METODE DIFERENSIAL NEWTON-COTES TERTUTUP UNTUK INTEGRASI *LONG-TIME*

Skripsi
Disusun untuk melengkapi syarat-syarat
guna memperoleh gelar Sarjana Sains

NURUL HASANAH
3125080171

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA
2013

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

METODE DIFERENSIAL NEWTON-COTES TERTUTUP UNTUK INTEGRASI *LONG-TIME*

Nama : Nurul Hasanah

No. Registrasi : 3125080171

		Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab				
Dekan	:	Dra. Marheni, M.Sc.	....	....
		NIP. 19500606 197412 2 001		
Wakil Penanggung Jawab				
Pembantu Dekan I	:	Dr.rer.nat.Apriliana L.F.,M.S.,M.Ed.	....	....
		NIP. 19600408 199003 2 002		
Ketua	:	Dra. Widyanti Rahayu, M.Si.	....	....
		NIP. 19661103 200112 2 001		
Sekretaris	:	Ratna Widyati, M.Kom.	....	....
		NIP. 19750925 200212 2 002		
Penguji	:	Drs. Sudarwanto, M.Si., DEA.	....	....
		NIP. 19650325 199303 1 003		
Pembimbing I	:	Drs. Mulyono, M.Kom.	....	....
		NIP. 19660517 199403 1 003		
Pembimbing II	:	Med Irzal, M.Kom.	....	....
		NIP. 19770615 200312 1 001		

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal: 28 Januari 2013

ABSTRACT

NURUL HASANAH, 3125080171. Closed Newton-Cotes Differential methods for Long-Time Integration. Thesis. Faculty of Mathematics and Natural Science Jakarta State University. 2013.

Differential equations with long-time integration is an equation that requires a long integration time period to get the solution. It causes would be hard to find the solution in an analytical way. To overcome these problems, we used a numerical method that is symplectic which is characteristic of a Hamiltonian system. Closed Newton-Cotes differential methods will be symplectic evidenced by converting the method into matrix which has symplectic structure so it can be expressed as symplectic integrators. After proven to be symplectic, Closed Newton-Cotes differential methods will be applied to solving the example problems with long-time integration.

Keywords : Hamiltonian System, Simplectic Integrators, Closed Newton-Cotes diferential Methods.

ABSTRAK

NURUL HASANAH, 3125080171. Metode Diferensial Newton-Cotes Tertutup untuk Integrasi *Long-Time*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. 2013.

Persamaan diferensial dengan integrasi *long-time* merupakan persamaan yang memerlukan periode waktu integrasi yang panjang untuk mendapatkan hasil solusinya. Hal ini menyebabkan akan sulit ditemukan penyelesaiannya apabila menggunakan cara analitik. Untuk mengatasi masalah tersebut, maka digunakan suatu metode numerik dengan sifat simplektik yang merupakan kharakteristik dari suatu sistem Hamiltonian. Metode diferensial Newton-Cotes tertutup akan dibuktikan bersifat simplektik dengan cara mengkonversikan metode tersebut kedalam matriks yang memiliki struktur simplektik sehingga dapat dinyatakan sebagai integrator simplektik. Setelah dibuktikan bersifat simplektik, metode diferensial Newton-Cotes tertutup akan diterapkan dalam penyelesaian contoh soal dengan integrasi *long-time*.

Kata kunci : Sistem Hamilonian, Integrator Simplektik, Metode Diferensial Newton-Cotes Tertutup.

PERSEMBAHANKU...

Alhamdulillah selalu ku panjatkan,
atas nikmat yang tiada henti Engkau berikan kepadaku.
Engkau mengajariku arti kesabaran.. keikhlasan..
Di setiap lembar yang ku kerjakan.
Terima kasih ya Allah..

"Barang siapa berjalan untuk menuntut ilmu, maka Allah akan memudahkan baginya jalan ke surga"
(H.R. Muslim)

Skripsi ini kupersembahkan untuk.... orangtuaku dan kakak-kakakku
yang telah bekerja keras dan mendoakan keberhasilanku..
"Terima kasih atas segala kasih sayang kalian ".

KATA PENGANTAR

Syukur Alhamdulillah penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas karunia dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Metode Diferensial Newton-Cotes Tertutup untuk Integrasi *Long-Time*" yang merupakan salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Jurusan Matematika Universitas Negeri Jakarta.

Skripsi ini tidak dapat terwujud apabila tidak mendapat bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada:

1. Bapak Drs. Mulyono, M.Si. selaku Dosen Pembimbing I dan Bapak Med Irzal, M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu memberikan bimbingan, nasehat, saran, dan dukungan dengan penuh kesabaran dan keikhlasan kepada penulis selama penulisan skripsi ini.

2. Bapak Prof. Dr. Suyono, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNJ dan Ibu Ratna Widyanti, M.Kom. selaku Ketua Prodi Matematika FMIPA UNJ. Terima kasih atas segala bantuan Bapak dan Ibu selama penulisan skripsi ini.

3. Ibu Ir. Fariani Hermin M.T, selaku Dosen Pembimbing Akademis yang dengan sabar membimbing dalam menyeesaikan kegiatan akademis.

4. Seluruh Bapak/Ibu dosen atas pengajaran yang telah diberikan, serta Ibu Lastri dan karyawan/karyawati FMIPA UNJ yang telah memberikan informasi yang penulis butuhkan dalam menyelesaikan skripsi ini.

5. Keluarga tercinta, Bapak, Mas Didit, Mba Anti, Mas Windo, Naya, serta Iik, yang selalu mendukung, mendoakan, dan menyemangati penulis sehingga penulis selalu termotivasi untuk menyelesaikan skripsi ini.

6. Sahabat-sahabat tersayang, Erlyn Annisa, Fara Ariestya, Metta Melinda, Putri Rindi Muttia, Renita Rachmawati, dan Richi Anggraeni yang selalu senantiasa ikhlas membantu dan mengingatkan ketika salah. Terima kasih kalian telah memberikan arti sebuah persahabatan dan perjuangan.

7. Adhe, Dito, Nia, Ijal, Ojat, Aji, Ipin, serta teman-teman Matematika 2008 lainnya. Terima kasih atas segala bantuan yang telah diberikan dalam penulisan skripsi ini dan kebersamaan yang telah terjalin selama ini.

8. Adzni, Amelia, Aulia, Cindy, Desti, Dewi, Dwi Ratna, Genisha, Pardiyanti, Rechita, dan Windu yang selalu memberikan semangat dan ada untuk penulis disaat apapun. Terima kasih pula untuk Ibu, Mba Ita, Aa, dan Ican yang selalu memberikan nasehat dan dukungan kepada penulis

9. Semua pihak yang membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Masukan dan kritikan akan sangat membantu agar menjadi lebih baik. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca semua.

Jakarta, Februari 2013

Nurul Hasanah

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Persamaan diferensial merupakan salah satu bidang minat matematika yang relatif banyak dipakai dan mempunyai aplikasi yang cukup luas dalam berbagai ilmu. Beberapa fenomena yang terdapat dalam bidang ilmu ekonomi, teknik, pertanian, biologi, dan lain sebagainya yang dimodelkan ke dalam model matematika dalam suatu sistem persamaan diferensial linier maupun non linier dapat diselesaikan secara analitik maupun secara numerik. Persamaan diferensial linier merupakan persamaan diferensial dengan fungsi yang tidak diketahui dan turunannya berpangkat satu. Apabila fungsi yang tidak diketahui dan turunannya berpangkat selain satu maka persamaan diferensial tersebut merupakan persamaan diferensial non linier.

Salah satu contoh dari persamaan diferensial adalah sistem Hamiltonian. Sistem Hamiltonian merupakan persamaan diferensial non linier yang terdapat dalam *celestial* mekanik. Dalam mencari solusi dari sistem Hamiltonian dengan cara analitik, diperlukan periode waktu pengintegrasian yang panjang, sehingga sistem Hamiltonian termasuk dalam persamaan yang disebut integrasi *long-time*. Karena akan sulit mencari solusi persamaan dengan integrasi *long-time*, maka penggunaan metode alternatif dilakukan untuk mengatasi masalah tersebut.

Sistem Hamiltonian mempunyai sifat penting bahwa arus yang diinduksi adalah simplektik, sehingga untuk menyelesaikan suatu integrasi dengan periode waktu yang panjang seperti persamaan dalam sistem Hamiltonian diperlukan integrator yang bersifat simplektik. Integrator Simplektik biasa dikaitkan dengan skema numerik, jadi metode numerik dapat digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial dengan integrasi *long-time*, tetapi hanya metode numerik yang bersifat simplektik sehingga metode tersebut dapat dinyatakan sebagai integrator simplektik (Uri M. Ascher, 2008). Selain sistem Hamiltonian terdapat persamaan-persamaan diferensial lain yang tergolong dalam integrasi *long-time* seperti persamaan Duffing dan persamaan Stiefel dan Betis.

Metode diferensial Newton-Cotes tertutup memiliki kharakteristik dari struktur simplektik sehingga metode tersebut diduga dapat dinyatakan sebagai integrator simplektik yang dapat menyelesaikan suatu persamaan diferensial dengan integrasi *long-time*. Metode diferensial Newton-Cotes tertutup berasal dari formula integrasi Newton-Cotes tertutup, yaitu untuk Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan 1 pias ($k = 1$) berasal dari aturan trapesium, 2 pias ($k = 2$) berasal dari aturan Simpson 1/3, 3 pias ($k = 3$) berasal dari aturan Simpson 3/8, dan 4 pias ($k = 4$) berasal dari aturan Boole. Semakin banyak pias dalam metode diferensial Newton-Cotes tertutup maka akan menghasilkan solusi yang lebih akurat.

Dalam tulisan ini akan dibuktikan bahwa metode diferensial Newton-Cotes tertutup bersifat simplektik sehingga dapat dinyatakan sebagai integrator simplektik, selain itu metode diferensial Newton-Cotes tertutup juga akan diterapkan dalam menyelesaikan persamaan-persamaan dengan integrasi *long-time*.

1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah yang akan dikaji dalam penulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana membuktikan metode diferensial Newton-Cotes tertutup bersifat simplektik sehingga dapat dinyatakan sebagai integrator simplektik?
2. Bagaimana penerapan metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan 4 pias ($k = 4$) dalam menyelesaikan persamaan dengan integrasi *long-time*?

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam tulisan ini, dibatasi pada membuktikan metode diferensial Newton-Cotes tertutup untuk 1 pias ($k = 1$), 2 pias ($k = 2$), 3 pias ($k = 3$), dan 4 pias ($k = 4$) bersifat simplektik sehingga dapat dinyatakan sebagai integrator simplektik dan penggunaan metode diferential Newton-Cotes tertutup dengan 4 pias ($k = 4$) dalam persamaan diferensial dengan integrasi *long-time*.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan yang ingin dicapai dalam penulisan ini adalah:

1. Memperlihatkan bahwa metode diferensial Newton-Cotes tertutup dapat dikonversi menjadi struktur simplektik sehingga metode diferensial Newton-Cotes tertutup dapat dinyatakan sebagai integrator simplektik.
2. Membahas aplikasi metode diferensial Newton-Cotes tertutup dalam menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial dengan integrasi *long-time*.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari penulisan ini adalah :

1. Bagi penulis, dapat mengaplikasikan serta memperdalam pengetahuan dan teori mengenai skema simplektik dan metode diferensial Newton-Cotes tertutup.

2. Bagi pihak lain, dapat dijadikan sebagai salah satu referensi dan informasi tambahan dalam melakukan penelitian dan kajian lebih lanjut mengenai metode numerik.

1.6 Metode Penelitian

Skripsi ini merupakan kajian teori tentang metode numerik yang didasarkan pada buku-buku dan jurnal-jurnal tentang metode diferensial Newton-Cotes tertutup.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Sistem Hamiltonian

Sistem Hamiltonian dari persamaan diferensial dengan fungsi Hamiltonian $H(\mathbf{q},\mathbf{p})$(dengan $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_n)$ dan $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$), diberikan oleh:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{2.1}$$

dimana $\dot{q}_i$ merupakan turunan terhadap q_i dan $\dot{p}_i$ merupakan turunan terhadap p_i dengan $i = 1, 2, ..., n$. Vektor $\mathbf{q}$ merupakan koordinat dari komponen dalam sistem, dan $\mathbf{p}$ merupakan momentum. Hamiltonian H merupakan total energi mekanik yaitu jumlah dari energi kinetik dan energi potensial.

