TWO STAGE LEAST SQUARES (2 SLS) SEBAGAI SALAH SATU METODE PENDUGA PARAMETER PADA PERSAMAAN SIMULTAN DALAM EKONOMETRIKA

Skripsi

Disusun untuk Melengkapi Syarat-syarat

Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains

PUJI ASTUTI

3125061705

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA

2011

PERSETUJUAN PANITIA UJIAN SKRIPSI

Two Stage Least Squares (2 SLS) sebagai Salah Satu Metode Penduga Parameter pada Persamaan Simultan dalam Ekonometrika

Nama	:	Puji Astuti
No. Registrasi	:	3125061705

		Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab				
Dekan	:	Dra. Marheni, M.Sc.	....	....
		NIP. 19500606 197412 2 001		
Wakil Penangung Jawab				
Pembantu Dekan I	:	Dr.rer.nat. Apriliana L. F., MS. M.Ed.	....	....
		NIP. 19600408 199003 2 002		
Ketua	:	Med Irzal, M.Kom	....	....
		NIP. 19770615 200312 1 001		
Sekretaris	:	Ratna Widyati, S.Si, M.Kom.	....	....
		NIP. 19750925 200212 2 002		
Anggota:				
Pembimbing I	:	Fariani Hermin, Ir. M.T.	....	....
		NIP. 19600211 198703 2 001		
Pembimbing II	:	Vera Maya Santi, M.Si.	....	....
		NIP. 19790531 200501 2 006		
Penguji	:	Prof. Dr. Suyono, M.Si.	....	....
		NIP. 19671218 199303 1 005		

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal: 29 Juli 2011

PERSEMBAHANKU

....akan selalu ada yang terindah dari Rabbmu setelah yang terburuk terlewati....

"... Dan tiada seorang pun yang dapat mengetahuinya (dengan pasti) apa yang akan diusahakannya besok ...".

(QS. Luqman:34)

... Man Jadda Wa Jada...

...Barang siapa yang sungguh-sungguh pasti dapat...

Insya Alloh

Skripsi ini kupersembahkan untuk...

mereka yang masih memiliki kepercayaan pada diri ini...serta

untuk hidup dengan nafas yang baru... nafas yang menyimpan kedamaian...

ABSTRACT

PUJI ASTUTI, 3125061705. Two Stage Least Squares (2 SLS) as One Method of Parameter Estimators in Simultaneous Equations in Econometric. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Science, State University of Jakarta. 2011.

The simultaneous equations model is a model that states the two way relationship between the independent variables with dependent variables. There are two methods can be used to identify parameters of simultaneous equation models. It can use a single equation method and system methods. The parameter estimator is said to be good when it has the unbiased nature. Parameter estimators obtained by Ordinary Least Squares (OLS) method has the properties of the BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) but it does not apply to simultaneous equations. Two Stage Least Squares (2 SLS) is used to replace the OLS method to gain parameter estimators that are unbiased. The working principle of 2 SLS is equal to OLS by minimizing the square of its error twice.

Keywords : Simultaneous Equation, OLS, 2 SLS.

ABSTRAK

PUJI ASTUTI, 3125061705.*Two Stage Least Squares* (2 SLS) Sebagai Salah Satu Metode Penduga Parameter Pada Persamaan Simultan Dalam Ekonometrika. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. 2011.

Model persamaan simultan adalah model yang menyatakan terjadinya hubungan dua arah antara variabel bebas dengan variabel tak bebas. Terdapat dua metode yang digunakan dalam menduga parameter pada model persamaan simultan yaitu metode persamaan tunggal dan metode sistem. Syarat sebuah penduga parameter dikatakan baik adalah ketika memiliki sifat *unbiased*. Penduga parameter yang diperoleh dengan metode *Ordinary Least Squares* (OLS) memiliki sifat BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*) tetapi hal tersebut tidak berlaku pada persamaan simultan. *Two Stage Least Squares* (2 SLS) digunakan untuk menggantikan metode OLS demi mendapatkan penduga parameter yang bersifat *unbiased*. Prinsip kerja dari 2 SLS sama dengan OLS yaitu dengan meminimumkan kuadrat galatnya sebanyak dua kali.

Kata kunci : Persamaan Simultan, OLS, 2 SLS.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Alloh SWT Yang Maha Mendengar lagi Maha Melihat atas segala limpahan rahmat, taufik serta hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan lancar dan tanpa rintangan yang berarti.

Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada baginda Nabi Besar Muhammad SAW beserta seluruh keluarga dan sahabatnya yang selalu eksis membantu perjuangan beliau dalam menegakkan Dinulloh di muka bumi ini. Semoga kita pun kelak menjadi ummatnya yang setia hingga hari akhir.

Skripsi ini disusun dalam rangka memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar sarjana sains pada program studi matematika jurusan Matematika fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Jakarta. Adapun judul skripsi ini adalah "*Two Stage Least Squares* (2 SLS) sebagai Salah Satu Metode Penduga Parameter pada Persamaan Simultan dalam Ekonometrika".

