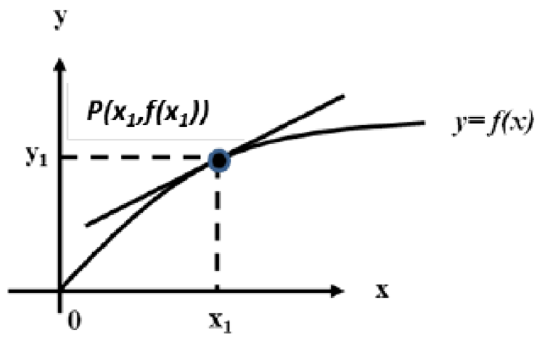
Berdasarkan pendapat para ahli di atas, maka kegiatan pembelajaran yang menggunakan pendekatan PMRI harus diawali konteks yang diangkat dari kehidupan nyata atau dari sesuatu konsep yang sudah difahami dan dapat dibayangkan peserta didik. Kegiatan dilanjutkan dengan aktivitas berdiskusi untuk memecahkan masalah realistik yang disajikan dalam kegiatan belajar. Diskusi dilakukan antar peserta didik dengan peserta didik juga antara peserta didik dengan pendidik, untuk mendapatkan solusi dari masalah realistik tersebut, sehingga dapat menemukan kembali dan memahami konsep matematika formal secara mandiri.

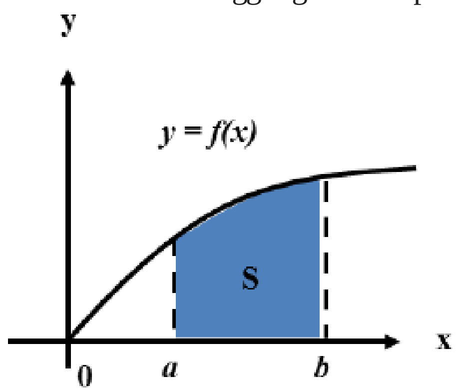
2. Pembelajaran Integral

Ryan (2005) memaparkan bahwa Integral adalah bagian dari kalkulus. Definisi kalkulus adalah bidang matematika yang menganalisis aspek perubahan dalam proses atau sistem yang dapat dimodelkan oleh fungsi. Melalui dua alat primer yaitu derivatif dan Integral. Kedua alat tersebut memungkinkan perhitungan yang tepat dari tingkat perubahan dan dari jumlah total perubahan dalam sistem tersebut. Diferensial dan Integral tumbuh dari ide limit, perpanjangan logis dari konsep fungsi dalam interval yang semakin kecil mendekati nol. Hubungan antara Diferensial dan Integral, yang dikenal sebagai teorema dasar kalkulus, ditemukan pada akhir abad ke-17 secara mandiri masing-masing oleh Isaac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz. Kalkulus adalah salah satu terobosan ilmiah utama dari era modern.

Kizito (2012) menyatakan bahwa materi kalkulus membahas tentang dua masalah utama. Masalah yang pertama adalah tentang laju perubahan nilai y pada diagram Cartesius terhadap perubahan nilai x di $x = x_i$ yang diinterpretasikan sebagai gradien dari garis singgung terhadap kurva $y = f(x)$ di titik P $(x_i, f(x_i))$. Sedangkan masalah yang kedua adalah masalah tentang luas daerah di antara dua yaitu kurva $y_1 = f_1(x)$ dengan kurva $y_2 = f_2(x)$ pada interval $a \leq x \leq b$ pada suatu diagram Cartesius.



Gambar 2.2. Masalah Gradien Garis Singgung terhadap Kurva di P $(x_i, f(x_i))$



Gambar 2.3. Masalah Luas Daerah di Bawah Kurva $y = f(x)$

Purcell (1996) menyatakan bahwa teorema dasar kalkulus menghubungkan masalah gradien garis singgung dan masalah luas daerah. Integral Tak Tertentu adalah Antidiferensial. Lebih lanjut Kizito (2012) mendukung pernyataan tersebut bahwa grafik koordinat menghubungkan dua masalah kalkulus yang dapat ditinjau secara geometri dengan kurva $f(x)$ sebagai obyek matematikanya. Derivatif sebagai gradien garis singgung terhadap kurva, sedangkan Integral sebagai luas daerah di antara kedua kurva tersebut.

Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia No 23 Tahun 2006 menetapkan Standar Kompetensi Lulusan (SKL) untuk jurusan IPS tingkat Sekolah Menengah Atas atau Madrasah Aliyah yang dikeluarkan oleh BSNP Republik Indonesia, mensyaratkan pemahaman tentang materi Integral yang didukung dengan penguasaan keterampilan penarikan Integral sebagai salah satu bagian dari standar kompetensi lulusan peserta didik, yang penting terutama bagi peserta didik yang akan melanjutkan pendidikan ke tingkat yang lebih tinggi.

