dan

$$f_{T_2}(t_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2}. \tag{2.11}$$

Jika T_1 dan T_2 saling independen maka fungsi densitas bersama dari T_1 dan T_2 adalah

$$\begin{aligned} f_{T_1,T_2}(t_1,t_2) &= f_{T_1}(t_1)f_{T_2}(t_2) \\ &= (\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1}) \cdot (\lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2}) \\ &= \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2}, \end{aligned}$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, dan $t_1, t_2 > 0$. Fungsi distribusi kumulatif bersama dari T_1 dan T_2 adalah

$$\begin{aligned} F_{T_1,T_2}(t_1,t_2) &= F_{T_1}(t_1)F_{T_2}(t_2) \\ &= (1 - e^{-\lambda_1 t_1}) \cdot (1 - e^{-\lambda_2 t_2}) \\ &= 1 - e^{-\lambda_1 t_1} - e^{-\lambda_2 t_2} + e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2}, \quad t_1, t_2 > 0 \end{aligned}$$

Fungsi pembangkit momen bersama dari T_1 dan T_2 adalah

$$\begin{aligned} M_{T_1,T_2}(u_1,u_2) &= M_{T_1}(u_1)M_{T_2}(u_2) \\ &= (\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - u_1}) \cdot (\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - u_2}) \\ &= \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 - u_1)(\lambda_2 - u_2)}, \quad u_1 < \lambda_1; \quad u_2 < \lambda_2. \end{aligned}$$

Transformasi Laplace bersama dari T_1 dan T_2 adalah

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_{T_1,T_2}(s_1,s_2) &= \hat{f}_{T_1}(s_1)\hat{f}_{T_2}(s_2) \\
&= (\frac{\lambda_1}{s_1+\lambda_1})\cdot(\frac{\lambda_2}{s_2+\lambda_2}) \\
&= \frac{\lambda_1\lambda_2}{(s_1+\lambda_1)(s_2+\lambda_2)}, \quad s_1 < -\lambda_1; \quad s_2 < -\lambda_2.
\end{aligned}
$$

2.6 Reliabilitas

Reliabilitas atau keandalan dapat didefinisikan sebagai nilai probabilitas bahwa suatu komponen dalam sistem akan sukses menjalani fungsinya, dalam jangka waktu tertentu dan kondisi operasi yang disarankan. Keandalan dapat dirumuskan sebagai integral dari distribusi probabilitas suksesnya operasi suatu komponen dalam sistem, sejak waktu mulai beroperasi (*switch on*) sampai dengan terjadinya kegagalan (*failure*) pertama. Reliabilitas dapat diukur dengan berbagai cara yang berbeda, tergantung pada situasi tertentu, misalnya:

1. Probabilitas bahwa komponen tidak rusak dalam interval waktu $(0, t]$ (probabilitas hidup).
2. Ekspektasi waktu kegagalan atau *Mean Time to Failure* (MTTF).
3. Probabilitas bahwa komponen dapat berfungsi pada waktu t (availabilitas pada waktu t).

2.6.1 Waktu Kegagalan

Waktu kegagalan dari sebuah komponen diartikan sebagai waktu yang dilalui sejak komponen mulai berfungsi hingga komponen tersebut rusak untuk yang pertama kalinya. Titik waktu awal yang ditentukan adalah $t = 0$. Sebelumnya telah dibahas bahwa variabel acak T berdistribusi kontinu, sehingga fungsi densitas probabilitas untuk waktu kegagalan didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} f_T(t) = \frac{d}{dt}F_T(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_T(t+\Delta t) - F_T(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{\Delta t}. \end{aligned}$$

2.6.2 Fungsi Reliabilitas

Definisi 2.6.1. Fungsi reliabilitas dari variabel acak kontinu T didefinisikan sebagai

$$R_T(t) = P(T > t) \tag{2.12}$$

Hubungan antara fungsi reliabilitas dan fungsi distribusi kumulatif diberikan oleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)dt = P(T \leq t) + P(T > t) = F_T(t) + R_T(t).$$

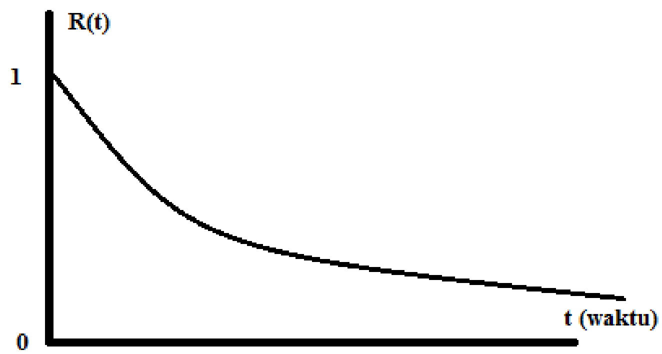
Contoh: Diberikan fungsi reliabilitas sebagai berikut :

$$R_T(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & ; t \geq 0, \\ 0 & ; t < 0. \end{cases}$$

fungsi reliabilitas tersebut juga dapat diamati melalui grafik. Seperti yang ditunjukkan oleh grafik fungsi reliabilitas dibawah ini Berdasarkan grafik tersebut, dapat disimpulkan bahwa fungsi reliabilitas memiliki beberapa sifat, yaitu :

1. Grafik tidak monoton naik,

2. Nilai dari $R(0) = 1$ dan $R(\infty) = 0$, dan



Gambar 2.1: Grafik fungsi reliabilitas

3. Saat kondisi komponen masih baru, komponen tersebut mampu mengeluarkan kinerja maksimal. Namun semakin lama komponen tersebut digunakan, maka kinerja komponen tersebut semakin berkurang.