Contoh 2.1.1 (Osilator Harmonik). Osilator harmonik merupakan sistem massa pegas dengan energi kinetik $\frac{p^2}{2m}$ dan energi potensial $\frac{1}{2}kq^2$. Karena Hamiltonian merupakan total energi mekanik, maka

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \tag{2.2}$$

dimana m dan k merupakan konstanta positif. Sistem Hamiltonian dengan fungsi

Hamiltonian (2.2) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq\end{aligned}$$

Solusi umum dari q adalah sebuah osilasi, yaitu:

$$q(t) = C_1 sin(\omega t + C_2), \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

dengan frekuensi angular ω, serta C_1 dan C_2 konstanta integrasi. Solusi umum dari p yaitu:

$$p(t) = m\omega C_1 cos(\omega t + C_2)$$

Solusi khusus yang memerlukan nilai awal $(p(0), q(0))$ di titik $t = 0$ ditulis dalam bentuk matriks, sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -m\omega\sin\omega t \\ (m\omega)^{-1}\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

2.1.1 Skema Simplektik

Simplektik merupakan kharakteristik dari sistem Hamiltonian. Itegrator simplektik merupakan suatu metode yang memiliki sifat simplektik yang dapat menyelesaikan persamaan dengan integrasi *long-time*. Suatu metode numerik dapat dinyatakan sebagai integrator simplektik apabila metode tersebut dapat dibuktikan bersifat simplektik. Dalam membuktikan suatu metode numerik bersifat simplektik, metode tersebut harus dikonversikan terlebih dahulu menjadi persamaan matriks yang memiliki struktur simplektik.

Menurut Zhu et al (1996), persamaan diskrit paling sederhana dalam sistem kuantum yang memiliki struktur simplektik adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= e_{n+1}p_n + f_{n+1}q_n \\ q_{n+1} &= g_{n+1}p_n + h_{n+1}q_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = M_{n+1} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}, \qquad M_{n+1} = \begin{pmatrix} e_{n+1} & f_{n+1} \\ g_{n+1} & h_{n+1} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Persamaan matriks (2.4) adalah skema simplektik apabila matriks M_{n+1} simplektik. Sebuah matriks A adalah simplektik jika $A^T JA = J$, dimana

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan persamaan matriks (2.4), maka dapat ditulis aproksimasi n langkah untuk solusi sebagai:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e_n & f_n \\ g_n & h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{n-1} & f_{n-1} \\ g_{n-1} & h_{n-1} \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} &= M_n M_{n-1} ... M_1 \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Didefinisikan,

$$S = M_n M_{n-1} ... M_1 = \begin{pmatrix} E_n & F_n \\ G_n & H_n \end{pmatrix}$$

Maka, persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai:

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

Hasil kali dari matriks simplektik dengan matriks simplektik lainnya akan menghasilkan matriks yang juga simplektik. Sehingga, jika setiap matriks M_n simplektik maka matriks S akan simplektik. Akibatnya, persamaan matriks (2.4) akan simplektik jika setiap matriks M_n simplektik. Apabila persamaan matriks (2.4) telah terbukti bersifat simplektik, maka metode numerik yang telah dikonversikan menjadi persamaan matriks tersebut juga akan bersifat simplektik.

2.2 Formula Integrasi Newton-Cotes

Formula Newton-Cotes adalah skema integrasi numerik yang paling umum digunakan. Formula ini didasarkan pada strategi penggantian suatu fungsi yang rumit atau data yang ditabulasikan dengan beberapa fungsi aproksimasi yang mudah diintegrasi, yaitu sebagai berikut:

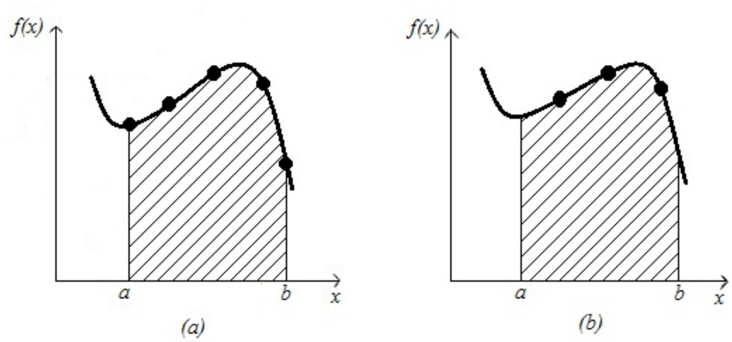
$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_m(x)dx \tag{2.6}$$

dimana $p_m(x)$ merupakan polinomial dari bentuk,

$$p_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{m-1}x^{m-1} + a_m x^m$$

dimana m merupakan derajat dari polinomial tersebut.

Formula Newton-Cotes terbagi menjadi dua bentuk, yaitu Newton-Cotes tertutup dan Newton-Cotes terbuka. Bentuk tertutup adalah bentuk dimana titik-titik data pada awal dan akhir dari batas integrasi telah diketahui, sedangkan bentuk terbuka memiliki batas-batas integrasi yang diperluas di luar bentangan data. Formula Newton-Cotes terbuka umumnya tidak digunakan untuk mendefinisikan integrasi, tetapi formula ini dimanfaatkan secara ekstensif untuk solusi persamaan-persamaan diferensial biasa (Chapra dan Canale, 2006).



Gambar 2.1: Perbedaan antara (a) Newton-Cotes tertutup dengan (b) Newton-Cotes terbuka.

2.2.1 Formula Newton-Cotes Tertutup

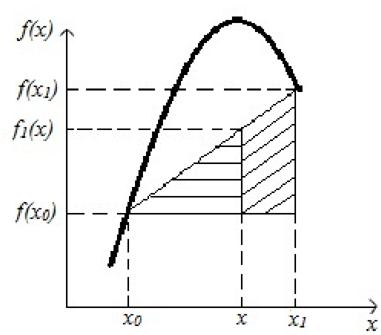
Dalam formula Newton-Cotes tertutup, terdapat beberapa aturan yang didasarkan atas banyaknya pias yang terdapat dalam fungsi atau data, Pada tulisan ini akan dibahas empat aturan yaitu aturan trapesium dengan 1 pias, aturan Simpson 1/3 dengan 2 pias, aturan Simpson 3/8 dengan 3 pias, dan aturan Boole dengan 4 pias.

1. **Aturan Trapesium**

Sebelum membahas aturan trapesium, terlebih dahulu akan dibahas sedikit mengenai interpolasi linier yang akan digunakan dalam mencari formula dalam aturan trapesium. Interpolasi linier merupakan interpolasi dengan bentuk paling sederhana yang menghubungkan dua titik data dengan garis lurus, seperti pada gambar (2.2). Formula interpolasi linier ditulis sebagai:

$$\begin{aligned}\frac{f_1(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \\ f_1(x) &= f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0) \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Notasi $f_1(x)$ menandakan interpolasi linier merupakan interpolasi polinomial derajat satu.



Gambar 2.2: Interpolasi Linier

Aturan trapesium merupakan formula pertama dari formula integrasi Newton-Cotes tertutup. Aturan trapesium berhubungan dengan kasus dimana polinomial dalam persamaan (2.6) berderajat satu $p_1(x)$, yaitu sebagai berikut:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_1(x)dx$$

dimana

$$p_1(x) = c_0 + c_1 x$$

Aturan trapesium diperoleh dengan mengintegralkan persamaan garis lurus (2.7) dari interpolasi linier, yaitu:

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b f_1(x)dx \\
&= \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right] dx \\
&= \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x - \frac{af(b)-af(a)}{b-a} \right] dx \\
&= \int_a^b \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{f(a)(b-a)}{b-a} - \frac{af(b)-af(a)}{b-a} \right] dx \\
&= \int_a^b \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} \right] dx \\
&= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{x^2}{2} + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}x \Big|_a^b \\
&= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(b^2-a^2)}{2} + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}(b-a) \\
&= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(b-a)(b+a)}{2} + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}(b-a) \\
&= f(b)-f(a)\frac{(b+a)}{2} + bf(a) - af(b) \\
&= \frac{bf(b)+af(b)-bf(a)-af(a)+2bf(a)-2af(b)}{2} \\
&= \frac{bf(a)+bf(b)-af(a)-af(b)}{2} \\
&= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Persamaan (2.8) disebut aturan trapesium.

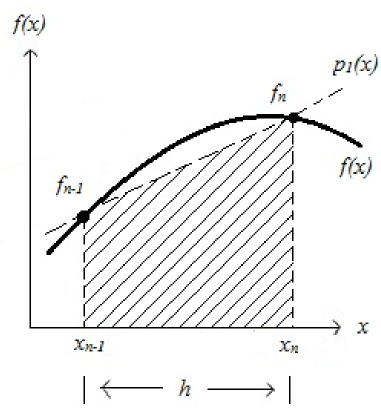
Secara geometrik, aturan trapesium adalah ekuivalen dengan mengaproksimasikan luas trapesium di bawah garis lurus yang menghubungkan $f(a)$ dan $f(b)$, seperti pada gambar (2.3). Sehingga, estimasi integral dapat dinyatakan sebagai,

$$\begin{aligned} I &\cong \text{lebar} \times \text{tinggi rata-rata} \\ I &\cong (b-a) \times \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned}$$

Asumsikan bahwa $a \leq x_n < x_{n+1} \leq b$ dengan kedua titik data (x_n, f_n), dan (x_{n+1}, f_{n+1}), maka persamaan (2.8) akan menjadi:

$$I = \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$$

dimana $h = b - a$.



Gambar 2.3: Aturan Trapesium

2. **Aturan Simpson 1/3**

Aturan Simpson 1/3 merupakan formula kedua dari formula integrasi Newton-Cotes tertutup sehingga terdapat tiga titik data dalam Aturan Simpson 1/3. Aturan Simpson 1/3 diperoleh dengan cara menyelesaikan persamaan integral (2.6) dengan pendekatan fungsi $f(x)$ oleh fungsi polinomial berderajat dua $p_2(x)$, yaitu:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_2(x)dx \tag{2.9}$$

dengan

$$p_2(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 \tag{2.10}$$

Asumsikan bahwa $a \leq x_{n-1} < x_n < x_{n+1} \leq b$ dan ketiga titik data (x_{n-1}, f_{n-1}), (x_n, f_n), dan (x_{n+1}, f_{n+1}). Konstanta c_0, c_1, dan c_2 dapat dicari dengan mengambil titik asal pada x_n, sehingga untuk titik-titik x_{n-1}, x_n, dan x_{n+1} masing-masing dapat disubtitusikan dengan nilai $x = -h$, $x = 0$, dan $x = h$ ke dalam persamaan (2.10), yaitu sebagai berikut:
untuk x_{n-1},

$$\begin{aligned} p_2(x=-h) = f_{n-1} &= c_0 + c_1(-h) + c_2(-h)^2 \\ &= c_0 - c_1h + c_2h^2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

untuk x_n,

$$\begin{aligned} p_2(x=0) = f_n &= c_0 + c_1(0) + c_2(0)^2 \\ &= c_0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

untuk x_{n+1},

$$\begin{aligned} p_2(x=h)=f_{n+1} &= c_0+c_1(h)+c_2(h)^2 \\ &= c_0+c_1h+c_2h^2 \qquad (2.13) \end{aligned}$$

dari persamaan (2.11) hingga (2.13) diperoleh:

$$c_0 = f_n \qquad (2.14)$$

$$c_1 = \frac{-f_{n-1}+f_{n+1}}{2h} \qquad (2.15)$$

$$c_2 = \frac{f_{n-1}-2f_n+f_{n+1}}{2h^2} \qquad (2.16)$$

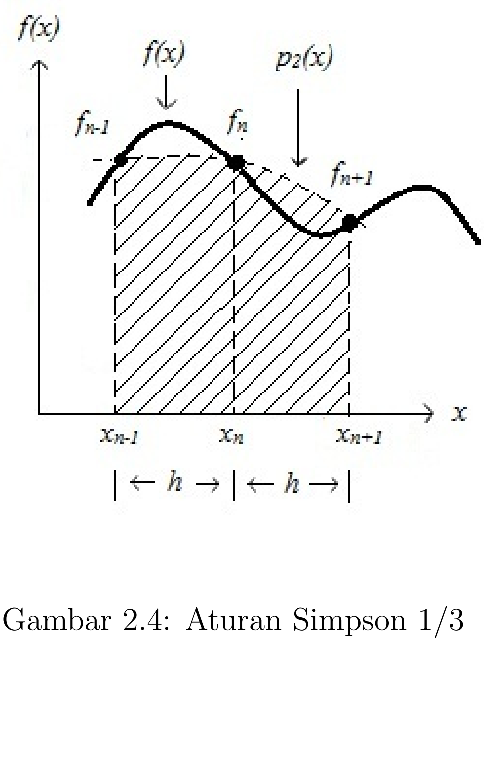
setelah konstanta c_0, c_1, dan c_2 diperoleh, maka persamaan (2.9) dapat dicari, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} I=\int_a^b f(x)dx &\cong \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} P_2(x)dx \\ &= \int_{-h}^{h}(c_0+c_1x+c_2x^2)dx \\ &= c_0x+\frac{c_1}{2}x^2+\frac{c_2}{3}x^3\Big|_{-h}^{h} \\ &= \left(c_0h+\frac{c_1}{2}h^2+\frac{c_2}{3}h^3\right)-\left(-c_0h+\frac{c_1}{2}h^2-\frac{c_2}{3}h^3\right) \\ &= 2c_0h+\frac{2}{3}c_2h^3 \qquad (2.17) \end{aligned}$$

subtitusikan c_0 dan c_2 dari persamaan (2.14) hingga (2.16) ke dalam persamaan (2.17), sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
I &= 2c_0h + \frac{2}{3}c_2h^3 \\
&= 2hf_n + \frac{2}{3}h^3\left(\frac{f_{n+1} - 2f_n + f_{n+1}}{2h^2}\right) \\
&= \frac{12hf_n + 2hf_{n-1} - 4hf_n + 2hf_{n+1}}{6} \\
&= \frac{2hf_{n-1} + 8hf_n + 2hf_{n+1}}{6} \\
&= \frac{2h}{6}(f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1}) \\
I &= \frac{h}{3}(f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1}) \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

dimana $h = (b - a)/2$. Persamaan (2.18) disebut dengan aturan Simpson 1/3.



Gambar 2.4: Aturan Simpson 1/3

3. **Aturan Simpson 3/8**

Aturan Simpson 3/8 diperoleh dengan cara yang sama dengan aturan Simpson 1/3 yaitu dengan cara menyelesaikan persamaan integral (2.6) dengan pendekatan fungsi $f(x)$ oleh fungsi polinomial, tetapi untuk aturan Simpson 3/8 digunakan polinomial berderajat tiga $p_3(x)$, yaitu:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_3(x)dx \tag{2.19}$$

dengan

$$p_3(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \tag{2.20}$$

Asumsikan bahwa $a \leq x_{n-1} < x_n < x_{n+1} < x_{n+2} \leq b$, konstanta c_0, c_1, c_2, dan c_3 dapat dicari dengan membuat polinomial tersebut melewati empat titik (x_{n-1}, f_{n-1}), (x_n, f_n), (x_{n+1}, f_{n+1}), dan (x_{n+2}, f_{n+2}) dan dengan mengambil titik asal pada x_n, maka untuk titik-titik x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, dan x_{n+2} masing-masing dapat disubtitusikan dengan nilai $x = -h$, $x = 0$, $x = h$, dan $x = 2h$, ke dalam persamaan (2.20), yaitu sebagai berikut:
untuk x_{n-1},

$$\begin{aligned} P_3(x=-h) = f_{n-1} &= c_0 + c_1(-h) + c_2(-h)^2 + c_3(-h)^3 \\ &= c_0 - c_1 h + c_2 h^2 - c_3 h^3 \end{aligned} \tag{2.21}$$

untuk x_n,

$$\begin{aligned} p_3(x=0) = f_n &= c_0 + c_1(0) + c_2(0)^2 + c_3(0)^3 \\ &= c_0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

untuk x_{n+1},

$$\begin{aligned} p_3(x=h) = f_{n+1} &= c_0 + c_1(h) + c_2(h)^2 + c_3(h)^3 \\ &= c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 \end{aligned} \tag{2.23}$$

untuk x_{n+2},

$$\begin{aligned} p_3(x=2h) = f_{n+2} &= c_0 + c_1(2h) + c_2(2h)^2 + c_3(2h)^3 \\ &= c_0 + 2c_1 h + 4c_2 h^2 + 8c_3 h^3 \end{aligned} \tag{2.24}$$

dari persamaan (2.21) hingga (2.24) diperoleh:

$$c_0 = f_n \tag{2.25}$$

$$c_1 = \frac{1}{6h}(-2f_{n-1} - 3f_n + 6f_{n+1} - f_{n+2}) \tag{2.26}$$

$$c_2 = \frac{1}{2h^2}(f_{n-1} - 2f_n + f_{n+1}) \tag{2.27}$$

$$c_3 = \frac{1}{6h^3}(-f_{n-1} + 3f_n - 3f_{n+1} + f_{n+2}) \tag{2.28}$$

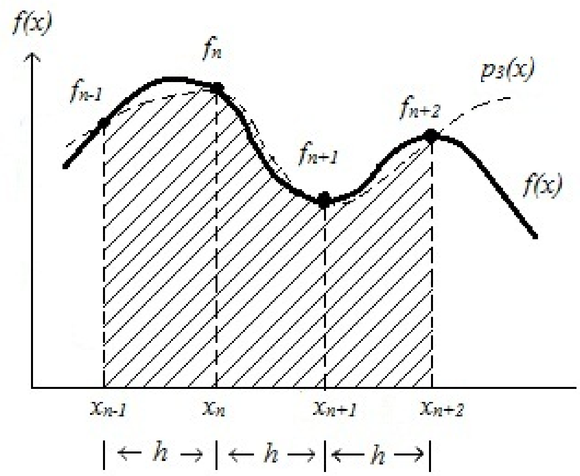
setelah konstanta c_0, c_1, c_2, dan c_3 diperoleh, maka persamaan (2.19) dapat dicari, yaitu sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
I = \int_a^b f(x)dx &\cong \int_{x_{n-1}}^{x_{n+2}} P_3(x)dx \\
&= \int_{-h}^{2h} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3)dx \\
&= c_0 x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{3}x^3 + \frac{c_3}{4}x^4 \Big|_{-h}^{2h} \\
&= \left(2c_0 h + 4\frac{c_1}{2}h^2 + 8\frac{c_2}{3}h^3 + 16\frac{c_3}{4}h^4\right) \\
&\quad - \left(-c_0 h + \frac{c_1}{2}h^2 - \frac{c_2}{3}h^3 + \frac{c_3}{4}h^4\right) \\
&= 3c_0 h + 3\frac{c_1}{2}h^2 + 9\frac{c_2}{3}h^3 + 15\frac{c_3}{4}h^4 \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

subtitusikan c_0, c_1, c_2, dan c_3 dari persamaan (2.25) hingga (2.28) ke dalam persamaan (2.29), sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
I &= 3c_0 h + 3\frac{c_1}{2}h^2 + 9\frac{c_2}{3}h^3 + 15\frac{c_3}{4}h^4 \\
&= 3hf_n + \frac{3h^2}{2}\left(\frac{-2f_{n-1} - 3f_n + 6f_{n+1} - f_{n+2}}{6h}\right) \\
&\quad +3h^3\left(\frac{f_{n-1} - 2f_n + f_{n+1}}{2h^2}\right) + \frac{15h^4}{4}\left(\frac{-f_{n-1} + 3f_n - 3f_{n+1} + f_{n+2}}{6h^3}\right) \\
&= \frac{24hf_n}{8} + \frac{-4hf_{n-1} - 6hf_n + 12hf_{n+1} - 2hf_{n+2}}{8} \\
&\quad + \frac{12hf_{n-1} - 24hf_n + 2hf_{n+1}}{8} + \frac{-5f_{n-1} - 15hf_{n+1} + 5hf_{n+2}}{8} \\
&= \frac{3hf_{n-1} + 9hf_n + 9hf_{n+1} + 3hf_{n+2}}{8} \\
I &= \frac{3h}{8}(f_{n-1} + 3f_n + 3f_{n+1} + f_{n+2}) \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

dimana $h = (b - a)/3$. Persamaan (2.30) disebut dengan aturan Simpson 3/8 yang merupakan formula ketiga dari formula integrasi Newton-Cotes tertutup.



Gambar 2.5: Aturan Simpson 3/8

4. **Aturan Boole**

Aturan Boole diperoleh dengan cara yang sama dengan aturan-aturan Simpson 1/3 dan Simpson 3/8 yaitu dengan cara menyelesaikan persamaan integral (2.6) dengan pendekatan fungsi $f(x)$ oleh fungsi polinomial, tetapi untuk aturan Boole digunakan polinomial berderajat empat $p_4(x)$, yaitu:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_4(x)dx \tag{2.31}$$

dengan

$$p_4(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4^4 \tag{2.32}$$

Asumsikan bahwa $a \leq x_{n-2} < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} < x_{n+2} \leq b$, konstanta c_0, c_1, c_2, c_3, dan c_4 dapat dicari dengan membuat polinomial tersebut melewati lima titik (x_{n-2}, f_{n-2}), (x_{n-1}, f_{n-1}), (x_n, f_n), (x_{n+1}, f_{n+1}), dan (x_{n+2}, f_{n+2}) dan dengan mengambil titik asal pada x_n, maka untuk titik-titik x_{n-2}, x_{n-1},

x_n, x_{n+1}, dan x_{n+2} masing-masing dapat disubtitusikan dengan nilai $x = -2h$, $x = -h$, $x = 0$, $x = h$, dan $x = 2h$, ke dalam persamaan (2.32), yaitu sebagai berikut:

untuk x_{n-2},

$$\begin{aligned} p_4(x = -2h) = f_{n-2} &= c_0 + c_1(-2h) + c_2(-2h)^2 + c_3(-2h)^3 + c_4(-2h)^4 \\ &= c_0 - 2c_1h + 4c_2h^2 - 8c_3h^3 + 16c_4h^4 \end{aligned} \tag{2.33}$$

untuk x_{n-1},

$$\begin{aligned} p_4(x = -h) = f_{n-1} &= c_0 + c_1(-h) + c_2(-h)^2 + c_3(-h)^3 + c_4(-h)^4 \\ &= c_0 - c_1h + c_2h^2 - c_3h^3 + c_4h^4 \end{aligned} \tag{2.34}$$

untuk x_n,

$$\begin{aligned} p_4(x = 0) = f_n &= c_0 + c_1(0) + c_2(0)^2 + c_3(0)^3 + c_4(0)^4 \\ &= c_0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

untuk x_{n+1},

$$\begin{aligned} p_4(x = h) = f_{n+1} &= c_0 + c_1(h) + c_2(h)^2 + c_3(h)^3 + c_4(h)^4 \\ &= c_0 + c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + c_4h^4 \end{aligned} \tag{2.36}$$

untuk x_{n+2},

$$\begin{aligned} p_4(x = 2h) = f_{n+2} &= c_0 + c_1(2h) + c_2(2h)^2 + c_3(2h)^3 + c_4(2h)^4 \\ &= c_0 + 2c_1h + 4c_2h^2 + 8c_3h^3 + 16c_4h^4 \end{aligned} \tag{2.37}$$

dari persamaan (2.33) hingga (2.37) diperoleh:

$$c_0 = f_n \tag{2.38}$$

$$c_1 = \frac{1}{2h}(-f_{n-1} + f_{n+1}) \tag{2.39}$$

$$c_2 = \frac{1}{24h^2}(-f_{n-2} + 6f_{n-1} - 30f_n + 16f_{n+1} - f_{n+2}) \tag{2.40}$$

$$c_3 = \frac{1}{16h^3}(-f_{n-2} + 2f_{n-1} - 2f_{n+1} + f_{n+2}) \tag{2.41}$$

$$c_4 = \frac{1}{24h^4}(f_{n-2} - 4f_{n-1} + 6f_n - 4f_{n+1} + f_{n+2}) \tag{2.42}$$