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa tanpa bantuan dan dorongan dari berbagai pihak, tidak mungkin skripsi ini dapat selesai. Oleh karena itu pada kesempatan ini perkenankanlah penulis untuk menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Dra. Pinta Deniyanti S., M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNJ.

2. Ibu Ratna Widyati, S.Si, M.Kom, selaku Sekretaris Jurusan Matematika FMIPA UNJ.

3. Bapak Drs. Makmuri, M.Si, selaku Pembimbing Akademik, terima kasih atas segala pengarahan dan nasehat selama perkuliahan.

4. Ibu Ir. Fariani Hermin, M.T., selaku Ketua Program Studi Jurusan Matematika FMIPA UNJ serta Dosen Pembimbing 1 penulis, terima kasih atas segala nasehat, arahan serta dukungannya dalam penulisan skripsi.
5. Ibu Vera Maya Santi, M.Si, selaku Dosen Pembimbing II penulis yang telah memberikan banyak nasehat serta motivasi-motivasi kehidupan.
6. Seluruh dosen Jurusan Matematika dan staf tata usaha FMIPA UNJ.
7. Mama, Bapak, mba atik dan keluarga, mba arum terima kasih atas kesabaran, doa, dan dukungan moril serta materiil dari kalian semua.
8. Sahabat sekaligus adik serta kakak, Chalimatussyadiah (H5) terima kasih telah bersedia berjuang bersama.
9. Sahabat serta guru sepermainan di ciganjur dan pasar minggu, MaMath 2006, serta anggota keluarga KAMMI UNJ yang tidak dapat disebutkan satu persatu.
10. Semua pihak yang terlibat langsung maupun tidak langsung. Semoga Allah SWT senantiasa melimpahkan rahmat serta karunia-Nya.

Penulis menyadari terdapat kekurangan dan kelemahan dalam penyajian skripsi ini yang disebabkan oleh keterbatasan ilmu pengetahuan dan kemampuan yang penulis miliki. Penulis berharap semoga hasil dari skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca dan semua pihak yang memerlukan informasi dari skripsi ini.

Jakarta, Juli 2011

Puji Astuti

DAFTAR ISI

ABSTRACT iii

ABSTRAK iv

KATA PENGANTAR v

DAFTAR GAMBAR viii

I PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang Masalah 1

1.2 Perumusan Masalah 3

1.3 Pembatasan Masalah 3

1.4 Tujuan Penulisan 4

1.5 Manfaat Penulisan 4

1.6 Metode Penulisan 4

II LANDASAN TEORI 5

2.1 Nilai Harapan Vektor Acak 5

2.2 Variansi Vektor Acak 6

2.3 Persamaan Tunggal 7

2.4 Persamaan Simultan 8

2.4.1 Bentuk Persamaan Simultan 9

2.4.2 Contoh Model Persamaan Simultan 13

2.5 *Ordinary Least Squares* (OLS) 16

III PEMBAHASAN 21

3.1 Bias Persamaan Simultan 21

3.2 Proses Pengidentifikasian Penduga Parameter Pada Persamaan Simultan 23

3.2.1 Masalah Identifikasi 23

3.3 *Two Stage Least Squares* (2 SLS) 29

3.4 Contoh Penggunaan *Two Stage Least Squares* (2 SLS) 39

IV PENUTUP **44**

4.1 Kesimpulan 44

4.2 Saran 44

LAMPIRAN **46**

Daftar Gambar

3.1 Diagram Alur Identifikasi Masalah 24

3.2 Jenis Persamaan Identifikasi 25

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Ekonometrika merupakan perpaduan ilmu dari teori ekonomi, matematika, dan statistika dimana di dalamnya dipelajari gejala ekonomi serta teori ekonomi yang bersifat kuantitatif dengan berdasarkan rumusan matematis dan analisa statistik. Ekonometrika sangat berfungsi dalam menganalisis data empiris untuk menguji keberlakuan suatu teori ekonomi, memecahkan persoalan yang terdapat dalam suatu gejala ekonomi, menarik kesimpulan yang sangat bermanfaat dalam penentuan kebijakan, meramalkan gerak perubahan nilai variabel serta merumuskan suatu kasus menjadi model persamaan.

Merumuskan suatu kasus menjadi model persamaan merupakan hal mutlak yang perlu dilakukan sebelum langkah penyelesaian kasus dijalankan. Oleh karena itu, ada baiknya mengetahui terlebih dahulu model persamaan apa saja yang terdapat di dalam ekonometrika. Model persamaan dalam ekonometrika dapat berupa model persamaan tunggal atau model persamaan simultan. Perbedaan dari kedua model tersebut terletak pada hubungan sebab akibat yang timbul antara variabel satu dengan variabel lainnya di dalam persamaan.

Model persamaan tunggal memiliki satu atau lebih variabel bebas dan satu variabel tak bebas yang nantinya akan menimbulkan hubungan sebab akibat satu arah. Hubungan sebab akibat satu arah yang dimaksud adalah variabel bebas hanya mempengaruhi variabel tak bebas dan tidak berlaku sebaliknya.