2.6.3 Fungsi Laju Kegagalan

Probabilitas bahwa sebuah komponen akan rusak dalam interval waktu $(t, t + \Delta t]$ apabila diketahui bahwa komponen tersebut berfungsi pada waktu t adalah

$$P(t < T \leq t + \Delta t | T > t) = \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} = \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{R_T(t)}$$

Dengan membagi probabilitas tersebut oleh panjang interval waktu Δt, dan mengambil $\Delta t \to 0$, maka didapat fungsi laju kegagalan $\lambda(t)$ komponen adalah

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{R_T(t)} \frac{1}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{\Delta t} \frac{1}{R_T(t)} \\
&= \frac{f_T(t)}{R_T(t)}.
\end{aligned}$$

2.6.4 Ekspektasi Waktu Kegagalan

Ekspektasi waktu kegagalan dari sebuah komponen didefinisikan oleh

$$E(T) = \int_0^\infty t f_T(t) dt. \tag{2.13}$$

Karena

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = \frac{d}{dt}(1 - R_T(t)) = -R'_T(t),$$

maka

$$E(T) = -\int_0^\infty t R'_T(t) dt.$$

Dengan menggunakan integral parsial, diperoleh

$$\begin{aligned}
E(T) &= -\int_0^\infty t R'_T(t) dt \\
&= -[[t R_T(t)]_0^\infty - \int_0^\infty R_T(t) dt] \\
&= -[t R_T(t)]_0^\infty + \int_0^\infty R_T(t) dt
\end{aligned}$$

Jika E(T) $< \infty$, maka $[tR_T(t)]_0^\infty = 0$, sehingga

$$E(T) = \int_0^\infty R_T(t)dt. \tag{2.14}$$

Selain itu, $E(T)$ dari sebuah komponen juga dapat ditemukan dengan menggunakan transformasi Laplace. Transformasi Laplace dari fungsi reliabilitas $R_T(t)$ adalah

$$\hat{f}_T(s) = \int_0^\infty e^{-st} R_T(t)dt$$

Untuk $s = 0$, diperoleh

$$\hat{f}_T(0) = \int_0^\infty R_T(t)dt = E(T)$$

Jadi, $E(T)$ dapat dicari dengan menggunakan transformasi Laplace $\hat{f}_T(s)$ dari fungsi reliabilitas $R_T(t)$, dengan menetapkan $s = 0$.

2.6.5 Reliabilitas Sistem dengan Komponen Independen

Fungsi reliabilitas bersama dari variabel acak kontinu T_1 dan T_2 yang saling independen memenuhi

$$\begin{aligned} R_{T_1,T_2}(s_1, s_2) &= P(T_1 > s_1, T_2 > s_2) \\ &= e^{-(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2)} \\ &= e^{-\lambda_1 s_1 - \lambda_2 s_2} \\ &= e^{-\lambda_1 s_1} \cdot e^{-\lambda_2 s_2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P(T_1 > s_1)P(T_2 > s_2) \\
&= R_{T_1}(s_1)R_{T_2}(s_2).
\end{aligned}
$$

BAB III

PEMBAHASAN

Pada analisis reliabilitas, sering dijumpai bahwa lama waktu hidup komponen tidak saling independen. Ketidakindependenan lama waktu hidup dapat disebabkan misalnya oleh adanya gangguan dari luar sistem. Distribusi bersama dari lama waktu hidup komponen dapat mengikuti suatu distribusi tertentu.

Pada bab ini akan dibahas tentang lama waktu hidup sistem dengan dua komponen yang tidak saling independen dan berdistribusi eksponensial bivariat.

3.1 Distribusi Eksponensial Bivariat untuk Kasus Dependen

Misalkan T_1 dan T_2 masing-masing adalah lama waktu hidup komponen 1 dan komponen 2 dari sebuah sistem. Variabel acak T_1 dan T_2 dikatakan memiliki distribusi bersama eksponensial bivariat jika fungsi survival bersamanya berbentuk persamaan (Barlow, Richard. E dan Frank Proschan, 1975)

$$R(t_1, t_2) = P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} \text{maks}(t_1, t_2)} \tag{3.1}$$

dimana $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_{12} > 0$, $t_1 \geq 0$, dan $t_2 \geq 0$.

3.1.1 Reliabilitas Marginal/Fungsi Survival

Untuk menentukan fungsi distribusi kumulatif marginal dari T_1 dan T_2 dapat diperoleh terlebih dahulu dengan menentukan fungsi survival marginal dari T_1 dan T_2. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} R(t_1,0) &= P(T_1 > t_1, T_2 > 0) \\ &= P(T_1 > t_1) \\ &= R_{T_1}(t_1) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} R(0,t_2) &= P(T_1 > 0, T_2 > t_2) \\ &= P(T_2 > t_2) \\ &= R_{T_2}(t_2). \end{aligned}$$

Jadi

$$R_{T_1}(t_1) = R(t_1,0) \qquad \text{dan} \qquad R_{T_2}(t_2) = R(0,t_2). \tag{3.2}$$

Dengan hasil di atas jika pada persamaan (3.1) $t_2 = 0$ diperoleh

$$\begin{aligned} R_{T_1}(t_1) &= R(t_1,0) \\ &= e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 (0) - \lambda_{12} \text{maks}(t_1,0)} \\ &= e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_{12} t_1} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1}. \end{aligned}$$

Secara serupa diperoleh

$$\begin{aligned} R_{T_2}(t_2) &= R(0, t_2) \\ &= e^{-\lambda_1(0)-\lambda_2 t_2-\lambda_{12}\text{maks}(0,t_2)} \\ &= e^{-\lambda_2 t_2-\lambda_{12} t_2} \\ &= e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}. \end{aligned}$$

3.1.2 Fungsi Distribusi Kumulatif Marginal dan Fungsi Distribusi Kumulatif Bersama

Pada bagian sebelumnya telah diperoleh $R_{T_1}(t_1)$ dan $R_{T_2}(t_2)$. Fungsi ditribusi kumulatif marginal dari T_1 dan T_2 dapat diperoleh sebagai berikut

$$F_{T_1}(t_1) = 1 - R_{T_1}(t_1) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1} \tag{3.3}$$

dan

$$F_{T_2}(t_2) = 1 - R_{T_2}(t_2) = 1 - e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}. \tag{3.4}$$

Untuk menentukan fungsi distribusi kumulatif bersama dari T_1 dan T_2 dapat menggunakan persamaan (Barlow, Richard. E dan Frank Proschan, 1975)

$$P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = R(t_1, t_2) = 1 - F_{T_1}(t_1) - F_{T_2}(t_2) + F(t_1, t_2). \tag{3.5}$$