Attorps (2013) mengemukakan bahwa beberapa penelitian telah menyoroti kesulitan yang dihadapi peserta didik dalam memahami konsep Integral terutama dalam memecahkan masalah yang membutuhkan kapasitas untuk melihat integrasi sebagai proses limit dari jumlah. Peserta didik dapat memiliki kemampuan teknis yang sangat baik untuk menghitung Integral Tertentu, namun pemahaman konseptual mereka tentang konsep itu sendiri masih kurang. Kenyataan ini dapat disebabkan oleh metode pengajaran yang kurang tepat.

Metode Pengajaran yang kurang tepat dapat membuat beberapa peserta didik menjadi cukup berhasil dalam menyelesaikan tugas-tugas standar dan mengembangkan keterampilan prosedural, namun sebenarnya belum memahami konsep dari materi matematika tersebut. Hal tersebut dapat menyebabkan kebanyakan dari mereka memiliki kesulitan dalam mengembangkan pemahaman konseptual tentang topik yang dipelajari.

3. Integral Tak Tertentu

Martono (1988) memaparkan bahwa konsep Integral Tak Tertentu adalah Antidiferensial dari suatu fungsi, yang disajikan dalam teorema yaitu misalkan suatu fungsi f mempunyai turunan pada selang terbuka I, jika $f'(x) = 0$ pada suatu selang terbuka I, maka $f(x) = c$, dengan c adalah suatu konstanta. Teorema tersebut menghasilkan suatu sifat yang merupakan dasar untuk konsep Integral Tak Tertentu, yaitu bila turunan dari dua fungsi adalah sama, maka fungsi yang satu adalah sama dengan fungsi yang lain ditambah dengan suatu konstanta sebarang, konstanta tersebut dilambangkan dengan C. Artinya ada tak berhingga fungsi yang merupakan Antidiferensial dari suatu fungsi. Konsep Integral Tak Tertentu jika ditinjau dari bentuk Diferensial $dy = f'(x)\,dx$, maka $y = F(x)$ sehingga turunan dari fungsi tersebut adalah $F'(x) = f(x)$, sehingga fungsi $F(x)$ tersebut dinamakan Antidiferensial atau fungsi primitif dari suatu fungsi f.

4. Integral Tertentu

Ryan (2005) menyatakan bahwa Integral Tertentu adalah Integral untuk mendekati luas daerah di bawah kurva dengan menambahkan daerah persegi panjang-persegi panjang titik tengah. Menghitung pendekatan luas daerah di bawah kurva, dengan puncak-puncak persegi panjang tersusun menjadi bentuk gigi gergaji yang tidak cocok dengan sempurna di sepanjang fungsi yang melengkung halus, sehingga untuk menemukan pendekatan luas daerah di bawah kurva menggunakan persegi panjang, perlu menemukan daerah dari jumlah tak terbatas persegi panjang tak terhingga yang sangat tipis yang titik tengah dari tiap "puncak" persegi panjang tersebut tersusun sempurna sesuai kurva. Ini didasarkan pada batas jumlah Riemann dari luas daerah-daerah persegi panjang yang mendekati luas daerah di bawah kurva.

Purcell (1996) memandang partisi P dari selang $[a,b]$ menjadi n selang bagian (tidak perlu lebarnya sama) memakai titik-titik $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, dan andaikan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1.}$ Pada tiap selang bagian $[x_{i-1}, x_i]$, ambil sebuah titik sebarang $\bar{x}_i$ (yang mungkin sebuah titik ujung); kita sebut ia sebuah titik sampel untuk selang bagian ke-i. $|P|$ disebut $\boldsymbol{norma\ P}$, menyatakan panjang selang bagian yang terpanjang dari partisi P. Andaikan f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tutup $[a,b]$. Jika $\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ ada, kita katakan f adalah terintegralkan pada $[a,b]$. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)\,dx$, disebut Integral Tertentu f dari a ke b, diberikan oleh persamaan berikut $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$. Pendekatan luas daerah di bawah kurva $f(x)$ dalam interval $a \le x \le b$ dalam kasus khusus dengan lebar partisi yang sama, diberikan oleh Integral Tertentu yang kemudian didefinisikan Ryan (2005) sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \cdot \left(\frac{b-a}{n} \right) \right]$$

Rumus 2.1. Jumlah Riemann

Integral Tertentu dalam interval $a \leq x \leq b$ yang dipaparkan Ryan (2005), adalah nilai dari seluruh penjumlahan Riemann yang mendekati jumlah persegi panjang-persegi panjang sebanyak mendekati tak berhingga dengan lebar masing-masing persegi panjang mendekati nol, dengan notasi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