Jika pada persamaan tunggal berlaku hubungan satu arah, maka pada persamaan simultan berlaku hubungan dua arah (simultan) yaitu variabel bebas mempengaruhi variabel tak bebas dan variabel tak bebas mempengaruhi variabel bebas. Dari model persamaan simultan tersebut nantinya akan diperoleh informasi pengaruh variabel-variabel yang timbal balik.

Kemungkinan alih fungsi variabel bebas maupun tak bebas dapat terjadi pada model persamaan simultan. Variabel tak bebas yang sebelumnya telah hadir dalam suatu persamaan dapat hadir kembali di persamaan lainnya sebagai variabel bebas. Hal ini dapat terjadi karena di dalam model persamaan simultan terdapat lebih dari satu variabel tak bebas dan lebih dari satu persamaan, dimana nantinya akan terbentuk yang dinamakan dengan sistem persamaan simultan.

Metode *Ordinary Least Squares* (OLS) atau biasa disebut kuadrat terkecil biasa adalah metode penduga paramater pada persamaan tunggal. Penduga yang diperoleh dengan metode OLS mempunyai sifat *Best Linear Unbiased Estimator*. Hal tersebut tidak berlaku pada persamaan simultan, karena ketika OLS digunakan sebagai metode penduga parameter pada persamaan simultan maka yang terjadi adalah koefisien penduga parameter yang dihasilkan bersifat bias.

Terdapat dua metode yang biasa digunakan untuk menentukan penduga parameter pada persamaan simultan yaitu

1. Metode persamaan tunggal atau metode informasi terbatas (*Limited Information Methods*). Termasuk di dalam metode ini yaitu *Indirect Least Squares* (ILS), *Two Stage Least Squares* (2 SLS), dan *Limited Information Maximum Likelihood* (LIML).

2. Metode sistem (*System Methods*) yang dikenal sebagai metode informasi

penuh (*Full Information Methods*). Termasuk di dalam metode ini yaitu *Three Stage Least Squares* (3 SLS) dan *Full Information Maximum Likelihood* (FIML).

Berdasarkan hasil penelitian sebelumnya telah dibahas perbandingan metode penduga parameter pada sistem persamaan simultan dengan menggunakan metode yang terdapat pada metode informasi terbatas (Suerlianto, 2006) sedangkan secara lebih khusus metode penduga parameter pada persamaan simultan yaitu *limited information maximum likelihood* dibahas oleh Romika, 2009. Dalam skripsi ini akan dikhususkan untuk membahas salah satu metode penduga parameter persamaan simultan yaitu *Two Stage Least Squares* (2 SLS) atau dalam bahasa indonesia dikenal dengan metode kuadrat terkecil dua tahap .

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas permasalahan yang akan diuraikan dalam skripsi ini adalah membahas salah satu metode penduga parameter yaitu *Two Stage Least Squares* (2 SLS) ketika metode *Ordinary Least Squares* (OLS) tidak tepat lagi digunakan untuk menduga parameter pada persamaan simultan.

1.3 Pembatasan Masalah

Permasalahan yang akan dikaji lebih lanjut dalam skripsi ini dibatasi pada penduga parameter pada persamaan simultan dalam ekonometrika dengan metode *Two Stage Least Squares* (2 SLS).

1.4 Tujuan Penulisan

Berdasarkan perumusan masalah di atas maka tujuan penulisan skripsi ini adalah membahas metode *Two Stage Least Squares* (2 SLS) sebagai salah satu metode untuk menduga parameter pada persamaan simultan.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi penulis, memperdalam pengetahuan dan teori mengenai metode penduga parameter *Two Stage Least Squares* (2 SLS).
2. Bagi pihak lain, sebagai salah satu referensi dan informasi tambahan untuk melakukan penelitian dan kajian lebih lanjut.

1.6 Metode Penulisan

Metode penulisan pada skripsi ini merupakan kajian teoretis dalam bidang ekonometrika dengan menggunakan pemikiran yang didasarkan pada buku-buku dan jurnal.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Nilai Harapan Vektor Acak

Definisi 2.1.1. Misal

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix}$$

adalah vektor acak berukuran $k \times 1$ dan $E[Y_i] = \mu_i$ dengan $i = 1, 2, \ldots, k$. Maka vektor rataan $E[Y]$ didefinisikan sebagai:

$$E[Y] = \begin{bmatrix} E[Y_1] \\ E[Y_2] \\ \vdots \\ E[Y_k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{bmatrix} = \mu$$

Aturan-aturan yang berlaku di dalam nilai harapan:

1. Jika a adalah vektor bilangan riil, maka $E[a] = a$

2. Jika a adalah vektor skalar berukuran $k \times 1$ dan Y vektor acak dengan $E[Y] = \mu$, maka
$$E[a'Y] = a'E[Y] = a'\mu$$