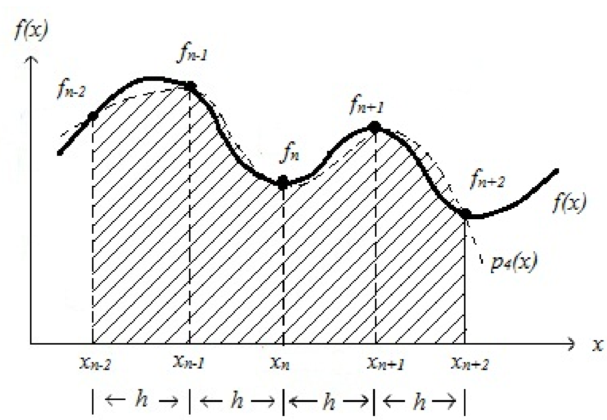
setelah konstanta c_0, c_1, c_2, c_3, dan c_4 diperoleh, maka persamaan (2.31) dapat dicari, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
I = \int_a^b f(x)dx &\cong \int_{x_{n-2}}^{x_{n+2}} P_4(x)dx \\
&= \int_{-2h}^{2h} (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4)dx \\
&= c_0x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{3}x^3 + \frac{c_3}{4}x^4 + \frac{c_4}{5}x^5\Big|_{-2h}^{2h} \\
&= \left(2c_0h + 4\frac{c_1}{2}h^2 + 8\frac{c_2}{3}h^3 + 16\frac{c_3}{4}h^4 + 32\frac{c_4}{5}h^5\right) \\
&\quad - \left(-2c_0h + 4\frac{c_1}{2}h^2 - 8\frac{c_2}{3}h^3 + 16\frac{c_3}{4}h^4 - 32\frac{c_4}{5}h^5\right) \\
&= 4c_0h + 16\frac{c_2}{3}h^3 + 64\frac{c_4}{5}h^5
\end{aligned} \tag{2.43}$$

subtitusikan c_0, c_1, c_2, c_3, dan c_4 dari persamaan (2.38) hingga (2.42) ke dalam persamaan (2.43), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
I &= 4c_0h + 16\frac{c_2}{3}h^3 + 64\frac{c_4}{5}h^5 \\
&= 4hf_n + \frac{16h^3}{3}\left(\frac{-f_{n-2} + 16f_{n-1} - 30f_n + 16f_{n+1} - f_{n+2}}{24h^2}\right) \\
&\quad + \frac{64h^5}{5}\left(\frac{f_{n-2} - 4f_{n-1} + 6f_n - 4f_{n+1} + f_{n+2}}{24h^5}\right) \\
&= \frac{180hf_n}{45} + \frac{-10hf_{n-2} + 160hf_{n-1} - 300hf_n + 160hf_{n+1} - 10hf_{n+2}}{45} \\
&\quad + \frac{24hf_{n-2} - 96hf_{n-1} + 144hf_n - 96hf_{n-1} + 24hf_{n+2}}{45} \\
&= \frac{14hf_{n-2} + 64hf_{n-1} + 24hf_n + 64hf_{n+1} + 14hf_{n+2}}{45} \\
I &= \frac{2h}{45}(7f_{n-2} + 32f_{n-1} + 12f_n + 32f_{n+1} + 7f_{n+2}) \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

dimana $h = (b - a)/4$. Persamaan (2.44) disebut dengan aturan Boole yang merupakan formula keempat dari formula integrasi Newton-Cotes tertutup.



Gambar 2.6: Aturan Boole

2.3 Metode Diferensial Newton-Cotes Tertutup

Berdasarkan teorema dasar kalkulus, misal $f(x)$ kontinu pada $[a, b]$ dan $F(x)$ merupakan anti turunan dari $f(x)$, maka

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a) \\ \int_a^b f(x)dx &= y(b) - y(a) \end{aligned} \tag{2.45}$$

dengan $f(x) = y'(x)$.

Metode diferensial Newton-Cotes tertutup berasal dari aturan integrasi Newton-Cotes tertutup, yang dinyatakan dalam formula:

$$\int_a^b f(x)dx \cong zh \sum_{i=0}^{k} t_i f(x_i) \tag{2.46}$$

sehingga berdasarkan persamaan (2.45), persamaan (2.46) dapat ditulis sebagai berikut:

$$y(b) - y(a) \cong zh \sum_{i=0}^{k} t_i f(x_i) \tag{2.47}$$

dimana,

$$h = \frac{b-a}{k}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 1, 2, ..., k$$

Koefisien z dan t_i diberikan dalam tabel 2.1 yang diperoleh dari formula Newton-Cotes tertutup, yaitu sebagai berikut:

k	z	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
0	1	1				
1	1/2	1	1			
2	1/3	1	4	1		
3	3/8	1	3	3	1	
4	2/45	7	32	12	32	7

Tabel 2.1: Aturan integrasi Newton-Cotes tertutup

Berdasarkan tabel 2.1, maka dapat diperoleh metode diferensial Newton-Cotes tertutup sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
k &= 1 \qquad & y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n) \\
k &= 2 \qquad & y_{n+1} - y_{n-1} &= \frac{h}{3}(f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1}) \\
k &= 3 \qquad & y_{n+2} - y_{n-1} &= \frac{3h}{8}(f_{n-1} + 3f_n + 3f_{n+1} + f_{n+2}) \\
k &= 4 \qquad & y_{n+2} - y_{n-2} &= \frac{2h}{45}(7f_{n-2} + 32f_{n-1} + 12f_n + 32f_{n+1} + 7f_{n+2})
\end{aligned}
$$

dimana $f_i = y_i'$ dengan $i = n-2, n-1, n, n+1$, dan $n+2$.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Metode Diferensial Newton-Cotes Tertutup dinyatakan sebagai Integrator Simplektik

Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dapat dinyatakan sebagai integrator simplektik apabila metode tersebut bersifat simplektik. Dalam bagian ini akan dibuktikan bahwa Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan 1 pias ($k = 1$), 2 pias ($k = 2$), 3 pias ($k = 3$), dan 4 pias ($k = 4$) bersifat simplektik dengan terlebih dahulu mengkonversikan metode diferensial Newton-Cotes tertutup tersebut menjadi sebuah persamaan matriks yang memiliki struktur simplektik.

Untuk membuktikan bahwa Metode diferensial Newton-Cotes tertutup bersifat simplektik, sebelumnya tulis sistem Hamiltonian dalam persamaan (2.1) dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= l.p \\ \dot{p} &= -l.q \end{aligned} \tag{3.1}$$

dimana l merupakan konstanta berbentuk skalar atau matriks. Zhu et al (1996), dalam tulisannya memperkenalkan struktur simplektik dari skema diferensial orde dua, yaitu:

$$y_{n+1} - y_{n-1} = 2hf_n \tag{3.2}$$

Persamaan (3.1) dan (3.2) akan digunakan untuk membuktikan bahwa Metode diferensial Newton-Cotes tertutup bersifat simplektik.

3.1.1 Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 1$ bersifat simplektik

Pertama akan dibuktikan metode diferensial Newton-cotes tertutup untuk $k = 1$ yang berasal dari aturan trapesium bersifat simplektik. Formula diferensial Newton-Cotes tertutup untuk $k = 1$ diberikan sebagai berikut:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n) \tag{3.3}$$

Aplikasikan persamaan (3.3) dengan sistem Hamiltonian pada persamaan (3.1), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} q_{n+1} - q_n &= \frac{lh}{2}(p_{n+1} + p_n) \\ p_{n+1} - p_n &= -\frac{lh}{2}(q_{n+1} + q_n) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Persamaan (3.4) dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} q_{n+1} - \frac{lh}{2}p_{n+1} &= q_n + \frac{lh}{2}p_n \\ \frac{lh}{2}q_{n+1} + p_{n+1} &= -\frac{lh}{2}q_n + p_n \end{aligned} \tag{3.5}$$

Misalkan,

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= \frac{lh}{2} \end{aligned}$$

maka persamaan (3.5) akan menjadi:

$$\begin{aligned} aq_{n+1} - bp_{n+1} &= aq_n + bp_n \\ bq_{n+1} + ap_{n+1} &= -bq_n + ap_n \end{aligned} \tag{3.6}$$

Persamaan (3.6) dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks yaitu sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

selanjutnya tulis kembali persamaan matriks (3.7) menjadi:

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix}$$

definisikan,

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ -\frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dan

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Setelah matriks M dan J didefinisikan, selanjutnya akan dibuktikan bahwa matriks M merupakan matriks simplektik, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
M^T JM &= \begin{pmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & -\frac{2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ -\frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \\ -\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{2ab}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ -\frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(2ab)(a^2-b^2)-(a^2-b^2)(2ab)}{(a^2+b^2)^2} & \frac{a^4+b^4+2a^2b^2}{a^4+b^4+2a^2b^2} \\ -\frac{a^4+b^4+2a^2b^2}{a^4+b^4+2a^2b^2} & \frac{-(a^2-b^2)(2ab)+(2ab)(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
M^T JM &= J
\end{aligned}$$

Karena $M^T JM = J$ maka M merupakan matriks simplektik, sehingga persamaan matriks (3.7) terbukti simplektik. Dengan demikian metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 1$ yang telah dikonversikan menjadi persamaan matriks (3.7) bersifat simplektik.

3.1.2 Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 2$ bersifat simplektik

Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 1$ telah dibuktikan bersifat simplektik sehingga dapat dinyatakan sebagai integrator simplektik. Berikut ini akan dibuktikan bahwa Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 2$ yang berasal dari aturan Simpson 1/3 juga bersifat simplektik.

Formula diferensial Newton-Cotes tertutup untuk $k = 2$ diberikan sebagai berikut:

$$y_{n+1} - y_{n-1} = \frac{h}{3}(f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1}) \tag{3.8}$$

Persamaan (3.8) dapat diaplikasikan kedalam sistem Hamiltonian dalam persamaan (3.1), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} q_{n+1} - q_{n-1} &= \frac{lh}{3}(p_{n-1} + 4p_n + p_{n+1}) \\ p_{n+1} - p_{n-1} &= -\frac{lh}{3}(q_{n-1} + 4q_n + q_{n+1}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Skema diferensial orde dua dalam persamaan (3.2) yang telah diaplikasikan dengan sistem Hamiltonian dalam persamaan (3.1) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} q_{n+1} - q_{n-1} &= 2lhp_n \\ p_{n+1} - p_{n-1} &= -2lhq_n \end{aligned}$$

sehingga diperoleh nilai p_n dan q_n, yaitu:

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{q_{n+1} - q_{n-1}}{2lh} \\ q_n &= -\frac{p_{n+1} - p_{n-1}}{2lh} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Selanjutnya subtitusikan nilai p_n dan q_n dari persamaan (3.10) kedalam persamaan (3.9), yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
q_{n+1} - q_{n-1} &= \frac{lh}{3}(p_{n-1} + 4p_n + p_{n+1}) \\
&= \frac{lh}{3}p_{n-1} + \frac{4lh}{3}p_n + \frac{lh}{3}p_{n+1} \\
&= \frac{lh}{3}p_{n-1} + \frac{lh}{3}p_{n+1} + \frac{4lh}{3}\left(\frac{q_{n+1} - q_{n-1}}{2lh}\right) \\
&= \frac{lh}{3}p_{n-1} + \frac{lh}{3}p_{n+1} + \frac{2}{3}(q_{n+1} - q_{n-1}) \\
q_{n+1} - q_{n-1} &= \frac{lh}{3}p_{n-1} + \frac{lh}{3}p_{n+1} + \frac{2}{3}q_{n+1} - \frac{2}{3}q_{n-1} \\
q_{n+1} - \frac{2}{3}q_{n+1} - \frac{lh}{3}p_{n+1} &= q_{n-1} - \frac{2}{3}q_{n-1} + \frac{lh}{3}p_{n-1} \\
\frac{1}{3}q_{n+1} - \frac{lh}{3}p_{n+1} &= \frac{1}{3}q_{n-1} + \frac{lh}{3}p_{n-1} \\
q_{n+1} - lhp_{n+1} &= q_{n-1} + lhp_{n-1}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
p_{n+1} - p_{n-1} &= -\frac{lh}{3}(q_{n-1} + 4q_n + q_{n+1}) \\
&= -\frac{lh}{3}q_{n-1} - \frac{4lh}{3}q_n - \frac{lh}{3}q_{n+1} \\
&= -\frac{lh}{3}q_{n-1} - \frac{lh}{3}q_{n+1} - \frac{4lh}{3}\left(-\frac{p_{n+1} - p_{n-1}}{2lh}\right) \\
&= -\frac{lh}{3}q_{n-1} - \frac{lh}{3}q_{n+1} + \frac{2}{3}(p_{n+1} - p_{n-1}) \\
p_{n+1} - p_{n-1} &= -\frac{lh}{3}q_{n-1} - \frac{lh}{3}q_{n+1} + \frac{2}{3}p_{n+1} - \frac{2}{3}p_{n-1} \\
\frac{lh}{3}q_{n+1} + p_{n+1} - \frac{2}{3}p_{n+1} &= -\frac{lh}{3}q_{n-1} + p_{n-1} - \frac{2}{3}p_{n-1} \\
\frac{lh}{3}q_{n+1} + \frac{1}{3}p_{n+1} &= -\frac{lh}{3}q_{n-1} + \frac{1}{3}p_{n-1} \\
lhq_{n+1} + p_{n+1} &= -lhq_{n-1} + p_{n-1}
\end{aligned}$$

Hasil dari subtitusi nilai p_n dan q_n dari persamaan (3.10) kedalam persamaan (3.9) adalah:

$$\begin{aligned} q_{n+1} - lhp_{n+1} &= q_{n-1} + lhp_{n-1} \\ lhq_{n+1} + p_{n+1} &= -lhq_{n-1} + p_{n-1} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Misalkan,

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ d &= lh \end{aligned}$$

maka persamaan (3.11) dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} cq_{n+1} - dp_{n+1} &= cq_{n-1} + dp_{n-1} \\ dq_{n+1} + cp_{n+1} &= -dq_{n-1} + cp_{n-1} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Persamaan (3.12) dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks yaitu sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n-1} \\ p_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

selanjutnya tulis kembali persamaan matriks (3.13) menjadi:

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n-1} \\ p_{n-1} \end{pmatrix}$$

definisikan,

$$\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{c^2+d^2} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{c^2+d^2} \begin{pmatrix} c^2-d^2 & 2cd \\ -2cd & c^2-d^2 \end{pmatrix} \\
M &= \begin{pmatrix} \frac{c^2-d^2}{c^2+d^2} & \frac{2cd}{c^2+d^2} \\ -\frac{2cd}{c^2+d^2} & \frac{c^2-d^2}{c^2+d^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

dan

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Setelah matriks M dan J didefinisikan, selanjutnya akan dibuktikan bahwa matriks M merupakan matriks simplektik, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
M^TJM &= \begin{pmatrix} \frac{c^2-d^2}{c^2+d^2} & -\frac{2cd}{c^2+d^2} \\ \frac{2cd}{c^2+d^2} & \frac{c^2-d^2}{c^2+d^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{c^2-d^2}{c^2+d^2} & \frac{2cd}{c^2+d^2} \\ -\frac{2cd}{c^2+d^2} & \frac{c^2-d^2}{c^2+d^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2cd}{c^2+d^2} & \frac{c^2-d^2}{c^2+d^2} \\ -\frac{c^2-d^2}{c^2+d^2} & \frac{2cd}{c^2+d^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{c^2-d^2}{c^2+d^2} & \frac{2cd}{c^2+d^2} \\ -\frac{2cd}{c^2+d^2} & \frac{c^2-d^2}{c^2+d^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(2cd)(c^2-d^2)-(c^2-d^2)(2cd)}{(c^2+d^2)^2} & \frac{c^4+d^4+2c^2d^2}{c^4+d^4+2c^2d^2} \\ -\frac{c^4+d^4+2c^2d^2}{c^4+d^4+2c^2d^2} & \frac{-(c^2-d^2)(2cd)+(2cd)(c^2-d^2)}{(c^2+d^2)^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
M^TJM &= J
\end{aligned}$$

Karena $M^T JM = J$ maka M merupakan matriks simplektik, sehingga persamaan matriks (3.13) terbukti simplektik. Dengan demikian, metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 2$ yang telah dikonversikan menjadi persamaan matriks (3.13) bersifat simplektik.

3.1.3 Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 3$ bersifat simplektik

Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 1$ dan $k = 2$ telah dibuktikan bersifat simplektik sehingga dapat dinyatakan sebagai integrator simplektik. Berikut ini akan dibuktikan bahwa Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 3$ yang berasal dari aturan Simpson 3/8 juga bersifat simplektik.

Formula diferensial Newton-Cotes tertutup untuk $k = 3$ diberikan sebagai berikut:

$$y_{n+2} - y_{n-1} = \frac{3h}{8}(f_{n-1} + 3f_n + 3f_{n+1} + f_{n+2}) \tag{3.14}$$

Aplikasikan persamaan (3.14) dengan sistem Hamiltonian dalam persamaan (3.1), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} q_{n+2} - q_{n-1} &= \frac{3lh}{8}(p_{n-1} + 3p_n + 3p_{n+1} + p_{n+2}) \\ p_{n+2} - p_{n-1} &= \frac{3lh}{8}(q_{n-1} + 3q_n + 3q_{n+1} + q_{n+2}) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Skema diferensial orde dua dalam persamaan (3.2) yang telah diaplikasikan dengan sistem Hamiltonian dalam persamaan (3.1) dapat ditulis dalam dua langkah, yaitu:

$$\begin{aligned} q_{n+2} - q_n &= 2lhp_{n+1} &\quad (3.16)\\ p_{n+2} - p_n &= -2lhq_{n+1} &\quad (3.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{n+1} - q_{n-1} &= 2lhp_n &\quad (3.18)\\ p_{n+1} - p_{n-1} &= -2lhq_n &\quad (3.19) \end{aligned}$$

dari persamaan (3.16) sampai (3.19), akan dicari nilai $p_n + p_{n+1}$ dan $q_n + q_{n+1}$, yaitu sebagai berikut:

- Mencari nilai $p_n + p_{n+1}$,

  Pertama tambahkan persamaan (3.16) dan (3.18), hasilnya yaitu

  $$q_{n+2} + q_{n+1} - q_n - q_{n-1} = 2lhp_{n+1} + 2lhp_n \qquad (3.20)$$

  kemudian kalikan persamaan (3.20) dengan $2lh$,

  $$2lhq_{n+2} + 2lhq_{n+1} - 2lhq_n - 2lhq_{n-1} = 4(lh)^2 p_{n+1} + 4(lh)^2 p_n \qquad (3.21)$$

  selanjutnya subtitusikan nilai $2lhq_{n+1}$ dan $2lhq_n$ dari persamaan (3.17) dan

(3.19) kedalam persamaan (3.21),

$$
\begin{aligned}
2lhq_{n+2} - p_{n+2} + p_n + p_{n+1} - p_{n-1} - 2lhq_{n-1} &= 4(lh)^2 p_{n+1} + 4(lh)^2 p_n \\
p_n - 4(lh)^2 p_n + p_{n+1} - 4(lh)^2 p_{n+1} &= 2lhq_{n-1} - 2lhq_{n+2} \\
&\quad + p_{n+2} + p_{n-1} \\
(1 - 4(lh)^2)(p_n + p_{n+1}) &= 2lh(q_{n-1} - q_{n+2}) \\
&\quad + p_{n+2} + p_{n-1} \\
p_n + p_{n+1} &= \frac{2lh}{1 - 4(lh)^2}(q_{n-1} - q_{n+2}) \\
&\quad + \frac{1}{1 - 4(lh)^2}(p_{n+2} + p_{n-1})
\end{aligned}
$$

- Mencari nilai $q_n + q_{n+1}$,

  Pertama tambahkan persamaan (3.17) dan (3.19), hasilnya yaitu

$$p_{n+2} + p_{n+1} - p_n - p_{n-1} = -2lhq_{n+1} - 2lhq_n \tag{3.22}$$

kemudian kalikan persamaan (3.22) dengan $2lh$,

$$2lhp_{n+2} + 2lhp_{n+1} - 2lhp_n - 2lhp_{n-1} = -4(lh)^2 q_{n+1} - 4(lh)^2 q_n \tag{3.23}$$

selanjutnya subtitusikan nilai $2lhp_{n+1}$ dan $2lhp_n$ dari persamaan (3.16) dan

(3.18) kedalam persamaan (3.23),

$$\begin{aligned}
2lhp_{n+2} + q_{n+2} - q_n - q_{n+1} + q_{n-1} - 2lhp_{n-1} &= -4(lh)^2 q_{n+1} - 4(lh)^2 q_n \\
2lhp_{n+2} - 2lhp_{n-1} + q_{n+2} + q_{n-1} &= q_{n+1} - 4(lh)^2 q_{n+1} + q_n \\
&\quad -4(lh)^2 q_n \\
2lh(p_{n-1} - p_{n+2}) + q_{n-1} + q_{n+2} &= (1 - 4(lh)^2)(q_n + q_{n+1}) \\
q_n + q_{n+1} &= -\frac{2lh}{1-4(lh)^2}(-p_{n-1} + p_{n+2}) \\
&\quad +\frac{1}{1-4(lh)^2}(q_{n+2} + q_{n-1})
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
p_n + p_{n+1} &= \frac{2lh}{1-4(lh)^2}(q_{n-1} - q_{n+2}) + \frac{1}{1-4(lh)^2}(p_{n-1} + p_{n+2}) \\
q_n + q_{n+1} &= -\frac{2lh}{1-4(lh)^2}(-p_{n-1} + p_{n+2}) + \frac{1}{1-4(lh)^2}(q_{n-1} + q_{n+2})
\end{aligned} \quad (3.24)$$

Setelah $p_n + p_{n+1}$ dan $q_n + q_{n+1}$ diperoleh, selanjutnya subtitusikan nilai-nilai tersebut kedalam persamaan (3.15), yaitu:

$$\begin{aligned}
q_{n+2} - q_{n-1} &= \frac{3lh}{8}(p_{n-1} + 3p_n + 3p_{n+1} + p_{n+2}) \\
&= \frac{3lh}{8}p_{n-1} + \frac{3lh}{8}3(p_n + p_{n+1}) + \frac{3lh}{8}p_{n+2} \\
&= \frac{3lh}{8}p_{n-1} + \frac{3lh}{8}3\left(\frac{2lh}{1-4(lh)^2}(q_{n-1} - q_{n+2})\right. \\
&\quad \left. +\frac{1}{1-4(lh)^2}(p_{n-1} + p_{n+2})\right) + \frac{3lh}{8}p_{n+2} \\
&= \frac{3lh}{8}p_{n-1} + \frac{3lh}{8}\frac{6lh}{1-4(lh)^2}q_{n-1} - \frac{3lh}{8}\frac{6lh}{1-4(lh)^2}q_{n+2} \\
&\quad +\frac{3lh}{8}\frac{3}{1-4(lh)^2}p_{n-1} + \frac{3lh}{8}\frac{3}{1-4(lh)^2}p_{n+2} + \frac{3lh}{8}p_{n+2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
8q_{n+2}-8q_{n-1} &= 3lhp_{n-1}+3lh\frac{3}{1-4(lh)^2}p_{n-1}+3lhp_{n+2}+3lh\frac{3}{1-4(lh)^2}p_{n+2}\\
&\quad +3lh\frac{6lh}{1-4(lh)^2}q_{n-1}+3lh\frac{6lh}{1-4(lh)^2}q_{n+2}\\
&= 3lh\left(1+\frac{3}{1-4(lh)^2}\right)p_{n-1}+3lh\left(1+\frac{3}{1-4(lh)^2}\right)p_{n+2}\\
&\quad +\frac{18(lh)^2}{1-4(lh)^2}q_{n-1}-\frac{18(lh)^2}{1-4(lh)^2}q_{n+2}
\end{aligned}
$$