Dengan menggunakan persamaan tersebut dan melakukan substitusi persamaan (3.1), (3.3) dan (3.4) pada persamaan (3.5) diperoleh fungsi distribusi kumulatif bersama dari T_1 dan T_2 yaitu

$$\begin{aligned} F(t_1,t_2) &= R(t_1,t_2)+F_{T_1}(t_1)+F_{T_2}(t_2)-1 \\ &= e^{-\lambda_1 t_1-\lambda_2 t_2-\lambda_{12}\text{maks}(t_1,t_2)}+1-e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1}+1-e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}-1 \\ &= e^{-\lambda_1 t_1-\lambda_2 t_2-\lambda_{12}\text{maks}(t_1,t_2)}-e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1}-e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}+1, t_1\geq 0, t_2\geq 0. \end{aligned}$$

3.1.3 Fungsi Densitas Marginal dan Fungsi Densitas Bersama

Fungsi densitas dari T_1 dapat diperoleh dari derivatif pertama fungsi kumulatifnya. Fungsi densitas marginal dari T_1 adalah

$$f_{T_1}(t_1)=\frac{dF_{T_1}(t_1)}{dt_1}=(\lambda_1+\lambda_{12})e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1}, t_1\geq 0. \tag{3.6}$$

Dari persamaan ini dapat disimpulkan bahwa T_1 berdistribusi eksponensial dengan parameter $\lambda_1+\lambda_{12}$. Secara serupa diperoleh

$$f_{T_2}(t_2)=\frac{dF_{T_2}(t_2)}{dt_2}=(\lambda_2+\lambda_{12})e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}, t_2\geq 0. \tag{3.7}$$

Jadi, fungsi densitas marginal dari T_2 juga berdistribusi eksponensial dengan parameter $\lambda_2+\lambda_{12}$.

Fungsi densitas bersama dari T_1 dan T_2 tidak dapat ditentukan dengan persamaan

$$f(t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

Hal ini karena untuk kasus $t_1>t_2$, $F(t_1,t_2)$ berbentuk

$$F(t_1,t_2)=e^{-\lambda_1 t_1-\lambda_2 t_2-\lambda_{12}t_1}-e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1}-e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}+1.$$

Sebagai akibatnya

$$\lim_{t_2 \to t_1^-} f(t_1,t_2) = \lim_{t_2 \to t_1^-} \frac{\partial^2 F(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = [\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_{12})] \ e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_1 - \lambda_{12} t_1}$$

Sebaliknya untuk kasus $t_1 < t_2$, $F(t_1,t_2)$ berbentuk

$$F(t_1,t_2) = e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} t_2} - e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1} - e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2} + 1.$$

Sebagai akibatnya

$$\lim_{t_2 \to t_1^+} f(t_1,t_2) = \lim_{t_2 \to t_1^+} \frac{\partial^2 F(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = [\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_{12})] \ e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_1 - \lambda_{12} t_1}$$

Ternyata dari kedua kasus tersebut diperoleh hasil yang berbeda sehingga dapat disimpulkan bahwa $\lim_{t_2 \to t_1^-} f(t_1,t_2) \neq \lim_{t_2 \to t_1^+} f(t_1,t_2)$. Dengan demikian $f(t_1,t_2)$ tidak ada.

3.1.4 Fungsi Laju Kegagalan

Fungsi laju kegagalan T_1 dan T_2 yaitu

$$\begin{aligned} \lambda_{T_1}(t_1) &= \frac{f_{T_1}(t_1)}{R_{T_1}(t_1)} \\ &= \frac{(\lambda_1+\lambda_{12})e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1}} \\ &= \lambda_1+\lambda_{12}, \lambda_1 > 0, \lambda_{12} > 0. \end{aligned}$$

Secara serupa diperoleh

$$\lambda_{T_2}(t_2) = \frac{f_{T_2}(t_2)}{R_{T_2}(t_2)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(\lambda_2+\lambda_{12})e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}}{e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}} \\
&= \lambda_2+\lambda_{12}, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > 0.
\end{aligned}
$$

3.2 Sifat-sifat Distribusi Eksponensial Bivariat untuk Kasus Dependen

Pada pembahasan sebelumnya, telah didapatkan beberapa distribusi marginal dari distrbusi eksponensial bivariat untuk reliabilitas pada kasus dependen. Distribusi-distribusi marginal tersebut diantaranya

1. $f_{T_1}(t_1) = (\lambda_1+\lambda_{12})e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1}, \lambda_1 > 0, \lambda_{12} > 0, t_1 \geq 0.$
2. $f_{T_2}(t_2) = (\lambda_2+\lambda_{12})e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > 0, t_2 \geq 0.$
3. $F_{T_1}(t_1) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1}, \lambda_1 > 0, \lambda_{12} > 0, t_1 \geq 0.$
4. $F_{T_2}(t_2) = 1 - e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > 0, t_2 \geq 0.$
5. $P[T_1 > t_1] = R_{T_1}(t_1) = e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1}, \lambda_1 > 0, \lambda_{12} > 0, t_1 \geq 0.$
6. $P[T_2 > t_2] = R_{T_2}(t_2) = e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > 0, t_2 \geq 0.$

3.2.1 Mean dan Variansi

Berdasarkan distribusi marginal dari fungsi-fungsi tersebut dan dengan menggunakan distribusi eksponensial bivariat, dapat ditentukan juga mean dan variansi untuk kasus dependen. Meannya dari T_1 dan T_2 adalah

$$
\begin{aligned}
E(T_1) &= \int_0^\infty t_1 f_{T_1}(t_1) dt_1 \\
&= \int_0^\infty t_1[-(\lambda_1+\lambda_{12})e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1}]dt_1 \\
&= \frac{1}{-(\lambda_1+\lambda_{12})}[-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1 - 1]e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1}|_0^\infty \\
&= \frac{-1}{-(\lambda_1+\lambda_{12})} \\
&= \frac{1}{\lambda_1+\lambda_{12}}
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
E(T_2) &= \int_0^\infty t_2 f_{T_2}(t_2) dt_2 \\
&= \int_0^\infty t_2[-(\lambda_2+\lambda_{12})e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}]dt_2 \\
&= \frac{1}{-(\lambda_2+\lambda_{12})}[-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2 - 1]e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}|_0^\infty \\
&= \frac{-1}{-(\lambda_2+\lambda_{12})} \\
&= \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{12}}
\end{aligned}
$$