3. Jika A matriks berukuran $n \times k$ dan Y vektor acak berukuran $k \times 1$

dengan $E[Y] = \mu$, maka

$$E[AY] = AE[Y] = A\mu$$

2.2 Variansi Vektor Acak

σ^2 merupakan notasi dari variansi dan didefinisikan dengan $\sigma^2 = E[(Y-\mu)^2]$

Definisi 2.2.1. Misal

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix}$$

adalah vektor acak dengan var$(Y_i) = \sigma_{ii} = \sigma_i^2$ dimana $i = 1, 2, \ldots, k$; cov $(Y_i, Y_j) = \sigma_{ij}$ dengan $i \neq j$ dan $E[Y] = \mu$. Maka variansi dari vektor acak Y adalah sebagai berikut:

$$Var(Y) = V = E[(Y-\mu)(Y-\mu)']$$

Aturan-aturan yang berlaku di dalam variansi yaitu:

1. Jika Y adalah vektor acak dengan var$(Y) = V$ dan a adalah vektor bilangan riil, maka var$(a'Y) = a'Va$
2. Jika Y adalah vektor acak dengan var$(Y) = V$ dan A adalah matriks berukuran $p \times p$, maka $Var(AY) = AVA'$

2.3 Persamaan Tunggal

Model persamaan pada kasus ekonometrika dapat berupa model persamaan tunggal atau persamaan simultan. Model persamaan tunggal biasanya diselesaikan dengan menggunakan analisis regresi, karena di dalam persamaan tunggal (*single equation*) terdapat hubungan sebab akibat satu arah. Model tersebut memiliki satu atau lebih variabel bebas X serta satu peubah tak bebas yang bergantung pada X. Bentuk umum dari persamaan regresi linear atau persamaan tunggal yang dimaksud adalah

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_p X_{ip} + \varepsilon_i \tag{2.1}$$

untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ dimana

- Y_i = variabel tak bebas ke-i
- X_{ij} = variabel bebas ke-j $(j = 1, 2, ..., p)$ dengan asumsi X_{ij} dan Y_i berhubungan linier
- β_0 = konstanta
- β_j = parameter yang belum diketahui dengan $(j = 1, 2, ..., p)$
- ε_i = komponen galat dengan asumsi-asumsi $E(\varepsilon_i) = 0$ dan $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ serta tidak ada korelasi antara variabel galat ε_i dan variabel ε_i berdistribusi normal.

Persamaan tunggal dengan menggunakan analisis regresi memiliki kelemahan karena penyelesaian kasus-kasusnya berdasarkan pada asumsi-asumsi yang harus dipenuhi, seperti asumsi bahwa semua variabel bebas diukur tanpa kesalahan pengukuran dan variabel tak bebas diasumsikan dapat diukur secara langsung. Berdasarkan realita di lapangan, pada kasus ekonomi banyak variabel yang tidak dapat diukur secara langsung misalnya seperti faktor jumlah anggota keluarga, usia anggota keluarga, budaya yang mempengaruhi jumlah pengeluaran konsumsi seseorang.

Faktor-faktor di atas merupakan bagian dari variabel laten (variabel tak terobservasi) yang tidak dapat diukur secara langsung melainkan diukur melalui variabel lain sebagai variabel indikator. Penyelesaian untuk kasus-kasus yang beberapa variabelnya tidak bisa diukur secara langsung dapat diselesaikan melalui jalur ekonometrika dengan sistem persamaan simultannya.

2.4 Persamaan Simultan

Kata 'simultan' pada sistem persamaan simultan dalam wilayah ilmu ekonometrika dapat diartikan sebagai suatu keterkaitan hubungan di dalam suatu sistem persamaan berdasarkan teori ekonomi. Secara sederhana hal yang membedakan antara model persamaan tunggal dengan model persamaan simultan terletak pada variabelnya. Persamaan simultan tidak hanya memiliki satu variabel tak bebas tetapi lebih dari satu variabel tak bebas dan juga lebih dari satu variabel bebas.

Hubungan yang sering tercipta pada persamaan simultan adalah hubungan sebab akibat dua arah. Hubungan sebab akibat dua arah yang dimaksud yaitu jika pada model persamaan tunggal nilai variabel tak bebas Y bergantung pada variabel bebas X, maka pada model persamaan simultan dapat terjadi hal yang sebaliknya yaitu nilai variabel X bergantung dari nilai variabel tak bebas Y.

Secara lebih khusus penggunaan istilah variabel bebas dan variabel tak bebas tidak tepat lagi digunakan pada model persamaan simultan. Hanya saja sebagai awalan dengan bahasa yang mudah variabel pada persamaan simultan terbagi menjadi variabel endogen dan variabel eksogen. Variabel endogen setara dengan variabel tak bebas sedangkan variabel eksogen setara dengan variabel bebas.