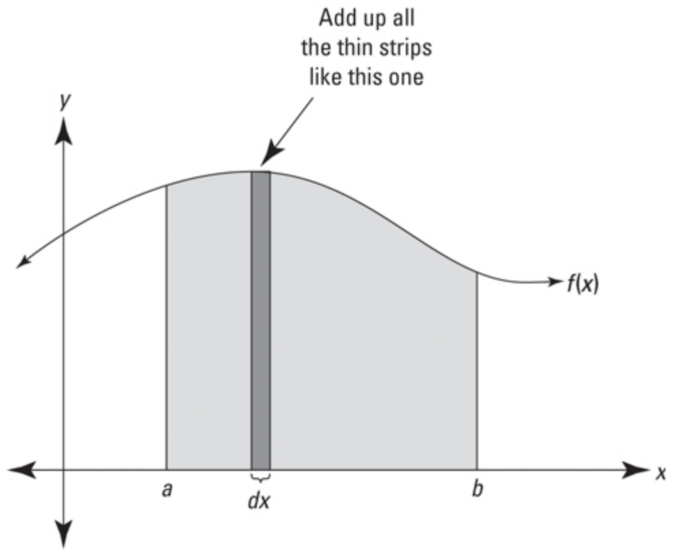
Rumus 2.2. Rumus Total Luas Daerah Persegi Panjang sebagai Luas Daerah Dibatasi Kurva

Keterangan dari notasi pada rumus 2.2 yaitu Δx_i adalah lebar dari persegi panjang ke-i, dan c_i adalah absis (koordinat x) dari titik di mana persegi panjang ke-i menyentuh $f(x)$.

Rösken (2007) memaparkan bahwa, konseptualisasi sentral dalam Kalkulus harus dibangun atas ide-ide intuitif yang berbeda dan saling mendukung satu sama lain. Namun demikian, ide-ide ini tidak boleh terbatas pada aspek daerah tetapi juga berfokus pada aplikasi. Aplikasi tersebut antara lain dapat berupa fungsi jarak adalah Integral dari fungsi kecepatan, juga dapat berupa fungsi suatu kurva adalah Integral dari fungsi gradien garis singgung terhadap kurva tersebut.

Pendekatan yang dapat digunakan untuk pembelajaran kalkulus Integral dengan menggunakan konteks daerah yang dibatasi kurva, terkait dengan Integral Riemann. Pendekatan tersebut menggunakan pendekatan dengan menghitung daerah di antara kurva dengan sumbu x, dengan menggunakan jumlah daerah-daerah persegi panjang. Oleh sebab itu pemahaman geometris dan definisi analitik perlu diperkenalkan terlebih dahulu kepada peserta didik. Luas daerah dari suatu bidang datar mengacu pada banyaknya satuan persegi yang ditutup daerah tersebut. Satuan persegi tersebut dapat dalam sentimeter persegi, meter persegi, dan satuan ukuran luas lainnya. Peserta didik harus dapat membayangkan luasan daerah-daerah persegi panjang yang harus dijumlahkan untuk mendapatkan nilai luasan daerah antara kurva dan sumbu x. Jumlah semua daerah persegi panjang untuk mendekati nilai luasan antara kurva dan sumbu x dipenuhi jika lebar dari masing-masing daerah persegi panjang tersebut adalah mendekati 0 (nol).

Pendekatan Integral sebagai Jumlah Riemann tersebut dapat dipahami dengan mengamati Gambar 2.4. di bawah ini yang merupakan ilustrasi gambar daerah persegi panjang untuk menutup daerah di antara kurva dan sumbu x pada diagram Cartesius yang diadopsi dari tulisan Ryan (2005). Kegiatan pembelajaran menggunakan daerah persegi panjang tersebut menjadi konteks berupa *wall paper*, yang selanjutnya digunakan sebagai sarana berpikir peserta didik untuk memahami konsep Integral juga untuk memecahkan masalah pada pokok bahasan Integral.



Gambar 2.4. Pendekatan Riemann untuk Integral

Rösken (2007) mendukung bahwa kegiatan pembelajaran matematika dengan menggunakan pendekatan yang berfokus pada aspek wilayah dan Antidiferensial, adalah kegiatan pembelajaran yang memudahkan pemahaman tentang Integral bagi peserta didik. Pendekatan yang dipakai untuk mempelajari Integral tersebut jika diawali dengan masalah kontekstual, diharapkan dapat meningkatkan pemahaman peserta didik.