Sedangkan $E(T_1^2)$ dan $E(T_2^2)$ yang merupakan momen dari T_1 dan T_2 adalah

$$
\begin{aligned}
E(T_1^2) &= \int_0^\infty t_1^2 f_{T_1}(t_1) dt_1 \\
&= \int_0^\infty t_1^2[-(\lambda_1+\lambda_{12})e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1}]dt_1 \\
&= \frac{-2}{-(\lambda_1+\lambda_{12})^2}[-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1 - 1]e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1}|_0^\infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{-(\lambda_1+\lambda_{12})^2} \\
&= \frac{2}{(\lambda_1+\lambda_{12})^2}
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
E(T_2^2) &= \int_0^\infty t_2^2 f_{T_2}(t_2)dt_2 \\
&= \int_0^\infty t_2^2[-(\lambda_2+\lambda_{12})e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}]dt_2 \\
&= \frac{-2}{-(\lambda_2+\lambda_{12})^2}[-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2-1]e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}|_0^\infty \\
&= \frac{2}{-(\lambda_2+\lambda_{12})^2} \\
&= \frac{2}{(\lambda_2+\lambda_{12})^2}
\end{aligned}
$$

Variansinya dari T_1 dan T_2 adalah

$$
\begin{aligned}
Var(T_1) &= E(T_1^2)-[E(T_1)]^2 \\
&= \frac{2}{(\lambda_1+\lambda_{12})^2}-[\frac{1}{\lambda_1+\lambda_{12}}]^2 \\
&= \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_{12})^2}
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
Var(T_2) &= E(T_2^2)-[E(T_2)]^2 \\
&= \frac{2}{(\lambda_2+\lambda_{12})^2}-[\frac{1}{\lambda_2+\lambda_{12}}]^2 \\
&= \frac{1}{(\lambda_2+\lambda_{12})^2}
\end{aligned}
$$

Karena mean dan varians dari T_1 dan T_2 telah diperoleh, maka selanjutnya adalah menentukan transformasi Laplace dan kovarian dengan menggunakan hasil tersebut.

3.2.2 Transformasi Laplace

Berdasarkan hasil yang telah didapat sebelumnya, untuk menentukan transformasi Laplace dari distribusi eksponensial bivariat digunakan teorema (Barlow, Richard. E dan Frank Proschan, 1975) sebagai berikut :

Teorema 3.2.1. Jika F adalah fungsi distribusi kumulatif bersama dan G fungsi ditribusi eksponensial demikian sehingga $G(0,y) \equiv 0 \equiv G(x,0)$, maka

$$\int_0^\infty \int_0^\infty G(x,y)dF(x,y) = \int_0^\infty \int_0^\infty R(x,y)dG(x,y). \tag{3.8}$$

Dengan menggunakan teorema tersebut diperoleh transformasi Laplace dari $F(t_1,t_2)$ adalah

$$\hat{F}_{T_1T_2}(s_1,s_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s_1t_1-s_2t_2}dF(t_1,t_2)$$

Dengan memisalkan $G(t_1,t_2) = e^{-s_1t_1-s_2t_2}$, maka dengan menggunakan rumus (3.8) dan (3.1) diperoleh

$$
\begin{aligned}
\hat{F}_{T_1T_2}(s_1,s_2) &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda_1 t_1-\lambda_2 t_2-\lambda_{12}\text{maks}(t_1,t_2)}d(e^{-s_1t_1-s_2t_2}) \\
&= \int_{t_2=0}^\infty\int_{t_1=0}^{t_2} e^{-\lambda_1 t_1-\lambda_2 t_2-\lambda_{12}t_1}d(e^{-s_1t_1-s_2t_2}) \\
&+ \int_{t_1=0}^\infty\int_{t_2=0}^{t_1} e^{-\lambda_1 t_1-\lambda_2 t_2-\lambda_{12}t_2}d(e^{-s_1t_1-s_2t_2}) \\
&= \int_{t_2=0}^\infty\int_{t_1=0}^{t_2}(\lambda_1+\lambda_{12})e^{-(\lambda_1+\lambda_{12}+s_1)t_1}\cdot e^{-(\lambda_2+s_2)t_2}dt_1dt_2 \\
&+ \int_{t_1=0}^\infty\int_{t_2=0}^{t_1}(\lambda_2+\lambda_{12})e^{-(\lambda_2+\lambda_{12}+s_2)t_2}\cdot e^{-(\lambda_1+s_1)t_2}dt_2dt_1 \\
&= \int_{t_2=0}^\infty \frac{(\lambda_1+\lambda_{12})}{(\lambda_1+\lambda_{12}+s_1)}e^{-(\lambda_1+\lambda_{12}+s_1+\lambda_2+s_2)t_2}dt_2 \\
&+ \int_{t_1=0}^\infty \frac{(\lambda_2+\lambda_{12})}{(\lambda_2+\lambda_{12}+s_2)}e^{-(\lambda_2+\lambda_{12}+s_2+\lambda_1+s_1)t_1}dt_1 \\
&= \int_{t_2=0}^\infty \frac{(\lambda_1+\lambda_{12})}{(\lambda_1+\lambda_{12}+s_1)}e^{-(\lambda_1+\lambda_{12}+s_1+\lambda_2+s_2)t_2}-\frac{(\lambda_1+\lambda_{12})}{(\lambda_1+\lambda_{12}+s_1)}dt_2 \\
&+ \int_{t_1=0}^\infty \frac{(\lambda_2+\lambda_{12})}{(\lambda_2+\lambda_{12}+s_2)}e^{-(\lambda_2+\lambda_{12}+s_2+\lambda_1+s_1)t_1}-\frac{(\lambda_2+\lambda_{12})}{(\lambda_2+\lambda_{12}+s_2)}dt_1 \\
&= \int_{t_2=0}^\infty \frac{(\lambda_1+\lambda_{12})}{(\lambda_1+\lambda_{12}+s_1)}e^{-(\lambda+s_1+s_2)t_2}-\frac{(\lambda_1+\lambda_{12})}{(\lambda_1+\lambda_{12}+s_1)}dt_2 \\
&+ \int_{t_1=0}^\infty \frac{(\lambda_2+\lambda_{12})}{(\lambda_2+\lambda_{12}+s_2)}e^{-(\lambda+s_1+s_2)t_1}-\frac{(\lambda_2+\lambda_{12})}{(\lambda_2+\lambda_{12}+s_2)}dt_1 \\
&= \frac{(\lambda_1+\lambda_{12})}{(\lambda_1+\lambda_{12}+s_1)}\cdot\frac{1}{(\lambda+s_1+s_2)}-\frac{(\lambda_1+\lambda_{12})}{(\lambda_1+\lambda_{12}+s_1)} \\
&+ \frac{(\lambda_2+\lambda_{12})}{(\lambda_2+\lambda_{12}+s_2)}\cdot\frac{1}{(\lambda+s_1+s_2)}-\frac{(\lambda_2+\lambda_{12})}{(\lambda_2+\lambda_{12}+s_2)} \\
&= \frac{(\lambda_1+\lambda_{12})(\lambda_2+\lambda_{12})(\lambda+s_1+s_2)+(-s_1)(-s_2)[\lambda-(\lambda_1+\lambda_2)]}{(\lambda+s_1+s_2)(\lambda_1+\lambda_{12}+s_1)(\lambda_2+\lambda_{12}+s_2)} \\
&= \frac{(\lambda+s_1+s_2)(\lambda_1+\lambda_{12})(\lambda_2+\lambda_{12})+s_1s_2\lambda_{12}}{(\lambda+s_1+s_2)(\lambda_1+\lambda_{12}+s_1)(\lambda_2+\lambda_{12}+s_2)}.
\end{aligned}
$$