Model persamaan simultan memiliki lebih dari satu persamaan dan akhirnya terbentuklah sistem persamaan simultan. Kondisi tersebut memungkinkan bagi variabel-variabelnya memiliki fungsi ganda. Misalnya pada persamaan yang pertama suatu variabel berfungsi sebagai variabel eksogen tetapi kemudian pada persamaan kedua variabel tersebut berubah fungsi menjadi variabel endogen.

2.4.1 Bentuk Persamaan Simultan

Bentuk persamaan simultan memuat dua persamaan yaitu:

2.4.1.1 Persamaan Struktural

Persamaan Struktural adalah suatu kajian statistika yang dapat digunakan untuk menganalisis variabel indikator, variabel laten dan kekeliruan pengukurannya. Persamaan struktural dapat menganalisis bagaimana hubungan antara variabel indikator dengan variabel latennya yang dikenal sebagai persamaan pengukuran (*measurement equation*) dan hubungan antara variabel laten yang dikenal dengan persamaan struktural (*structural equation*) yang secara bersama-sama melibatkan kesalahan pengukuran (Bollen, 1989).

Variabel laten yang dimaksud di atas adalah variabel yang tidak dapat diukur secara langsung melainkan diukur oleh variabel-variabel terobservasi dengan asumsi bahwa variabel-variabel terobservasi berkolerasi kuat dengan variabel laten yang diukurnya. Variabel indikator atau variabel terobservasi adalah variabel yang dapat diukur secara langsung.

Metode persamaan struktural merupakan persamaan yang menguraikan struktur suatu perekonomian atau tingkah laku dari para pelaku ekonomi seperti konsumen, produsen, dan distributor. Untuk setiap variabel endogen, ada satu persamaan struktural. Koefisien pada persamaan struktural disebut parameter struktural yang menunjukkan pengaruh langsung dari variabel yang bersangkutan.

Definisi 2.4.1. Bentuk struktural dari persamaan simultan dengan M persamaan umum dan M variabel endogen yaitu:

$$
\begin{array}{llllllllll}
Y_{1t} = & & & \beta_{12}Y_{2t} & + & \beta_{13}Y_{3t} & + & \ldots & & +\beta_{1M}Y_{Mt} \\
 & & + & \gamma_{11}X_{1t} & + & \gamma_{12}X_{2t} & + & \ldots & & +\gamma_{1K}X_{Kt} \\
 & & & & & & & & & +u_{1t} \\
Y_{2t} = & \beta_{21}Y_{1t} & + & & + & \beta_{23}Y_{3t} & + & \ldots & & +\beta_{2M}Y_{Mt} \\
 & & + & \gamma_{21}X_{1t} & + & \gamma_{22}X_{2t} & + & \ldots & & +\gamma_{2K}X_{Kt} \\
 & & & & & & & & & +u_{2t} \\
Y_{3t} = & \beta_{31}Y_{1t} & + & \beta_{32}Y_{2t} & + & & & \ldots & & +\beta_{3M}Y_{Mt} \\
 & & + & \gamma_{31}X_{1t} & + & \gamma_{32}X_{2t} & + & \ldots & & +\gamma_{3K}X_{Kt} \\
 & & & & & & & & & +u_{1t} \\
\vdots & & & \vdots & & & & & & \vdots \\
Y_{Mt} = & \beta_{M1}Y_{1t} & + & \beta_{M2}Y_{2t} & + & \ldots & + & \beta_{M,M-1}Y_{M-1,t} & & \\
 & & + & \gamma_{M1}X_{1t} & + & \gamma_{M2}X_{2t} & + & \ldots & & +\gamma_{MK}X_{Kt} \\
 & & & & & & & & & +u_{Mt}
\end{array}
$$

dimana

- $Y_1, Y_2, \ldots, Y_M$ = variabel endogen atau variabel tak bebas bersama sebanyak M
- $X_1, X_2, \ldots, X_K$ = variabel yang ditetapkan lebih dahulu sebanyak K, (satu dari variabel X ini mungkin mengambil nilai satu untuk memungkinkan unsur intersep dalam tiap persamaan)
- $u_1, u_2, \ldots, u_M$ = galat sebanyak M

- $t = 1, 2, \ldots, N$ = banyaknya observasi total
- β = koefisien variabel endogen
- γ = koefisien variabel yang ditetapkan lebih dahulu

Berdasarkan persamaan di atas, variabel yang terdapat pada bentuk struktural persamaan simultan memiliki dua jenis sifat:

1. bersifat endogen (*endogeneous variable*), yaitu variabel yang nilainya ditetapkan dalam model serta bersifat stokastik.
2. ditetapkan lebih dahulu (*predetermined variable*) yaitu variabel yang nilainya ditetapkan di luar model atau dengan kata lain nilainya sudah ditetapkan terlebih dahulu. Variabel ini bersifat nonstokastik. *Predetermined variable* terbagi dalam dua kategori yaitu
    - bersifat eksogen, baik dalam periode saat ini maupun lag.
    - bersifat endogen lag.