diperoleh hasil:

$$
\begin{aligned}
&\left(8+\frac{18(lh)^2}{1-4(lh)^2}\right)q_{n+2}-3lh\left(1+\frac{3}{1-4(lh)^2}\right)p_{n+2}\\
&=\left(8+\frac{18(lh)^2}{1-4(lh)^2}\right)q_{n-1}+3lh\left(1+\frac{3}{1-4(lh)^2}\right)p_{n-1}
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
p_{n+2}-p_{n-1} &= -\frac{3lh}{8}(q_{n-1}+3q_n+3q_{n+1}+q_{n+2})\\
&= -\frac{3lh}{8}q_{n-1}-\frac{3lh}{8}3(q_n+q_{n+1})-\frac{3lh}{8}q_{n+2}\\
&= -\frac{3lh}{8}q_{n-1}-\frac{3lh}{8}3\left(\frac{2lh}{1-4(lh)^2}(-p_{n-1}+p_{n+2})\right.\\
&\quad \left.+\frac{1}{1-4(lh)^2}(q_{n-1}+q_{n+2})\right)-\frac{3lh}{8}q_{n+2}\\
&= -\frac{3lh}{8}q_{n-1}+\frac{3lh}{8}\frac{6lh}{1-4(lh)^2}p_{n-1}-\frac{3lh}{8}\frac{6lh}{1-4(lh)^2}p_{n+2}\\
&\quad -\frac{3lh}{8}\frac{3}{1-4(lh)^2}q_{n-1}-\frac{3lh}{8}\frac{3}{1-4(lh)^2}q_{n+2}-\frac{3lh}{8}q_{n+2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
8p_{n+2}-8p_{n-1} &= -3lhq_{n-1}-3lh\frac{3}{1-4(lh)^2}q_{n-1}-3lhq_{n+2}-3lh\frac{3}{1-4(lh)^2}q_{n+2}\\
&\quad -3lh\frac{6lh}{1-4(lh)^2}p_{n-1}-3lh\frac{6lh}{1-4(lh)^2}p_{n+2}\\
&= -3lh\left(1+\frac{3}{1-4(lh)^2}\right)q_{n-1}-3lh\left(1+\frac{3}{1-4(lh)^2}\right)q_{n+2}\\
&\quad +\frac{18(lh)^2}{1-4(lh)^2}p_{n-1}-\frac{18(lh)^2}{1-4(lh)^2}p_{n+2}
\end{aligned}$$

diperoleh hasil:

$$\begin{aligned}
&3lh\left(1+\frac{3}{1-4(lh)^2}\right)q_{n+2}+\left(8+\frac{18(lh)^2}{1-4(lh)^2}\right)p_{n+2}\\
&=-3lh\left(1+\frac{3}{1-4(lh)^2}\right)q_{n-1}+\left(8+\frac{18(lh)^2}{1-4(lh)^2}\right)p_{n-1}
\end{aligned}$$

Hasil subtitusi nilai p_n+p_{n+1} dan q_n+q_{n+1} dari persamaan (3.24) kedalam persamaan (3.15) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&\left(8+\frac{18(lh)^2}{1-4(lh)^2}\right)q_{n+2}-3lh\left(1+\frac{3}{1-4(lh)^2}\right)p_{n+2}\\
&=\left(8+\frac{18(lh)^2}{1-4(lh)^2}\right)q_{n-1}+3lh\left(1+\frac{3}{1-4(lh)^2}\right)p_{n-1}\\
&3lh\left(1+\frac{3}{1-4(lh)^2}\right)q_{n+2}+\left(8+\frac{18(lh)^2}{1-4(lh)^2}\right)p_{n+2}\\
&=-3lh\left(1+\frac{3}{1-4(lh)^2}\right)q_{n-1}+\left(8+\frac{18(lh)^2}{1-4(lh)^2}\right)p_{n-1}
\end{aligned}$$

Misalkan,

$$\begin{aligned}
e &= \left(8+\frac{18(lh)^2}{1-4(lh)^2}\right)\\
f &= 3lh\left(1+\frac{3}{1-4(lh)^2}\right)
\end{aligned}$$

maka persamaannya akan menjadi:

$$
\begin{aligned}
eq_{n+2} - fp_{n+2} &= eq_{n-1} + fp_{n-1} \\
fq_{n+2} + ep_{n+2} &= fq_{n-1} + ep_{n-1}
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

Persamaan (3.25) dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks yaitu sebagai berikut:

$$
\begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n+2} \\ p_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n-1} \\ p_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.26}
$$

selanjutnya tulis kembali persamaan matriks (3.26) menjadi:

$$
\begin{pmatrix} q_{n+2} \\ p_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{n-1} \\ p_{n-1} \end{pmatrix}
$$

definisikan,

$$
\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{e^2 + f^2} \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{e^2 + f^2} \begin{pmatrix} e^2 - f^2 & 2ef \\ -2ef & e^2 - f^2 \end{pmatrix} \\
M &= \begin{pmatrix} \frac{e^2-f^2}{e^2+f^2} & \frac{2ef}{e^2+f^2} \\ -\frac{2ef}{e^2+f^2} & \frac{e^2-f^2}{e^2+f^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

dan

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Setelah matriks M dan J didefinisikan, selanjutnya akan dibuktikan bahwa matriks M merupakan matriks simplektik, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
M^TJM &= \begin{pmatrix} \frac{e^2-f^2}{e^2+f^2} & -\frac{2ef}{e^2+f^2} \\ \frac{2ef}{e^2+f^2} & \frac{e^2-f^2}{e^2+f^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^2-f^2}{e^2+f^2} & \frac{2ef}{e^2+f^2} \\ -\frac{2ef}{e^2+f^2} & \frac{e^2-f^2}{e^2+f^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2ef}{e^2+f^2} & \frac{e^2-f^2}{e^2+f^2} \\ -\frac{e^2-f^2}{e^2+f^2} & \frac{2ef}{e^2+f^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^2-f^2}{e^2+f^2} & \frac{2ef}{e^2+f^2} \\ -\frac{2ef}{e^2+f^2} & \frac{e^2-f^2}{e^2+f^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(2ef)(e^2-f^2)-(e^2-f^2)(2ef)}{(e^2+f^2)^2} & \frac{e^4+f^4+2e^2f^2}{e^4+f^4+2e^2f^2} \\ -\frac{e^4+f^4+2e^2f^2}{e^4+f^4+2e^2f^2} & \frac{-(e^2-f^2)(2ef)+(2ef)(e^2-f^2)}{(e^2+f^2)^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
M^TJM &= J
\end{aligned}$$

Karena $M^TJM = J$ maka M merupakan matriks simplektik, sehingga persamaan matriks (3.26) terbukti simplektik. Dengan demikian, metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 3$ yang telah dikonversikan menjadi persamaan matriks (3.26) bersifat simplektik.

3.1.4 Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 4$ bersifat simplektik

Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 1$, $k = 2$, dan $k = 3$ telah dibuktikan bersifat simplektik sehingga dapat dinyatakan sebagai integrator simplektik. Terakhir akan dibuktikan bahwa Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 4$ yang berasal dari aturan Boole juga bersifat simplektik.

Formula diferensial Newton-Cotes tertutup untuk $k = 4$ diberikan sebagai berikut:

$$y_{n+2} - y_{n-2} = \frac{2h}{45}(7f_{n-2} + 32f_{n-1} + 12f_n + 32f_{n+1} + 7f_{n+2}) \tag{3.27}$$

Persamaan (3.27) dapat diaplikasikan kedalam sistem Hamiltonian dalam persamaan (3.1), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} q_{n+2} - q_{n-2} &= \frac{2lh}{45}(7p_{n-2} + 32p_{n-1} + 12p_n + 32p_{n+1} + 7p_{n+2}) \\ p_{n+2} - p_{n-2} &= \frac{2lh}{45}(7q_{n-2} + 32q_{n-1} + 12q_n + 32q_{n+1} + 7q_{n+2}) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Skema diferensial orde dua dalam persamaan (3.2) yang telah diaplikasikan dengan dapat sistem Hamiltonian dalam persamaan (3.1) ditulis dalam tiga langkah, yaitu:

$$q_{n+2} - q_n = 2lhp_{n+1} \tag{3.29}$$

$$p_{n+2} - p_n = -2lhq_{n+1} \tag{3.30}$$

$$q_{n+1} - q_{n-1} = 2lhp_n \tag{3.31}$$

$$p_{n+1} - p_{n-1} = -2lhq_n \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} q_n - q_{n-2} &= 2lhp_{n-1} && (3.33) \\ p_n - p_{n-2} &= -2lhq_{n-1} && (3.34) \end{aligned}$$

dari persamaan (3.29) sampai(3.34), akan dicari nilai $p_{n+1} + p_{n-1}$, $q_{n+1} + q_{n-1}$, p_n, dan q_n yaitu sebagai berikut:

- Mencari nilai $p_{n+1} + p_{n-1}$,

  Tambahkan persamaan (3.29) dan (3.33), hasilnya menjadi:

$$\begin{aligned} q_{n+2} + q_{n-2} &= 2lhp_{n+1} + 2lhp_{n-1} \\ q_{n+2} + q_{n-2} &= 2lh(p_{n+1} + p_{n-1}) \\ p_{n+1} + p_{n-1} &= \frac{1}{2lh}(q_{n+2} - q_{n-2}) \end{aligned}$$

- Mencari nilai $q_{n+1} + q_{n-1}$,

  Tambahkan persamaan (3.30) dan (3.34), hasilnya menjadi:

$$\begin{aligned} p_{n+2} + p_{n-2} &= -2lhq_{n+1} - 2lhq_{n-1} \\ p_{n+2} + p_{n-2} &= -2lh(q_{n+1} + q_{n-1}) \\ q_{n+1} + q_{n-1} &= -\frac{1}{2lh}(p_{n+2} - p_{n-2}) \end{aligned}$$

- Mencari nilai p_n,

  Pertama tulis persamaan (3.31) menjadi:

$$-q_{n-1} = 2lhp_n - q_{n+1} \qquad (3.35)$$

kemudian kalikan persamaan (3.35) dengan $2lh$,

$$-2lhq_{n-1} = 4(lh)^2 p_n - 2lhq_{n+1} \tag{3.36}$$

selanjutnya subtitusikan persamaan (3.30) dan (3.34) kedalam persamaan (3.36), yaitu

$$\begin{aligned}
p_n - p_{n-2} &= 4(lh)^2 p_n + p_{n+2} - p_n \\
2p_n - 4(lh)^2 p_n &= p_{n+2} - p_{n-2} \\
(1 - 2(lh)^2)2p_n &= p_{n+2} - p_{n-2} \\
p_n &= \frac{1}{2(1 - 2(lh)^2}(p_{n+2} + p_{n-2})
\end{aligned}$$

- Mencari nilai q_n,

  Pertama tulis persamaan (3.32) menjadi:

$$p_{n-1} = 2lhq_n - p_{n+1} \tag{3.37}$$

kemudian kalikan persamaan (3.37) dengan $2lh$,

$$2lhp_{n-1} = 4(lh)^2 q_n + 2lhp_{n+1} \tag{3.38}$$

selanjutnya subtitusikan persamaan (3.29) dan (3.33) kedalam persamaan

(3.38), yaitu

$$\begin{aligned}
q_n - q_{n-2} &= 4(lh)^2 q_n + q_{n+2} - q_n \\
2q_n - 4(lh)^2 q_n &= q_{n+2} - q_{n-2} \\
(1 - 2(lh)^2) 2p_n &= q_{n+2} - q_{n-2} \\
q_n &= \frac{1}{2(1 - 2(lh)^2}(q_{n+2} + q_{n-2})
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
p_{n+1} + p_{n-1} &= \frac{1}{2lh}(q_{n+2} - q_{n-2}) \\
q_{n+1} + q_{n-1} &= -\frac{1}{2lh}(p_{n+2} - p_{n-2}) \\
p_n &= \frac{1}{2(1 - 2(lh)^2}(p_{n+2} + p_{n-2}) \\
q_n &= \frac{1}{2(1 - 2(lh)^2}(q_{n+2} + q_{n-2}) \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