3.2.3 Kovarian

Berdasarkan hasil dari transformasi Laplace sebelumnya, untuk menentukan kovarian dari T_1 dan T_2 adalah dengan menderivatifkan hasil transformasi Laplace dan mengganti $s_1 = s_2 = 0$. Untuk mencari $\frac{\partial \hat{F}(s_1,s_2)}{\partial s_1}$, misalkan

$$u = (\lambda + s_1 + s_2)(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12}) + s_1 s_2 \lambda_{12}$$

dan

$$v = (\lambda + s_1 + s_2)(\lambda_1 + \lambda_{12} + s_1)(\lambda_2 + \lambda_{12} + s_2)$$

maka

$$u' = (\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12}) + s_2 \lambda_{12}$$

dan

$$v' = (\lambda_2 + \lambda_{12} + s_2)(\lambda_1 + \lambda_{12} + 2s_1 + \lambda + s_2).$$

Sebagai akibatnya

$$\frac{\partial \hat{F}(s_1, s_2)}{\partial s_1} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\lambda + s_1 + s_2)(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12})(\lambda_1 + \lambda_{12} + s_1 + s_2\lambda_{12} - 1)}{(\lambda_2 + \lambda_{12} + s_2)[(\lambda + s_1 + s_2)(\lambda_1 + \lambda_{12} + s_1)]^2} \\ &+ \frac{(s_1 s_2)(\lambda_1 + \lambda_{12} + 2s_1 + \lambda + s_2)}{(\lambda_2 + \lambda_{12} + s_2)[(\lambda + s_1 + s_2)(\lambda_1 + \lambda_{12} + s_1)]^2} \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk mencari $\frac{\partial^2 \hat{F}(s_1,s_2)}{\partial s_1 \partial s_2}$, misalkan

$$\begin{aligned} u &= (\lambda + s_1 + s_2)(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12})(\lambda_1 + \lambda_{12} + s_1 + s_2\lambda_{12} - 1) \\ &+ (s_1 s_2)(\lambda_1 + \lambda_{12} + 2s_1 + \lambda + s_2) \end{aligned}$$

dan

$$v = (\lambda_2 + \lambda_{12} + s_2)[(\lambda + s_1 + s_2)(\lambda_1 + \lambda_{12} + s_1)]^2$$

maka

$$\begin{aligned} u' &= (\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12})[\lambda_1 + \lambda_{12} + s_1 + s_2\lambda_{12} - 1 + \lambda_{12}(\lambda + s_1 + s_2)] \\ &+ s_1(\lambda_1 + \lambda_{12} + 2s_1 + \lambda + 2s_2) \end{aligned}$$

dan

$$v' = (\lambda_1 + \lambda_{12} + s_1)^2[(\lambda + s_1 + s_2)^2 + 2(\lambda_2 + \lambda_{12} + s_2)(\lambda + s_1 + s_2)].$$

Sebagai akibatnya

$$\frac{\partial^2 \hat{F}(s_1, s_2)}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12})(\lambda_1 + \lambda_{12} + s_1 + s_2\lambda_{12} - 1 + d)}{(\lambda_1 + \lambda_{12} + s_1)^2[(\lambda_2 + \lambda_{12} + s_2)(\lambda + s_1 + s_2)^2]^2} \\ &+ \frac{s_1(\lambda_1 + \lambda_{12} + 2s_1 + \lambda + 2s_2) - (\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12})(\lambda_1 + \lambda_{12} + s_1 + s_2\lambda_{12} - 1)}{(\lambda_1 + \lambda_{12} + s_1)^2[(\lambda_2 + \lambda_{12} + s_2)(\lambda + s_1 + s_2)^2]^2} \\ &+ \frac{s_1 s_2(\lambda_1 + \lambda_{12} + 2s_1 + \lambda + s_2) + (\lambda + s_1 + s_2) + 2s_1(\lambda_2 + \lambda_{12} + s_2)(\lambda + s_1 + s_2)}{(\lambda_1 + \lambda_{12} + s_1)^2[(\lambda_2 + \lambda_{12} + s_2)(\lambda + s_1 + s_2)^2]^2} \end{aligned}$$

$$+ \quad \frac{(\lambda + s_1 + s_2) + 2s_1(\lambda_2 + \lambda_{12} + s_2)(\lambda + s_1 + s_2)}{(\lambda_1 + \lambda_{12} + s_1)^2[(\lambda_2 + \lambda_{12} + s_2)(\lambda + s_1 + s_2)^2]^2}.$$