Pada halaman sebelumnya bentuk persamaan struktural memuat variabel X_{1t} sebagai suatu variabel eksogen saat ini, sedangkan $X_{1(t-1)}$ adalah variabel eksogen lag, dengan satu periode waktu. $Y_{1(t-1)}$ adalah variabel endogen lag dengan satu periode waktu yang bersifat nonstokastik. Penentuan suatu variabel menjadi variabel endogen atau variabel yang ditetapkan lebih dahulu (*predetermined variable*) berada di tangan sang pembuat model.

Akhirnya secara umum persamaan simultan bila dinotasikan dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut:

$$y_i = Y_i\beta_i + Y_j\beta_j + X_i\gamma_i + X_j\gamma_j + u_i$$

dimana

- y_i = vektor observasi variabel endogen pada persamaan ke i berukuran $T \times 1$
- Y_i = matriks observasi variabel endogen lainnya terletak pada persamaan ke- i dan berukuran $T \times (G_1 - 1)$
- Y_j = matriks observasi variabel endogen lainnya yang tidak ada pada persamaan ke- i
- X_i = matriks observasi variabel eksogen yang ada pada persamaan ke- i dan berukuran $T \times K_1$.
- X_j = matriks observasi variabel eksogen yang tidak ada pada persamaan ke- i.
- β_i dan γ_i = parameter pada persamaan ke -i.
- β_j dan γ_i = parameter pada bukan persamaan ke-i, sehingga pada persamaan ke - i bernilai nol.

sehingga biasa ditulis dengan

$$y_i = Y_i\beta_i + X_i\gamma_i + u_i$$

T adalah jumlah observarsi, G_1 merupakan jumlah variabel endogen yang ada pada persamaan ke-i, sedangkan K_1 yaitu jumlah variabel eksogen yang ada pada persamaan ke-i

2.4.1.2 Persamaan Identitas

Yaitu persamaan yang menunjukkan kesamaan dari suatu variabel serta tidak dapat menunjukkan perilaku variabel endogen. Dibentuk oleh perkalian, pembagian, penambahan atau pengurangan beberapa variabel. Contoh dari persamaan identitas ini disajikan bersamaan dengan contoh persamaan struktural pada subbab 2.4.2 (Contoh model persamaan simultan).

2.4.2 Contoh Model Persamaan Simultan

2.4.2.1 Model Keynes

Salah satu model persamaan simultan yang tidak asing dalam permasalahan ekonomi yaitu Model Keynes yang berfungsi untuk menetapkan penghasilan. Keynes menyatakan bahwa berdasarkan konsep rata-rata apabila penghasilan orang meningkat, maka pengeluaran konsumsi orang itu juga akan meningkat, tetapi meningkatnya pengeluaran konsumsi tidak lebih besar dari meningkatnya penghasilan (Sarwoko, 2005).

Anggap variabel penghasilan dinotasikan dengan Y dan variabel konsumsi dengan C, maka model matematikanya adalah $C = f(Y)$ atau dalam bentuk persamaan dapat ditulis menjadi

$$C = \beta_0 + \beta_1 Y \tag{2.2}$$

dimana

- β_0 menunjukkan konstanta
- β_1 menunjukkan koefisien tangen alpha atau slope

Model matematika untuk fungsi konsumsi di atas mengasumsikan hubungan yang bersifat pasti antara pengeluaran konsumsi dengan tingkat penghasilan. Kenyataannya, hubungan variabel-variabel ekonomi bersifat tidak pasti. Banyak variabel tidak pasti lainnya yang turut serta mempengaruhi besarnya pengeluaran konsumsi. Misalnya jumlah keluarga, usia anggota keluarga, faktor budaya, dan sebagainya dimana variabel-variabel tersebut memberikan tekanan pengaruh terhadap konsumsi.

Cara untuk mengikutsertakan variabel-variabel tidak pasti tersebut agar dapat terumuskan ke dalam model persamaan adalah dengan memunculkan mereka sebagai variabel baru $\boldsymbol{u}$ yang biasa dikenal sebagai galat, maka persamaan (2.2) akan mengalami sedikit modifikasi menjadi

$$C = \beta_0 + \beta_1 Y + u$$

Selain fungsi konsumsi, pada persamaan model Keynes juga terdapat suatu fungsi yang biasa disebut fungsi identifikasi penghasilan seperti yang tertuang dalam rumus berikut

$$Y = C + I$$

dimana

- Y = penghasilan
- C = konsumsi
- I = investasi

Secara matematika model persamaan simultan untuk model Keynes mengandung persamaan struktural dan persamaan identitas yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Fungsi Konsumsi} &: \; C_t = \beta_0 + \beta_t Y_t + \varepsilon \\ \text{Identitas Penghasilan} &: \; Y_t = C_t + I_t (= S_t) \end{aligned}$$

dimana

- C = Komsumsi
- Y = Penghasilan

- I = Investasi
- S = Tabungan
- t = Waktu
- ε = Galat
- β_0 dan β_1 = Parameter

Variabel-variabel yang terkandung di dalam model Keynes di atas antara lain variabel endogen yaitu C (konsumsi) dan Y (penghasilan) karena besar nilai keduanya ditentukan oleh model yaitu C pada persamaan konsumsi dan Y pada persamaan Indentifikasi Penghasilan. Variabel eksogennya adalah I (investasi) karena variabel tersebut ditentukan di luar model.