Pendekatan pembelajaran yang memenuhi kriteria di atas adalah pendekatan yang bersesuaian dengan pendekatan pembelajaran matematika PMRI.

5. Pemahaman Relasional Peserta didik

Skemp (1976) menyatakan bahwa pemahaman tidak hanya berarti dapat mengingat konsep-konsep matematika atau mampu mengikuti prosedur. Misalkan, seorang guru yang mengingatkan bahwa luas daerah persegi panjang adalah memenuhi rumus $L = A \times B$. Seorang peserta didik yang tidak mengikuti pelajaran sebelumnya menyatakan bahwa dia tidak mengerti, maka guru tersebut menjelaskan sebagai berikut "Rumus tersebut menyatakan bahwa luas persegi panjang adalah panjang dikalikan lebar dari persegi panjang tersebut". "Oh, baiklah", kata peserta didik tersebut, kemudian dia mengerjakan latihan soal. Hal tersebut adalah ilustrasi dari kemampuan mengikuti prosedur tapi bukan berarti telah mendapatkan pemahaman. Pemahaman pembelajaran matematika membutuhkan lebih dari sekedar mengingat fakta sederhana. Skemp (1976) mendefinisikan bahwa pemahaman adalah kemampuan menjelaskan, menemukan bukti dan contoh, generalisasi, menerapkan, menganalogikan, dan mewakili topik dengan cara yang baru.

Lebih lanjut dalam tulisannya Skemp (1976) menyatakan bahwa pemahaman dibagi dua, yaitu pemahaman instrumental dan pemahaman relasional. Pemahaman instrumental adalah pemahaman terhadap konsep-konsep secara tidak terkait satu sama lain atau secara tak bermakna. Pemahaman instrumental menghasilkan pengetahuan prosedural yang digunakan peserta didik untuk menyelesaikan masalah matematika prosedural, yaitu masalah matematika yang sudah jelas langkah-langkahnya tanpa harus menjelaskan mengapa melaksanakan langkah-langkah tersebut. Pemahaman relasional merupakan pemahaman terhadap konsep-konsep yang saling terkait satu sama lain secara bermakna. Pemahaman relasional menghasilkan pengetahuan konseptual, yang memungkinkan peserta didik dapat menyelesaikan masalah matematika konseptual dan dapat menjelaskan strategi dan langkah yang digunakan untuk menyelesaikan masalah matematika konseptual tersebut.

Berdasarkan rekonstruksi pemahaman dari Skemp oleh Kinach (2002), didapat lima tingkatan pemahaman yaitu pemahaman *content, concept, problem solving, epistemic*, dan *inquiry*, dengan penjelasan sebagai berikut:

a. *Content level understanding* meliputi mengingat fakta-fakta dasar dan menggunakan algoritma, yang merupakan pemahaman matematika yang paling dangkal, hanya mengulang tanpa makna apa keterampilan algoritma yang dilatihkan.
b. *Concept level understanding* meliputi kemampuan mengidentifikasi, menganalisis dan mensintesis pola-pola. Ciri-cirinya kemampuan menyusun definisi berdasarkan identifikasi pola dan mengaitkan konsep yang satu dengan yang lain.
c. *Problem solving level understanding* merupakan kemampuan peserta didik menggunakan metode ilmiah untuk memecahkan masalah secara mandiri dengan working backward, memecahkan suatu masalah yang serupa, mengaplikasikan suatu strategi dalam situasi yang berbeda.
d. *Epistemic level understanding* dapat memberikan bukti-bukti yang sahih dalam matematika. Berarti dapat mengetahui secara mandiri strategi dan hasil dari pemecahan masalah yang dilakukan sudah benar atau belum.
e. *Inquiry leverl understanding* yaitu pemahaman sedemikian hingga dapat menggagas teori yang benar-benar baru, bukan menemukan kembali.

Kinach (2002) juga menyatakan bahwa pemahaman instrumental dari Skemp setara dengan tingkat pemahaman konten. Pemahaman relasional meliputi pemahaman konsep, pemecahan masalah dan pemahaman epistemik, sehingga pemahaman inkuiri tidak termasuk dalam pemahaman relasional.

Kesimpulan dari pendapat para ahli di atas yaitu kemampuan pemahaman relasional menghasilkan kemampuan memahami konsep, melihat secara bermakna keterkaitan antara konsep-konsep yang terpisah, serta kemampuan menentukan strategi untuk memecahkan masalah secara bermakna ditunjukkan dengan dapat memberikan bukti-bukti yang sahih dalam matematika, melalui pemecahan masalah realistik. Berdasarkan hal tersebut, maka indikator dari pemahaman relasional dalam *design research* ini, adalah: 1) kemampuan menyatakan kembali konsep matematika yang telah dipelajari (*to describe*); 2) kemampuan mengklarifikasi apakah suatu obyek matematika telah memenuhi syarat definisi atau belum (*to compare*); 3) kemampuan menginvestigasi hasil dari suatu penerapan konsep matematika (*to evaluate*); serta memiliki 4) kemampuan membuktikan secara sahih suatu konsep matematika (*to explain*).