Dengan demikian

$$E(T_1T_2) \quad = \quad \frac{\partial^2 \hat{F}(s_1, s_2)}{\partial s_1 \partial s_2}|_{s_1=s_2=0}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{((\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12}))(\lambda^3)[(\lambda_1 + \lambda_{12} - 1) - (\lambda_1 + \lambda_{12} - 1) + (\lambda + \lambda_{12})]}{\lambda^4(\lambda_1 + \lambda_{12})^2(\lambda_2 + \lambda_{12})^2} \\ &= \frac{\lambda + \lambda_{12}}{\lambda(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12})}. \end{aligned}$$

Karena diperhitungan sebelumnya telah diperoleh

$$E(T_1) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_{12}}, \lambda_1 > 0, \lambda_{12} > 0$$

dan

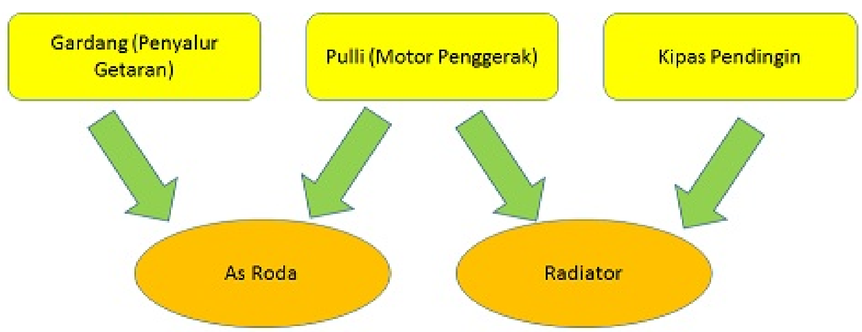
$$E(T_2) = \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_{12}}, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > 0$$

maka kovarian dari T_1, T_2 adalah

$$\begin{aligned} Cov(T_1, T_2) &= E(T_1T_2) - [E(T_1)E(T_2)] \\ &= \frac{\lambda + \lambda_{12}}{\lambda(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12})} - [\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_{12}} \cdot \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_{12}}] \\ &= \frac{\lambda + \lambda_{12} - \lambda}{\lambda(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12})} \\ &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12})}. \end{aligned}$$

3.3 Contoh Aplikasi

Dalam kasus nyata, seperti pada bidang mesin, sering terjadi gangguan terhadap komponen seperti adanya getaran yang ditimbulkan saat mesin sedang beroperasi akibat dari pengoperasian mesin itu sendiri. Akibatnya , banyak komponen yang tidak bekerja semestinya. Sebagai contoh, seseorang sedang mengoperasikan mesin traktor, dimana didalam mesin traktor tersebut terdiri atas berbagai komponen yang saling berinteraksi satu sama lain. Saat traktor tersebut dioperasikan, timbul berbagai macam getaran akibat perputaran pada mesin traktor yang mempengaruhi kinerja dari komponen-komponen didalamnya. Dimana saat motor penggerak (pulli) bergetar dan penyalur putaran (gardang) ikut bergetar karena mentransmisikan putaran serta kipas pendingin yang bekerja dan menghasilkan getaran, mempengaruhi as roda dan radiator saat bekerja di waktu yang sama. Seperti dapat dilihat pada ilustrasi berikut



Gambar 3.1: Gambar Ilustrasi

Karena terdapat tiga sumber getaran yang dapat mempengaruhi 2 komponen dalam mesin traktor tersebut dan anggap bahwa parameter dari ketiga sumber getaran tersebut adalah λ, maka berdasarkan ilustrasi tersebut dapat dilihat bahwa sumber getaran 1 (gardang) dapat merusak komponen 1 (as roda) dan terjadi pada waktu acak U_1 dimana U_1 berdistribusi eksponensial dengan *rate* λ_1, yaitu $P[U_1 > t] = e^{-\lambda_1 t}, t > 0$. Sumber getaran 2 (kipas pendingin) dapat merusak komponen 2 (radiator) dan terjadi pada waktu acak U_2 dimana U_2 berdistribusi eksponensial dengan *rate* λ_2, yaitu $P[U_2 > t] = e^{-\lambda_2 t}, t > 0$. Terakhir, sumber getaran 3 (mesin penggerak) dapat merusak kedua komponen yaitu as roda dan radiator secara bersamaan dan terjadi pada waktu acak U_{12} dimana U_{12} berdistribusi eksponensial dengan *rate* λ_{12}, yaitu $P[U_{12} > t] = e^{-\lambda_{12} t}, t > 0$. Dengan demikian, lama waktu hidup T_1 dari komponen 1 memenuhi

$$T_1 = \min(U_1, U_{12}),$$

sehingga

$$\begin{aligned} P(T_1 > t_1) &= P(\min(U_1, U_{12}) > t_1) \\ &= P(U_1 > t_1, U_{12} > t_1) \\ &= e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_{12} t_1} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1} \end{aligned}$$

berdistribusi eksponensial. Lama waktu hidup T_2 dari komponen 2 memenuhi

$$T_2 = \min(U_2, U_{12})$$

sehingga

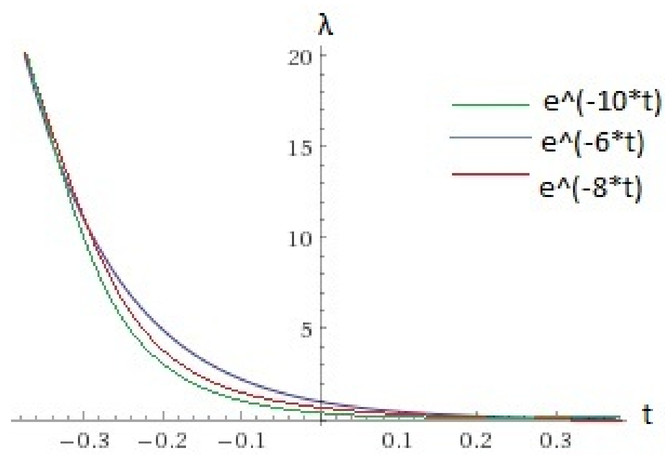
$$\begin{aligned} P(T_2 > t_2) &= P(\min(U_2, U_{12}) > t_2) \\ &= P(U_2 > t_2, U_{12} > t_2) \end{aligned}$$

$$= e^{-\lambda_2 t_2 - \lambda_{12} t_2}$$
$$= e^{-(\lambda_2+\lambda_{12}) t_2}$$

berdistribusi eksponensial. Sebagai akibatnya probabilitas survival bersamanya (*joint survival probability*) memenuhi

$$R(t_1, t_2) = P[T_1 > t_1, T_2 > t_2] = e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} \text{maks}(t_1,t_2)} \qquad (3.9)$$

untuk $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_{12} > 0$, $t_1 \geq 0$, dan $t_2 \geq 0$.
Jika sumber getaran 1 (gardang), 2 (kipas pendingin), dan 3 (motor penggerak) pada mesin traktor tersebut berturut-turut bergetar selama 6 jam, 8 jam, dan 10 jam dalam satu hari, maka *rate* $\lambda_1 = \frac{1}{6}$, $\lambda_2 = \frac{1}{8}$, dan $\lambda_{12} = \frac{1}{10}$ serta $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} = \frac{47}{120}$. Dijelasan pada grafik berikut