Setelah nilai $p_{n+1}+p_{n-1}$, $q_{n+1}+q_{n-1}$, p_n dan q_n diperoleh, selanjutnya subtitusikan nilai-nilai tersebut kedalam persamaan (3.28), yaitu:

$$\begin{aligned}
q_{n+2} - q_{n-2} &= \frac{2lh}{45}(7p_{n-2} + 32p_{n-1} + 12p_n + 32p_{n+1} + 7p_{n+2}) \\
&= \frac{2lh}{45}7p_{n-2} + \frac{2lh}{45}7p_{n+2} + \frac{2lh}{45}32(p_{n+1} + p_{n-1}) + \frac{2lh}{45}12p_n \\
&= \frac{2lh}{45}7p_{n-2} + \frac{2lh}{45}7p_{n+2} + \frac{2lh}{45}32\left(\frac{1}{2lh}(q_{n+2} - q_{n-2})\right) \\
&\quad + \frac{2lh}{45}12\left(\frac{1}{2(1 - 2(lh)^2)}(p_{n+2} + p_{n-2})\right) \\
&= \frac{2lh}{45}7p_{n-2} + \frac{2lh}{45}\frac{6}{1 - 2(lh)^2}p_{n-2} + \frac{2lh}{45}7p_{n+2} \\
&\quad + \frac{2lh}{45}\frac{6}{1 - 2(lh)^2}p_{n+2} + \frac{32}{45}q_{n+2} - \frac{32}{45}q_{n-2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
45q_{n+2} - 45q_{n-2} &= 2lh\left(7 + \frac{6}{1-2(lh)^2}\right)p_{n-2} + 2lh\left(7 + \frac{6}{1-2(lh)^2}\right)p_{n+2} \\
&\quad +32q_{n+2} - 32q_{n-2}
\end{aligned}
$$

diperoleh hasil:

$$
13q_{n+2} - 2lh\left(7 + \frac{6}{1-2(lh)^2}\right)p_{n+2} = 13q_{n-2} + 2lh\left(7 + \frac{6}{1-2(lh)^2}\right)p_{n-2}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
p_{n+2} - p_{n-2} &= -\frac{2lh}{45}(7q_{n-2} + 32q_{n-1} + 12q_n + 32q_{n+1} + 7q_{n+2}) \\
&= -\frac{2lh}{45}7q_{n-2} - \frac{2lh}{45}7q_{n+2} - \frac{2lh}{45}32(q_{n+1} + q_{n-1}) - \frac{2lh}{45}12q_n \\
&= -\frac{2lh}{45}7q_{n-2} - \frac{2lh}{45}7q_{n+2} - \frac{2lh}{45}32\left(-\frac{1}{2lh}(p_{n+2} - p_{n-2})\right) \\
&\quad -\frac{2lh}{45}12\left(\frac{1}{2(1-2(lh)^2)}(q_{n+2} + q_{n-2})\right) \\
&= -\frac{2lh}{45}7q_{n-2} - \frac{2lh}{45}\frac{6}{1-2(lh)^2}q_{n-2} - \frac{2lh}{45}7q_{n+2} \\
&\quad +\frac{32}{45}p_{n+2} - \frac{32}{45}p_{n-2} \\
45p_{n+2} - 45p_{n-2} &= -2lh\left(7 + \frac{6}{1-2(lh)^2}\right)q_{n-2} - 2lh\left(7 + \frac{6}{1-2(lh)^2}\right)q_{n+2} \\
&\quad +32p_{n+2} - 32p_{n-2}
\end{aligned}
$$

diperoleh hasil:

$$
2lh\left(7 + \frac{6}{1-2(lh)^2}\right)q_{n+2} + 13p_{n+2} = -2lh\left(7 + \frac{6}{1-2(lh)^2}\right)q_{n-2} + 13p_{n-2}
$$

Hasil dari subtitusi nilai $p_{n+1}+p_{n-1}$, $q_{n+1}+q_{n-1}$, p_n dan q_n dari persamaan (3.39) kedalam persamaan (3.28) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 13q_{n+2} - 2lh\left(7+\frac{6}{1-2(lh)^2}\right)p_{n+2} &= 13q_{n-2} + 2lh\left(7+\frac{6}{1-2(lh)^2}\right)p_{n-2} \\ 2lh\left(7+\frac{6}{1-2(lh)^2}\right)q_{n+2} + 13p_{n+2} &= -2lh\left(7+\frac{6}{1-2(lh)^2}\right)q_{n-2} + 13p_{n-2} \end{aligned}$$

Misalkan,

$$\begin{aligned} g &= 13 \\ h &= 2lh\left(7+\frac{6}{1-2(lh)^2}\right)q_{n-2} \end{aligned}$$

maka persamaannya menjadi:

$$\begin{aligned} gq_{n+2} - hp_{n+2} &= gq_{n-2} + hp_{n-2} \\ hq_{n+2} + gp_{n+2} &= hq_{n-2} + gp_{n-2} \end{aligned} \tag{3.40}$$

persamaan (3.40) dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks yaitu sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} g & -h \\ h & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{n+2} \\ p_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h \\ -h & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{n-2} \\ p_{n-2} \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

selanjutnya tulis kembali persamaan matriks (3.41) menjadi:

$$\begin{pmatrix} q_{n+2} \\ p_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & -h \\ h & g \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} g & h \\ -h & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{n-2} \\ p_{n-2} \end{pmatrix}$$

definisikan,

$$
\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} g & -h \\ h & g \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g & h \\ -h & g \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{g^2+h^2} \begin{pmatrix} g & h \\ -h & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & h \\ -h & g \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{g^2+h^2} \begin{pmatrix} g^2-h^2 & 2gh \\ -2gh & g^2-h^2 \end{pmatrix} \\
M &= \begin{pmatrix} \frac{g^2-h^2}{g^2+h^2} & \frac{2gh}{g^2+h^2} \\ -\frac{2gh}{g^2+h^2} & \frac{g^2-h^2}{g^2+h^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

dan

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Setelah matriks M dan J didefinisikan, selanjutnya akan dibuktikan bahwa matriks M merupakan matriks simplektik, yaitu sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
M^T J M &= \begin{pmatrix} \frac{g^2-h^2}{g^2+h^2} & -\frac{2gh}{g^2+h^2} \\ \frac{2gh}{g^2+h^2} & \frac{g^2-h^2}{g^2+h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{g^2-h^2}{g^2+h^2} & \frac{2gh}{g^2+h^2} \\ -\frac{2gh}{g^2+h^2} & \frac{g^2-h^2}{g^2+h^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2gh}{g^2+h^2} & \frac{g^2-h^2}{g^2+h^2} \\ -\frac{g^2-h^2}{g^2+h^2} & \frac{2gh}{g^2+h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{g^2-h^2}{g^2+h^2} & \frac{2gh}{g^2+h^2} \\ -\frac{2gh}{g^2+h^2} & \frac{g^2-h^2}{g^2+h^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(2gh)(g^2-h^2)-(g^2-h^2)(2gh)}{(g^2+h^2)^2} & \frac{g^4+h^4+2g^2h^2}{g^4+h^4+2g^2h^2} \\ -\frac{g^4+h^4+2g^2h^2}{g^4+h^4+2g^2h^2} & \frac{-(g^2-h^2)(2gh)+(2gh)(g^2-h^2)}{(g^2+h^2)^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
M^T J M &= J
\end{aligned}
$$

Karena $M^T JM = J$ maka M merupakan matriks simplektik, sehingga persamaan matriks (3.41) terbukti simplektik. Dengan demikian, metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 4$ yang telah dikonversikan menjadi persamaan matriks (3.41) bersifat simplektik.

Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, dan $k = 4$ telah terbukti bersifat simplektik, sehingga dapat dinyatakan sebagai integrator simplektik yang dapat menyelesaikan persamaan dengan integrasi *long-time*. Dalam subbab berikutnya akan diberikan contoh soal persamaan diferensial biasa dengan integrasi *long-time* yang akan dicari solusinya dengan menggunakan Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 4$.

3.2 Penerapan Metode Diferensial Newton-Cotes Tertutup dengan $k = 4$ dalam Menyelesaikan Persamaan dengan Integrasi *Long-Time*

Metode diferensial Newton-Cotes tertutup termasuk dalam metode banyak langkah (*multi-step*). Dalam metode banyak langkah, taksiran nilai yang akan dihitung solusinya membutuhkan taksiran nilai sebelumnya. Sebagai contoh metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 4$ yang formulanya diberikan sebagai berikut:

$$y_{n+2} - y_{n-2} = \frac{2h}{45}(7f_{n-2} + 32f_{n-1} + 12f_n + 32f_{n+1} + 7f_{n+2})$$

atau dapat ditulis sebagai:

$$
\begin{aligned}
y_{n+2} &= y_{n-2} + \frac{2h}{45}(7f_{n-2} + 32f_{n-1} + 12f_n + 32f_{n+1} + 7f_{n+2}) \\
y_{n+2} &= y_{n-2} + \frac{2h}{45}\big(7f(x_{n-2}, y_{n-2}) + 32f_(x_{n-1}, y_{n-1}) + 12f(x_n, y_n) \\
&\quad +32f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 7f(x_{n+2}, y_{n+2})\big)
\end{aligned}
$$

Untuk menghitung nilai y_{n+2} diperlukan taksiran nilai sebelumnya, yaitu nilai y_{n+1}, y_n, y_{n-1}, dan y_{n-2}. Persamaan diferensial biasa hanya memiliki satu nilai awal yaitu dalam metode ini adalah y_{n-2}, sehingga diperlukan prosedur pendahuluan dengan menggunakan metode numerik untuk solusi persamaan diferensial biasa untuk mencari nilai awal y_{n+1}, y_n, dan y_{n-1}. Metode numerik yang biasa digunakan untuk prosedur pendahuluan adalah metode Euler, metode Runge-Kutta, dan metode deret Taylor.

Dalam formula diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 4$, untuk mengitung nilai y_{n-2} ternyata diperlukan nilai y_{n-2} itu sendiri. Hal ini dapat diatasi dengan menggunakan metode lain sebagai *predictor* untuk menaksir nilai y_{n-2} sementara, dan kemudian metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 4$ akan digunakan sebagai *corrector* untuk menghitung nilai y_{n-2} yang lebih baik.

Berikut ini akan diberikan contoh-contoh soal persamaan diferensial biasa dengan integrasi *long-time* yang akan dicari solusinya dengan menggunakan metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 4$. Nilai awal akan ditaksir dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

Metode yang akan digunakan sebagai *predictor* adalah metode diferensial Newton-Cotes terbuka orde 4, yaitu:

$$\begin{aligned} predictor: \quad y_{n+2} &= y_{n-2} + \frac{4h}{3}(2f_{n-1} + f_n + 2f_{n+1}) \\ corrector: \quad y_{n+2} &= y_{n-2} + \frac{2h}{45}(7f_{n-2} + 32f_{n-1} + 12f_n + 32f_{n+1} + 7f_{n+2}) \end{aligned}$$

1. **Persamaan Duffing**

Diberikan masalah nilai awal, yaitu:

$$y'' = -y - y^3 + 0,002cos(1,01t) \tag{3.42}$$

dengan,

$$y(0) = 0,20042672806 \qquad \text{dan} \qquad y'(0) = 0$$

Solusi:

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde dua, persamaan (3.42) harus diubah terlebih dahulu menjadi persamaan diferensial biasa orde 1.