Hal tersebut di atas sejalan dengan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia No. 22 tahun 2006 tentang Standar Isi untuk Satuan Pendidikan Dasar dan Menengah menetapkan Standar Kompetensi dan Standar Kompetensi Dasar Pelajaran Matematika SMA-MA bahwa pelajaran matematika hendaknya dimulai dengan masalah nyata (kontekstual), kemudian secara bertahap dibimbing untuk menguasai konsep matematika.

Proses penemuan dan pengkonstruksian pengetahuan matematika formal dari pemecahan masalah realistik dalam kegiatan pembelajaran dengan menggunakan pendekatan PMRI, penuh dengan aktivitas pemecahan masalah, penalaran, dan komunikasi, sehingga PMRI merupakan alternatif pendekatan pembelajaran matematika untuk mengembangkan pemahaman relasional peserta didik. Oleh karena itu, pendekatan dari rancangan kegiatan pembelajaran dalam *Design Research* ini menggunakan pendekatan PMRI.

B. Teori Instruksional Lokal

Design Research ini bertujuan untuk mengembangkan teori instruksional lokal mengenai pemahaman relasional peserta didik dalam kerangka berpikir matematika realistik, yang berfungsi sebagai teori yang terbukti secara empiris bagaimana sebuah rangkaian aktivitas pembelajaran dapat digunakan dalam kelas untuk tujuan pembelajaran pada materi Integral, yang terdiri dari Integral Tak Tertentu dan Integral Tertentu.

Teori instruksional lokal dalam sebuah *Design Research* disusun berdasarkan teori-teori dan penelitian-penelitian sebelumnya yang terkait, yang masih berupa sebuah hipotesis yang terdiri dari:

1. tujuan pembelajaran matematika peserta didik;
2. rencana aktivitas pembelajaran dan alat-alat yang akan digunakan;
3. hipotesis mengenai proses pembelajaran yang menjelaskan kemungkinan-kemungkinan cara berpikir peserta didik saat terlibat dalam rangkaian aktivitas yang didesain.

Secara lebih spesifik teori instruksional lokal dan hipotesis lintasan belajar berisi teori pembelajaran bagi peserta didik dalam suatu komunitas kelas yang disertai dengan hipotesis rangkaian aktivitas pembelajaran serta alat peraga mau pun perangkat komputer, serta budaya kelas, dan peran pendidik yang proaktif yang diduga dapat mendukung tercapainya pembelajaran matematika (Gravemeijer dan Cobb, 2006). *Design research* ini dirancang menjadi enam tahap.

1. Tahap pertama menggunakan pemahaman relasional peserta didik bahwa Integral adalah Antidiferensial dengan *model of* adalah fungsi *polynomial* di mana suku dari fungsi *polynomial* yang berisi konstanta adalah berisi dua faktor yaitu koefisien dikalikan dengan variabel x berpangkat nol (0) untuk dapat menjelaskan mengapa pada Integral Tak Tertentu harus ditambah dengan nilai konstan sembarang yang dilambangkan dengan C.

2. Tahap kedua adalah menggunakan pemahaman relasional dengan *model of* definisi fungsi melalui titik (x, y) untuk menentukan nilai konstanta dari fungsi Antidiferensial.
3. Tahap ketiga adalah *guided reinvention* konsep luas sebagai limit penjumlahan luas daerah-daerah persegi panjang yang masing-masing lebarnya mendekati nol dengan n yang melambangkan banyak daerah persegi panjang sebanyak mendekati tak berhingga dalam interval $a \leq x \leq b$ yang menggunakan *model of* menutup dinding pameran dengan *wall paper*.
4. Tahap keempat manipulasi aljabar dalam menggunakan Integral untuk menentukan luas di antara kurva dan sumbu x dalam interval $a \leq x \leq b$.
5. Tahap kelima adalah dengan pemahaman relasional dengan *model of* penggunaan definisi fungsi, peserta didik memahami Integral tak tentu dengan menggunakan substitusi.
6. Tahap keenam adalah dengan pemahaman relasional dengan *model of* Diferensial dari fungsi hasil perkalian, sebagai sarana peserta didik untuk memahami Integral parsial.