Gambar 3.2: Grafik Eksponensial Ketiga Sumber Getaran

Dengan demikian, berdasarkan teori yang telah dijelaskan sebelumnya, maka mean dari komponen T_1 dan T_2 adalah

$$\begin{aligned} E(T_1) &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_{12}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{10}} \\ &= 3,75 \text{ jam} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} E(T_2) &= \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_{12}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}} \\ &= 4,44 \text{ jam.} \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa mean lama waktu hidup komponen T_1 adalah sebesar 3,75 jam dan mean lama waktu hidup komponen T_2 adalah sebesar 4,44 jam. Selanjutnya, variansi dan standar deviasi dari komponen T_1 dan T_2 adalah

$$\begin{aligned} Var(T_1) &= \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_{12})^2} \\ &= \frac{1}{(\frac{1}{6} + \frac{1}{10})^2} \\ &= 14,062 \text{ jam}^2 \\ Std(T_1) &= \sqrt{Var(T_1)} \\ &= \sqrt{14,062 \text{ jam}^2} \\ &= 3,75 \text{ jam} \end{aligned}$$

dan

$$
\begin{aligned}
Var(T_2) &= \frac{1}{(\lambda_2 + \lambda_{12})^2} \\
&= \frac{1}{(\frac{1}{8} + \frac{1}{10})^2} \\
&= 19,753 \text{ jam}^2 \\
Std(T_2) &= \sqrt{Var(T_2)} \\
&= \sqrt{19,753 \text{ jam}^2} \\
&= 4,44 \text{ jam.}
\end{aligned}
$$

Berdasarkan hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa terdapat perbedaan keragaman nilai *rate* diantara sumber getaran. Terakhir, kovarian dari kedua komponen adalah

$$
\begin{aligned}
Cov(T_1, T_2) &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12})} \\
&= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{47}{120}(\frac{1}{6} + \frac{1}{10})(\frac{1}{8} + \frac{1}{10})} \\
&= 4,255 \text{ jam.}
\end{aligned}
$$

Berdasarkan hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa nilai kovarian diantara kedua komponen sebesar 4,255 jam.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Jika terdapat sistem yang terdiri dari 2 komponen dependen dan variabel acak kontinu T_1 dan T_2 berdistribusi eksponensial dengan parameter λ dimana fungsi survival bersamanya

$$R(t_1, t_2) = P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} \text{maks}(t_1, t_2)}$$

dengan $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_{12} > 0$, $t_1 \geq 0$, dan $t_2 \geq 0$, maka sifat-sifat waktu hidup komponennya adalah

1. $R_{T_1}(t_1) = e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1}, \lambda_1 > 0, \lambda_{12} > 0, t_1 \geq 0.$
2. $R_{T_2}(t_2) = e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > 0, t_2 \geq 0.$
3. $\lambda_{T_1}(t_1) = \lambda_1 + \lambda_{12}, \lambda_1 > 0, \lambda_{12} > 0.$
4. $\lambda_{T_2}(t_2) = \lambda_2 + \lambda_{12}, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > 0.$
5. $f_{T_1}(t_1) = (\lambda_1 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1}, \lambda_1 > 0, \lambda_{12} > 0, t_1 \geq 0.$
6. $f_{T_2}(t_2) = (\lambda_2 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > 0, t_2 \geq 0.$
7. $F_{T_1}(t_1) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1}, \lambda_1 > 0, \lambda_{12} > 0, t_1 \geq 0.$
8. $F_{T_2}(t_2) = 1 - e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2}, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > 0, t_2 \geq 0.$

9. $F(t_1,t_2) = e^{-\lambda_1 t_1-\lambda_2 t_2-\lambda_{12}\text{maks}(t_1,t_2)} - e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1} - e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2} + 1, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$

10. $\lim_{t_2 \to t_1^-} f(t_1,t_2) \neq \lim_{t_2 \to t_1^+} f(t_1,t_2),$ sehingga $f(t_1,t_2)$ tidak ada.

11. $E(T_1) = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_{12}}, \lambda_1 > 0, \lambda_{12} > 0.$

12. $E(T_2) = \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{12}}, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > 0.$

13. $E(T_1T_2) = \frac{\lambda+\lambda_{12}}{\lambda(\lambda_1+\lambda_{12})(\lambda_2+\lambda_{12})}, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > 0$ dimana $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}$.

14. $Var(T_1) = \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_{12})^2}, \lambda_1 > 0, \lambda_{12} > 0.$

15. $Var(T_2) = \frac{1}{(\lambda_2+\lambda_{12})^2}, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > 0.$

16. $Cov(T_1,T_2) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda(\lambda_1+\lambda_{12})(\lambda_2+\lambda_{12})}, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > 0$ dimana $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}$.

17. $\hat{F}_{T_1T_2}(s_1,s_2) = \frac{(\lambda+s_1+s_2)(\lambda_1+\lambda_{12})(\lambda_2+\lambda_{12})+s_1s_2\lambda_{12}}{(\lambda+s_1+s_2)(\lambda_1+\lambda_{12}+s_1)(\lambda_2+\lambda_{12}+s_2)}, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_{12} > 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0.$

4.2 Saran

Untuk kajian selanjutnya penulis menyarakan:

1. Membahas sistem dengan lebih dari 2 komponen (multivariat).
2. Pendekatan sifat-sifat waktu hidup komponen selain menggunakan distribusi eksponensial.
3. Terakhir, apabila waktu hidup komponennya berupa suatu interval.