2.4.2.2 Model Permintaan dan Penawaran

Contoh lainnya yang termasuk ke dalam model persamaan simultan yaitu model permintaan dan penawaran, dimana harga suatu barang ditentukan secara serentak oleh kekuatan interaksi antara produsen dan konsumen di dalam pasar barang itu. Model persamaan simultan yang dimaksud adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Fungsi Penawaran} &: \; Q_t^s = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \varepsilon_{1t} \\ \text{Fungsi Permintaan} &: \; Q_t^d = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 Y_t \varepsilon_{2t} \\ \text{Persamaan Identitas} &: \; Q_t^d = Q_t^s \end{aligned}$$

dimana

- Q_t^s = Jumlah penawaran untuk komoditas tertentu
- Q_t^d = Jumlah permintaan untuk komoditas tertentu

- t = Waktu
- P = Harga
- Y_t = Tingkat penghasilan
- α dan β = Parameter
- ε = Galat

Tiga fungsi di atas secara berturut-turut adalah fungsi struktural yaitu fungsi penawaran dan fungsi permintaan serta yang terakhir adalah fungsi identitas yang merupakan keseimbangan antara penawaran dan permintaan.

2.5 *Ordinary Least Squares* (OLS)

Ordinary Least Squares (OLS) merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk memperoleh penduga parameter pada persamaan tunggal dengan bentuk persamaan yang telah disebutkan pada persamaan (2.1). Bentuk persamaan tersebut apabila dinotasikan ke dalam bentuk matriks yaitu:

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{2.3}$$

dimana

- Y = Vektor dengan elemen di dalamnya adalah nilai-nilai amatan variabel tak bebas berukuran $n \times 1$
- β = Vektor dengan elemen di dalamnya adalah parameter yang ingin diduga berukuran $(p + 1) \times 1$
- X = Matriks rancangan berukuran $n \times (p + 1)$
- ε = Vektor acak galat berukuran $n \times 1$

Metode OLS adalah metode yang digunakan untuk menentukan nilai β sedemikian hingga jumlah kuadrat galat $\varepsilon'\varepsilon$ minimum. Langkah penyelesaian yang dilakukan oleh OLS adalah dengan meminimumkan jumlah kuadrat residual. Jumlah kuadrat residual yaitu perbedaan antara nilai yang diharapkan dengan nilai yang diobservasi.

Berdasarkan teorema 2.5.1., penduga parameter untuk persamaan (2.3) akan didapatkan.

Teorema 2.5.1. *Jika X adalah matriks rancangan berukuran $n \times (p+1)$ yang bersifat full rank dengan $p+1 \leq n$, maka penduga kuadrat terkecil untuk β adalah*

$$\widehat{\beta} = b = (X'X)^{-1}X'Y$$

Agar penduga parameter pada teorema 2.5.1. dapat langsung diterapkan untuk persamaan (2.3) maka pembuktian teorema harus dijalankan.

Bukti. Langkah pertama yang dilakukan dalam menduga parameter β yaitu dengan menguadratkan galat, dimana $\widehat{\varepsilon} = Y - X\beta$. Anggap bahwa penduga bagi vektor galat ε dinotasikan dengan $\widehat{\varepsilon}' = (Y - Xb)'$ sehingga dengan demikian jumlah kuadrat galat dapat dinyatakan dengan rumus sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} &= (Y - Xb)'(Y - Xb) \\
&= [Y' - (Xb)'](Y - Xb) \\
&= (Y' - b'X')(Y - Xb) \\
&= Y'Y - Y'Xb - b'X'Y + b'X'Xb
\end{aligned}$$

karena $b'X'Y$ adalah matriks berukuran 1×1, maka

$$\begin{aligned}
b'X'Y &= (b'X'Y)' \\
&= Y'Xb
\end{aligned}$$

sehingga didapatkanlah

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} &= Y'Y - Y'Xb - b'X'Y + b'X'Xb \\
&= Y'Y - Y'Xb - Y'Xb + b'X'Xb \\
&= Y'Y - 2Y'Xb + b'(X'X)b \\
&= Y'Y - 2(X'Y)'b + b'(X'X)b \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya yaitu menurunkan persamaan (2.4) terhadap b kemudian disamakan dengan nol agar didapatkan b yang membuat $\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}$ minimum.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}}{\partial b} &= \frac{\partial Y'Y - 2(X'Y)'b + b'(X'X)b}{\partial b} \\
&= -2X'Y + (X'X)b + (X'X)'b \\
&= -2X'Y + 2(X'X)b
\end{aligned}$$

karena $\frac{\partial\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}}{\partial b} = 0$, maka akan diperoleh persamaan

$$-2X'Y + 2(X'X)b = 0$$

atau

$$\begin{aligned}
(X'X)b &= X'Y \\
b &= (X'X)^{-1}X'Y \\
\widehat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'Y \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

$\square$

Persamaan (2.5) disebut juga dengan perasamaan normal. $(X'X)^{-1}X'$ adalah matriks konstanta dari b, ia merupakan fungsi linear dari Y dan disebut juga dengan penduga linier.