Konteks yang akan digunakan dalam tahap pertama adalah memanfaatkan definisi Diferensial yang telah dikuasai peserta didik dari kegiatan pembelajaran pada semester sebelumnya, dengan *model of* adalah fungsi *polynomial* di mana setiap fungsi polynomial berpangkat n artinya memiliki suku dengan pangkat tertinggi dari suatu variabel x adalah n, dan suku dengan pangkat terendah dari variabel x adalah nol (0). Fungsi hasil penarikan Diferensial dari fungsi *polynomial* tersebut selalu berisi suku yang bernilai nol. Suku bernilai nol tersebut didapat dari proses proses penarikan Diferensial yang menggunakan perkalian nilai nol dari pangkat x dengan nilai koefisien dari variabel x berpangkat nol. Bilangan nol dikalikan dengan suatu bilangan real berapapun (sembarang konstanta) hasilnya adalah nol. Hal tersebut menunjukkan bahwa selalu terdapat suku dengan variabel x berpangkat nol, pada setiap fungsi yang diDiferensialkan, sehingga membuktikan bahwa pada Integral Tak Tertentu harus ditambah dengan nilai konstan sembarang yang dilambangkan dengan C.

Proses perkalian dengan nilai nol dari pangkat x dalam penarikan Diferensial dari fungsi *polynomial* dapat digunakan sebagai *model of*, karena peserta didik telah memahami prosedur penarikan Diferensial dengan menggunakan pola tersebut setelah menggunakan definisi limit dalam penarikan Diferensial dari beberapa fungsi *polynomial*, kemudian peserta didik telah melaksanakan *guided reinvention* tentang rumus umum penarikan Diferensial dari fungsi *polynomial* pada materi Diferensial.

Peserta didik kemudian memanfaatkan pemahaman relasional dengan konteks definisi fungsi melalui titik (x, y) sebagai masalah kontekstual yang dapat dibayangkan peserta didik, peserta didik diharapkan dapat menemukan nilai C pada kurva hasil penarikan Integral yang melalui titik (x, y).

Selanjutnya kegiatan pembelajaran menuju tahap ketiga dengan diawali oleh konteks berupa tantangan menutup daerah dinding pameran dengan *wall paper*, dengan harapan peserta didik dapat menggunakan pemahaman relasional untuk menemukan kembali konsep tentang Integral sebagai luas daerah melalui pemecahan masalah kontekstual menutup daerah dinding pameran dengan menggunakan *wall paper* dan membandingkan luas daerah dinding pameran yang tertutup daerah-daerah persegi panjang *wall paper*.

Luasan total luas daerah *wall paper* yang akan dibandingkan adalah total luasan *wall paper* dengan lebar masing-masing *wall paper* adalah 1 satuan panjang, dengan yang lebarnya masing-masing 0,5 satuan panjang, dan dengan yang lebarnya masing-masing 0,1 satuan panjang. Kemudian dengan menggunakan pemahaman relasionalnya, peserta didik diarahkan dengan penemuan terbimbing bahwa makin kecil lebar dari masing-masing *wall paper* yaitu makin mendekati nol maka total luas penjumlahan daerah masing-masing *wall paper* akan makin mendekati luas dinding pameran. Daerah dinding pameran pada *design research* ini dibatasi oleh kurva $y = x^3 + 16$, sumbu x, garis $y = -2$, dan garis $y = 2$. Proses menutup daerah dinding pameran, diawali dengan penutupan daerah di bawah garis, dan daerah di bawah seperempat kurva lingkaran.

Alasan menutup daerah antara garis dan sumbu x pada interval tertentu, adalah agar dapat membandingkan secara nyata total luas daerah-daerah *wall paper* yang diwakili dengan luas daerah persegi panjang dengan rumus menentukan luas daerah trapesium. Alasan menutup daerah antara sumbu x, sumbu y, dan kurva seperempat lingkaran di kuadran satu diagram Cartesius adalah agar dapat membandingkan secara nyata melalui *hands-on dan minds-on activity* tentang total luas daerah-daerah *wall paper* yang diwakili dengan luas daerah persegi panjang dengan rumus menentukan luas daerah seperempat lingkaran yaitu $L = \frac{1}{4}\pi r^2$. Proses tersebut merupakan suatu *guided reinvention* bagi peserta didik ke *model for* yaitu Integral Tertentu dalam interval $a \leq x \leq b$ yang dipaparkan Ryan (2005) adalah nilai dari seluruh penjumlahan Riemann yang mendekati jumlah persegi panjang-persegi panjang sebanyak mendekati tak berhingga dengan lebar masing-masing persegi panjang mendekati nol.