DAFTAR PUSTAKA

Arnold, B. C, Castilo. E dan Sarabia, J. M. 1999. *Conditional Specification of Statistical Models*. New York: Springer-Verlag, Inc.

Arnold, B. C dan Strauss, D. J, Bivariate Distribution with Exponential Conditional. *Journal of The American Statistical Association*, 83-522-527, 1988.

Barlow, Richard. E dan Frank Proschan. 1975. *Statistical Theory of Reliability and Life Testing Probability Models*: Holt, Risehart dan Whiston, Inc.

Chandrasekar, B dan Tunny Sebastian, Conditional Distribution and Reliability Analysis Associated with Marshall-Olkin Bivariate Exponential Distribution. *Journal of The Kerala Statistical Association*, Volume 24, 69-77, 2013. http://.researchgate.net/publication/272623330 (diakses pada 2 Feb 2015)

Epstein, Benjamin dan Ishay Weissman. 2008. *Mathematical Models for Systems Reliability*. Florida: CRC Press.

Gertsbakh, Ilya. 2000. *Reliability Theory with Applications to Preventive Maintenance*. Beersheva: Springer.

Haberman, Richard. 1998. *Mathematical Models*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc dan Englewood Cliffs.

Hanagal, David. D, "Estimation of Reliability of A Component Subjected to Bivariate Exponential Stress", Mexico: Texcoco, 2010. http://.stats.unipune.ac.in/ddh/P30.pdf (diakses pada 29 Jan 2015)

Hogg, Robert. V dan Allen T.Craig. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*. Fifth Edition. New Jersey: Prentice-Hall, Inc dan Englewood Cliffs.

Hogg, Robert. V dan Elliot. A Tanis. 2001. *Probability and Statistical Inference*. New Jersey: Prentice-Hall International, Inc.

Iyes, Srikanth, D. Manjunath, dan R. Manivasakan, Bivariate Exponential Distributions using Linear Structures. *The Indian Journal of Statistics*, Volume 64, PP 156-166, 2002.
http:jstor.org/stable/25051378?seq=1 (diakses pada 29 Jan 2015)

Miller, Ivan. W dkk. 1985. *Reliability and Validity*. Brown University Butler Hospital.

Myers, Raymond H dan Janet S, Milton. 1991. *A First Course in The Theory of Linear Statistical Models*. Boston: PWS-Kent Publishing Company.

Nadarajah, Saralees dan Samuel Kotz, "Reliability for Some Bivariate Exponential Distributions", Hindawi Publishing Corporation. 2005.
http://downloads.hindawi.com/journals/mpe/2006/041652.pdf (diakses pada 4 Feb 2015)

Nagle, R. Kent, Edward B. Staff, dan Arthur D. Snider. 2012. *Fundamentals of Differential Equations*. Eighth Edition: Rearson Education, Inc.

Putri, Melati Budiana, "Teori Keandalan sebagai Aplikasi Distribusi Eksponensial", Bandung: Institut Teknologi Bandung, 2011.
http://informatika.stei.itb.ac.id/rinaldi.munir/Probstat/2010-2011/Makalah2010/MakalahProbstat2010-005.pdf (diakses pada 29 Jan 2015)

Ross, Sheldon M. 2010. *Introduction to Probability Models*. Tenth Edition. Oxford: Elsevier, Inc.

Sulong, Dito Yudhayanto, "Sifat-sifat Reliabilitas Sistem dengan Komponen yang Dapat Ditukar", Jakarta: Universitas Negeri Jakarta, 2013.

Walpole, Ronald E dan Raymond H. Myers. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Edisi Ke-4. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama	:	Muhammad Agung Setya Noer Isnanto
No. Registrasi	:	3125111214
Jurusan	:	Matematika
Program Studi	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul "**Pemodelan Waktu Hidup Komponen Dengan Menggunakan Distribusi Eksponensial Bivariat**" adalah :

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, Juli 2015

Yang membuat pernyataan

Muhammad Agung Setya Noer Isnanto

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

MUHAMMAD AGUNG SETYA NOER ISNANTO. Lahir di Jakarta, 23 Agustus 1993. Anak pertama dari pasangan Bapak Budi Setiawan dan Ibu Nurbayati. Saat ini bertempat tinggal di Jalan Anggur 1 Blok XB No.3 RT 002/ RW 020 Medan Satria, Bekasi Barat 17131.

No. Telp/Ponsel	:	02188977978/08999257583
Email	:	m.agungsni@yahoo.co.id

Riwayat Pendidikan : Penulis mengawali pendidikan di TK An-Nur Narogong selama 2 tahun, dan kemudian melanjutkan pendidikan di SD Negeri Pejuang VII Bekasi pada tahun 1999 - 2005. Setelah itu, penulis melanjutkan ke SMP Negeri 19 Bekasi hingga tahun 2008. Kemudian kembali melanjutkan ke SMA Negeri 10 Bekasi dan lulus tahun 2011. Di Tahun yang sama penulis melanjutkan ke Universitas Negeri Jakarta (UNJ), jurusan Matematika, melalui jalur SNMPTN Tulis. Di pertengahan tahun 2015 penulis telah memperoleh gelar Sarjana Sains untuk Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, FMIPA, UNJ.

Riwayat Organisasi : Selama di bangku perkuliahan, penulis aktif di berbagai organisasi kemahasiswaaan. Dalam dua tahun pertama, penulis mendapat kepercayaan sebagai staff Departemen Advokasi dan Olahraga Badan Eksekutif Mahasiswa Jurusan Matematika, khususnya dalam menangani masalah beasiswa dan keolahragaan. Selama perkuliahan penulis aktif menjadi ketua maupun koordinator dalam berbagai acara kemahasiswaan.

Riwayat Pekerjaan : Penulis mulai menjadi pengajar matematika sejak tahun 2009. Pada akhir tahun 2011, penulis menjadi pengajar olimpiade matematika di SMA Negeri 10 Bekasi hingga akhir tahun 2014. Penulis pernah bekerja secara magang di PT. PERTAMINA (Persero) Divisi III *Procurment, Contract and Budgeting* selama 1 bulan. Selain itu, sejak SMA penulis juga menjadi pengajar privat *door-to-door* hingga kini.