Misalkan,

$$y' = z$$

maka,

$$z' = y'' = g(t, y, y') = g(x, y, z) = -y - y^3 + 0,002cos(1,01t)$$

sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial orde 1, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y, z) = z \\ z' &= g(t, y, z) = -y - y^3 + 0,002cos(1,01t) \end{aligned} \tag{3.43}$$

dengan,

$$\begin{aligned} y_{n-2} &= y(0) = 0,20042672806 \\ z_{n-2} &= z(0) = 0 \end{aligned}$$

Dari perhitungan menggunakan Matlab, dengan metode Runge-Kutta digunakan untuk mencari nilai-nilai awal y_{n-1}, z_{n-1}, y_n, z_n, y_{n+1}, dan z_{n+1}, metode diferensial Newton-Cotes terbuka digunakan sebagai *predictor* untuk mencari taksiran nilai y_{n+2} dan z_{n+2} sementara, dan metode Newton-Cotes Tertutup digunakan sebagai *Corrector* untuk memperbaiki nilai y_{n+2}, serta ditentukan nilai $h = 0,1$ dan $0 \leq t \geq 100$, diperoleh hasil akhir,

$$y(100) = 0,1786$$

2. **Masalah oleh Stiefel dan Betis**

Diberikan masalah orbit periodik oleh Stiefel dan Betis, yaitu:

$$\begin{aligned} u'' + u &= 0,001cos(x), \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \qquad (3.44) \\ v'' + v &= 0,001sin(x), \qquad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0,9995 \qquad (3.45) \end{aligned}$$

- **Solusi persamaan (3.44)**:

  Untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde dua, persamaan (3.44) harus diubah terlebih dahulu menjadi persamaan diferensial biasa orde 1. Misalkan,

  $$u' = w$$

  maka,

  $$w' = u'' = g(x, u, u') = g(x, u, w) = -u + 0,001cos(x)$$

  sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial orde 1, yaitu sebagai berikut:

  $$\begin{aligned} u' &= f(x, u, w) = w \\ w' &= g(x, u, w) = -u + 0,001cos(x) \qquad (3.46) \end{aligned}$$

  dengan,

  $$\begin{aligned} u_{n-2} &= u(0) = 1 \\ w_{n-2} &= w(0) = 0 \end{aligned}$$

Dari perhitungan menggunakan Matlab, dengan metode Runge-Kutta digunakan untuk mencari nilai-nilai awal u_{n-1}, w_{n-1}, u_n, w_n, u_{n+1}, dan w_{n+1}, metode diferensial Newton-Cotes terbuka digunakan sebagai *predictor* untuk mencari taksiran nilai u_{n+2} dan w_{n+2} sementara, dan metode Newton-Cotes Tertutup digunakan sebagai *Corrector* untuk memperbaiki nilai u_{n+2}, serta ditentukan nilai $h = 0,1$ dan $0 \leq x \geq 100$, diperoleh hasil akhir,

$$u(100) = 0,8370$$

- **Solusi persamaan (3.45)**:

  Untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde dua, persamaan (3.45) harus diubah terlebih dahulu menjadi persamaan diferensial biasa orde 1. Misalkan,

$$v' = z$$

  maka,

$$z' = v'' = g(x, v, v') = g(x, v, z) = -v + 0,001 sin(x)$$

  sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial orde 1, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} v' &= f(x, v, z) = z \\ z' &= g(x, v, z) = -v + 0,001 sin(x) \end{aligned} \tag{3.47}$$

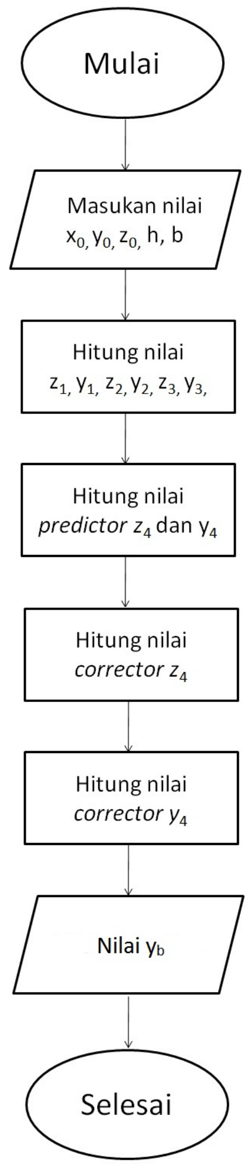
dengan,

$$\begin{aligned} v_{n-2} &= v(0) = 0 \\ z_{n-2} &= z(0) = 0,9995 \end{aligned}$$

Dari perhitungan menggunakan Matlab, dengan metode Runge-Kutta digunakan untuk mencari nilai-nilai awal v_{n-1}, z_{n-1}, v_n, z_n, v_{n+1}, dan z_{n+1}, metode diferensial Newton-Cotes terbuka digunakan sebagai *predictor* untuk mencari taksiran nilai v_{n+2} dan z_{n+2} sementara, dan metode Newton-Cotes Tertutup digunakan sebagai *Corrector* untuk memperbaiki nilai v_{n+2}, serta ditentukan nilai $h = 0,1$ dan $0 \leq x \geq 100$, diperoleh hasil akhir,

$$v(100) = -0,5495$$

Langkah-langkah penyelesaian persamaan duffing dan masalah Stiefel dan Betis dengan menggunakan metode diferensial Newton-Cotes tertutup $k = 4$ dapat dilihat pada diagram alir sebagai berikut:



Gambar 3.1: diagram alir penyelesaian persamaan diferensial dengan integrasi *long-time* menggunakan metode diferensial Newton-Cotes tertutup $k = 4$.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari tulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan 1 pias ($k = 1$), 2 pias ($k = 2$), 3 pias ($k = 3$), dan 4 pias ($k = 4$) telah dibuktikan bersifat simplektik dengan cara mengkonversikan metode tersebut menjadi matriks yang berstruktur simplektik, sehingga metode tersebut dapat dinyatakan sebagai integrator simplektik yang dapat menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial dengan integrasi *long-time*.

2. Metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 4$ dapat diterapkan untuk menyelesaikan persamaan dengan integrasi *long-time* yaitu persamaan Duffing dan masalah oleh Stiefel dan Betis. Karena metode diferensial Newton-Cotes tertutup merupakan metode banyak langkah (*multistep*), maka dalam penyelesaian persamaan Duffing dan masalah oleh Stiefel dan Betis diperlukan metode Runge-Kutta untuk menaksir nilai awal dan metode diferensial Newton-Cotes terbuka sebagai *predictor*.

4.2 Saran

Pada tulisan ini, metode diferensial Newton-Cotes Tertutup yang digunakan hanya terbatas pada metode dengan 4 pias ($k = 4$) saja. Penggunaan metode dengan lebih dari 4 pias ($k = 4$) akan menghasilkan solusi yang lebih akurat.

DAFTAR PUSTAKA

Ascher, Uri M. 2008. *Numerical Methods for Evolutionary Differential Equations.* Philadelphia: Siam.

Chapra, Steven C. dan Raymond P. Canale. 2006. *Numerical Methods for Engineers Fifth Edition.* New York: The McGraw-Hill Companies, Inc.

Chiou, J.C. dan S.D. Wu. 1997. *Open Newton-Cotes differential methods as multilayer symplectic integrators. Journal of Chemical Physics,* 107:6894-6898.

Fox, L. 1965. *A Methodology for an Introduction to Numerical Linear Algebra.* New York: Oxford University press.

Munir, Uri M. 2006. *Metode Numerik.* Informatika: Bandung.

Sanz-Serna, J.M. dan M.P. Calvo. 1994. *Numerical Hamiltonian Problems.* London: Chapman and Hall.

Simos, T.E. 2009. *Closed Newton-Cotes Trigonometrically-Fitted Formulae of High Order for Long-Time Integration of Orbital Problems. Applied Mathematics Letters,* 22(10): 1616-1621.

Zhu, Wusheng, Xingxeng Zhao, dan Youqi Tang. 1996. *Numerical Methods with a high order of accuracy applied in the quantum system. Journal of Chem. Phys.,* 104(6): 2275-2286.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

List Program untuk fungsi menggunakan Matlab

1. Persamaan Duffing

```
function f=f(t,y,z)
f=z;
end

function g=g(t,y,z)
g=-y-y^3+0.002*cos(1.01*t);
```

2. Masalah oleh Stiefel dan Betis

   - Fungsi untuk persamaan (3.44)

```
function f=f(x,u,w)
f=w;
end

function g=g(x,u,w)
g=-u+0.001*cos(x);
end
```

- Fungsi untuk persamaan (3.45)

```
function f=f(x,v,z)
f=z;
end

function g=g(x,v,z)
g=-v+0.001*sin(x);
end
```

LAMPIRAN 2

List Program Runge-Kutta orde 4 dengan menggunakan Matlab

1. Program Runge-Kutta orde 4 untuk mencari taksiran nilai awal y

```
function y_RK4=RK_4y(x0,y0,z0,b,h)
n=(b-x0)/h;
y=y0;
z=z0;
x=x0;
for r=1:n
    k1=h*f(x,y,z);
    m1=h*g(x,y,z);
    k2=h*f(x+h/2,y+k1/2,z+m1/2);
    m2=h*g(x+h/2,y+k1/2,z+m1/2);
    k3=h*f(x+h/2,y+k2/2,z+m2/2);
    m3=h*g(x+h/2,y+k2/2,z+m2/2);
    k4=h*f(x+h,y+k3,z+m3);
    m4=h*g(x+h,y+k3,z+m3);
    y=y+(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
    z=z+(m1 + 2*m2 + 2*m3 + m4)/6;
    x=x+h;
end
y_RK4=y;
end
```

2. Program Runge-Kutta orde 4 untuk mencari taksiran nilai awal z

```
function y_RK4=RK_4z(x0,y0,z0,b,h)
n=(b-x0)/h;
y=y0;
z=z0;
x=x0;
for r=1:n
    k1=h*f(x,y,z);
    m1=h*g(x,y,z);
    k2=h*f(x+h/2,y+k1/2,z+m1/2);
    m2=h*g(x+h/2,y+k1/2,z+m1/2);
    k3=h*f(x+h/2,y+k2/2,z+m2/2);
    m3=h*g(x+h/2,y+k2/2,z+m2/2);
    k4=h*f(x+h,y+k3,z+m3);
    m4=h*g(x+h,y+k3,z+m3);
    y=y+(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
    z=z+(m1 + 2*m2 + 2*m3 + m4)/6;
    x=x+h;
end
y_RK4=z;
end
```

LAMPIRAN 3

List Program metode diferensial Newton-Cotes tertutup dengan $k = 4$ dengan menggunakan Matlab

```
function d=dif_nct(x0,y0,z0,b,h)
n=(b-x0)/h;

y1=RK_4(x0,y0,z0,x0+h,h);
z1=RK_4z(x0,y0,z0,x0+h,h);
y2=RK_4(x0,y0,z0,x0+2*h,h);
z2=RK_4z(x0,y0,z0,x0+2*h,h);
y3=RK_4(x0,y0,z0,x0+3*h,h);
z3=RK_4z(x0,y0,z0,x0+3*h,h);
x=x0;

for r=4:n
    z4=z0+4*h/3*(2*g(x+h,y1,z1)-g(x+2*h,y2,z2)+2*g(x+3*h,y3,z3));
    y4=y0+4*h/3*(2*f(x+h,y1,z1)-f(x+2*h,y2,z2)+2*f(x+3*h,y3,z3));
    z4=z0+2*h/45*(7*g(x,y0,z0)+32*g(x+h,y1,z1)+12*g(x+2*h,y2,z2)
       +32*g(x+3*h,y3,z3)+7*g(x+4*h,y4,z4));
    y4=y0+2*h/45*(7*f(x,y0,z0)+32*f(x+h,y1,z1)+12*f(x+2*h,y2,z2)
       +32*f(x+3*h,y3,z3)+7*f(x+4*h,y4,z4));
    y0=y1;
    y1=y2;
    y2=y3;
    y3=y4;
```

```
    z0=z1;
    z1=z2;
    z2=z3;
    z3=z4;
    x=x+h;
end
d=y4;
```

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama	:	Nurul Hasanah
No. Registrasi	:	3125080171
Jurusan	:	Matematika
Program Studi	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul "**Metode Diferensial Newton-Cotes Tertutup untuk Integrasi *Long-Time***" adalah:

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, Februari 2013

Yang membuat pernyataan

Nurul Hasanah