Peserta didik pada tahap keempat menggunakan pemahaman relasionalnya untuk dapat menemukan strategi manipulasi aljabar sendiri dalam menggunakan Integral untuk menentukan luas daerah antara kurva dan sumbu x. Selanjutnya pada tahap kelima peserta didik menggunakan definisi Integral yang sudah dipahami dari tahap pertama, kemudian dengan pemahaman relasional menggunakan pola dari penarikan Integral, sampai mendapatkan pemahaman tentang Integral menggunakan substitusi dengan menggunakan kontekstual definisi fungsi yaitu jika $f(x) = ax + b$ maka $f(\blacksquare) = a\blacksquare + b$, yaitu mensubstitusikan $\blacksquare$ pada variabel x dari fungsi. Definisi fungsi tersebut diadaptasi ke dalam fungsi hasil penarikan Integral sebagai berikut$\int ■^{n}\, d■ = \frac{1}{n+1} ■^{n+1} + C$, sebagai pola sederhana dari bentuk formal Integral $\int (f(x))^{n}\, df(x) = \frac{1}{n+1} (f(x))^{n+1} + C$.

Penggunaan kotak hitam dalam proses penarikan Integral memudahkan peserta didik untuk menggunakan pemahaman relasionalnya dalam melaksanakan penarikan Integral, berdasarkan *model of* definisi fungsi bahwa jika $f(x) = ax + b$ maka $f(■) = a■ + b$.

Peserta didik pada tahap keenam menggunakan pemahaman relasional dalam memanfaatkan konteks tentang Diferensial dari fungsi hasil perkalian sebagai sarana untuk memahami materi tentang Integral Parsial. Alasan pemilihan konteks pada tahap keenam ini adalah peserta didik telah dapat membayangkan konsep Diferensial dari fungsi hasil perkalian.

Tujuan dari tahap pertama kegiatan pembelajaran ini adalah untuk membangun pemahaman terhadap konsep penarikan Integral melalui pemahaman relasional bahwa Integral adalah Antidiferensial. Konsep tentang Diferensial telah dimiliki peserta didik, sehingga dapat menjadi konteks sebagai sarana memahami Integral sebagai Antidiferensial. Konteks pada tahap ini akan diawali dengan membandingkan beberapa persamaan fungsi *polynomial* yang hanya berbeda pada nilai konstantanya.

Peserta didik melaksanakan aktivitas mencari fungsi hasil penarikan Diferensial dari fungsi yang diberikan. Kemudian dengan pertanyaan untuk melihat kesamaan dari hasil semua Diferensial fungsinya, peserta didik diharapkan dapat melihat pola secara mandiri dari masing-masing fungsi hasil penarikan Diferensial bahwa ternyata fungsi hasil Diferensial yang fungsi asalnya hanya berbeda nilai konstantanya, semua fungsi hasil Diferensialnya sama.

Selanjutnya peserta didik diarahkan untuk bekerja dari belakang (*working backward*), menggunakan pola fungsi hasil penarikan Diferensial untuk menemukan kembali fungsi hasil penarikan Antidiferensial, dengan memanfaatkan pemahaman relasional tentang suatu konstanta umum yang harus ditambahkan pada setiap fungsi hasil penarikan Antidiferensial.

Pendidik kemudian memperkenalkan konsep formal dari penarikan Antidiferensial sebagai Integral dengan lengkap notasi formalnya, setelah peserta didik berhasil menemukan kembali fungsi hasil penarikan Antidiferensial secara mandiri. Kegiatan kemudian dilanjutkan dengan tahap kedua yang tujuannya adalah menggunakan definisi bahwa jika kurva $F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0$ melalui titik (x, y) sebagai konteks, maka dengan menggunakan pemahaman bahwa $a_0 x^0 = C$ selanjutnya peserta didik dapat menentukan nilai C, pada fungsi hasil penarikan Integral yang melalui titik (x, y).

Tujuan dari kegiatan pembelajaran pada tahap ketiga adalah dengan memanfaatkan pemahaman relasional tentang luas suatu daerah, peserta didik dapat menemukan kembali hubungan antara luas suatu daerah dengan limit penjumlahan luas daerah-daerah persegi panjang yang masing-masing lebarnya mendekati nol pada interval $a \leq x \leq b$, dengan menyajikan masalah kontekstual menutup daerah dinding pameran dengan *wall paper*.

Pemilihan masalah kontekstual menutup daerah dinding pameran dengan *wall paper* pada pembelajaran awal di tahap ketiga ini didasarkan pada penelitian oleh Kizito (2012) dan Attorps (2013), yang menggunakan penjumlahan Riemann untuk menutup daerah di bawah kurva pada diagram Cartesius. Alasan penggunaan konteks menutup daerah dinding pameran dengan *wall paper*:

1. Ada dalam kehidupan sehari-hari peserta didik, sehingga menarik perhatian dan mampu membangkitkan motivasi peserta didik untuk belajar matematika.
2. Posisi *wall paper* menutupi dinding adalah sama dengan posisi daerah-daerah persegi panjang yang menutupi daerah kurva pada diagram Cartesius, untuk kemudian memanfaatkan penjumlahan Riemann.

3. Memanfaatkan pengetahuan awal peserta didik mengenai luas, dan mengarahkan peserta didik untuk memanfaatkan pemahaman relasionalnya untuk menghubungkan pemahaman peserta didik dengan aneka pendekatan untuk menemukan konsep luas yang telah dimiliki peserta didik.
4. Sebagai titik awal pembangunan konsep luas adalah jumlah limit tak berhingga pada interval tertentu, yang mengarah ke konsep Integral Tertentu.

Tujuan penggunaan konteks menutup daerah dinding pameran dengan *wall paper*, adalah dapat melibatkan peserta didik secara aktif untuk melakukan kegiatan eksplorasi permasalahan. Aktivitas menutup daerah dinding pameran, dilanjutkan dengan pengisian tabel hasil kali Δx_i dengan $F(c_i)$, yang memberikan kesempatan pada peserta didik untuk menemukan kesimpulan secara mandiri.

Peserta didik mendapatkan *guided reinvention* melalui aktivitas menghitung masing-masing luas *wall paper* untuk mengembangkan berbagai strategi penyelesaian masalah tentang luas daerah. Proses penutupan luas daerah dinding *wall paper* tersebut, memberikan kesempatan bagi peserta didik untuk memanfaatkan pemahaman relasionalnya tentang skala, maka satu meter diwakili oleh satu satuan panjang dari grafik.

Aktivitas menggunakan grafik dengan menggunakan skala di atas adalah untuk memudahkan proses aktivitas penutupan daerah dinding pameran. Jika tidak menggunakan skala maka kegiatan akan terkendala dengan daerah untuk ditutup yang terlalu besar. Grafik tersebut juga merupakan suatu *model of* yang membantu proses matematisasi peserta didik menuju pengetahuan formal.

Tahap keempat pada *Design Research* ini bertujuan untuk mengetahui, membangun, dan mengembangkan konsep jika $F(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + C$ maka notasi $F(b)$ artinya adalah mensubstitusikan nilai b ke setiap variabel x, yang dinotasikan sebagai $F(b) = a_n b^n + \cdots + a_1 b^1 + C$.

Masalah kontekstual yang disajikan di awal tahap keempat ini adalah definisi fungsi yang sudah menjadi pengetahuan yang dapat dibayangkan oleh peserta didik. Peserta didik diharapkan dapat menemukan pemahaman tentang ide $F(b) - F(a)$ secara geometris pada diagram Cartesius dengan memanfaatkan pemahaman relasional tentang definisi fungsi dari nilai $F(a)$.

Tahap kelima bertujuan untuk mendapatkan pemahaman tentang Integral dengan metode substitusi dengan menggunakan definisi Integral yang sudah ditemukan kembali pada pertemuan pertama. Selanjutnya, dengan memanfaatkan pola dari tiap hasil penarikan Integral, peserta didik dibimbing untuk menemukan kembali secara mandiri bahwa $\int \blacksquare^n d\blacksquare = \frac{1}{n+1} \blacksquare^{n+1} + C$. Peserta didik dapat memahami bahwa proses penarikan Integral di atas dapat berlaku untuk fungsi yang diintegralkan harus sama dengan fungsi faktor penarikan Integralnya. Secara sederhana, pada rumus di atas, ada tiga kotak hitam, maka jika kotak hitam pertama disubstitusi dengan $F(x)$, maka kotak hitam kedua dan ketiga juga harus disubstitusi dengan $F(x)$.

Peserta didik diarahkan untuk menemukan secara mandiri manipulasi aljabar yang diperlukan, setelah peserta didik memahami pola pada definisi substitusi pada suatu definisi Integral. Hal ini dilakukan dengan memanfaatkan pengetahuan yang sudah dimiliki antara lain pengetahuan penarikan Diferensial.

Kegiatan pembelajaran dilanjutkan dengan tahap keenam yaitu memberikan kesempatan kepada peserta didik untuk menggunakan konsep Diferensial dari fungsi hasil perkalian, kemudian dengan manipulasi aljabar mengarah pada bentuk Integral Parsial

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Rumus 2.3. Integral Parsial

Aktivitas kegiatan pembelajaran dalam *Design Research* ini dilakukan dengan diskusi berkelompok yang menekankan pada interaksi sosial antar peserta didik dengan peserta didik, juga antar peserta didik dengan pendidik untuk mendukung secara optimal proses belajar masing-masing peserta didik.