Subtitusikan $Y = X\beta + \varepsilon$ ke dalam persamaan (2.5) maka akan didapatkan

$$
\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'Y \\
&= (X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon) \\
&= (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \\
&= \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon
\end{aligned}
$$

Syarat sebuah penduga parameter dikatakan baik adalah penduga parameter tersebut bersifat tak bias serta memiliki variansi yang minimum. Penduga parameter dikatakan tak bias yaitu ketika nilai harapan penduga parameter tersebut sama dengan nilai parameternya.

Anggap ε_i saling bebas dengan $E(\varepsilon_i) = 0$, dan variansi konstan $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_n^2$. Telah disebutkan sebelumnya bahwa sebuah penduga parameter dikatakan tak bias pada saat nilai harapan penduga parameter tersebut sama dengan nilai parameternya yaitu

$$
\begin{aligned}
E(\widehat{\beta}) &= E(\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon) \\
&= E(\beta) + E((X'X)^{-1}X'\varepsilon) \\
&= E(\beta) + (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

$E(\varepsilon) = 0$, maka

$$\begin{aligned} E(\widehat{\beta}) &= E(\beta) + (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon) \\ &= E(\beta) + ((X'X)^{-1}X' \cdot 0) \\ &= \beta + 0 \\ &= \beta \end{aligned}$$

Dengan demikian, β merupakan penduga parameter yang tak bias.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Bias Persamaan Simultan

OLS tidak dapat diterapkan untuk menduga persamaan tunggal pada sistem persamaan simultan, jika satu atau lebih variabel yang menjelaskan berkorelasi dengan galat. Hal ini dapat terjadi karena asumsi yang harus dipenuhi oleh OLS diantaranya adalah variabel bebas X tidak berkorelasi dengan galat. Untuk membuktikan hal tersebut dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:
Misal

$$\begin{aligned} y_i &= Y_i\beta_i + X_i\gamma_i + u_i \\ &= Z_i\delta_i + u_i \end{aligned}$$

dimana

- y_i= vektor observasi variabel endogen dengan koefisien satu yang ada pada persamaan ke-i dan berukuran $T \times 1$
- Y_i= matriks observasi variabel endogen yang ada pada pesamaan ke -i dan berukuran $T \times (G_1 - 1)$
- X_i= matriks observasi variabel eksogen yang ada pada persamaan ke -i dan berukuran $T \times K_1$
- $\delta_i = \begin{pmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix}$ = vektor parameter yang akan diestimasi dan berukuran

$(G_1 - 1 + K_1) \times 1$

- u = vektor galat yang berukuran $T \times 1$
- Z_i=$[Y_i X_i]$
- T adalah jumlah observasi, G_1 merupakan jumlah variabel endogen yang ada pada persamaan ke -i, sedangkan K_1 yaitu jumlah variabel eksogen yang ada pada persamaan ke-i.

Dengan metode OLS sesuai teorema 2.5.1., maka didapatkan nilai penduganya:

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_i &= (Z_i' Z_i)^{-1} Z_i' y_i \\
&= (Z_i' Z_i)^{-1} Z_i' (Z_i \delta_i + u_i) \\
&= (Z_i' Z_i)^{-1} Z_i' Z_i \delta_i + (Z_i' Z_i)^{-1} Z_i' u_i \\
&= \delta_i + (Z_i' Z_i)^{-1} Z_i' u_i \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

selanjutnya akan dicari nilai harapan dari persamaan (3.1)

$$\begin{aligned}
E(\hat{\delta}_i) &= E(\delta_i + (Z_i' Z_i)^{-1} Z_i' u_i) \\
&= \hat{\delta}_i + E((Z_i' Z_i)^{-1} Z_i' u_i)
\end{aligned}$$

Variabel Z_i mengandung Y_i yang merupakan variabel endogen tak bebas dari u_i. Artinya variabel Y_i berkorelasi dengan galat. Oleh karena itu $E((Z_i' Z_i)^{-1} Z_i' u_i)$ tidak dapat hilang sehingga penduga parameter dengan menggunakan OLS menjadi bias karena $E(\hat{\delta}_i) \neq \delta_i$.

Alasan lain OLS tidak dapat diterapkan pada sistem persamaan simultan adalah ketika pada salah satu persamaan didapatkan penduga parameter yang tak bias, namun pada persamaan lainnya didapatkan penduga parameter yang bias. Berarti OLS hanya dapat diterapkan pada salah satu atau sebagian persamaan pada sistem persamaan simultan. Oleh karena itu dapat dikatakan bahwa OLS tidak dapat diterapkan untuk satu sistem persamaan simultan secara utuh. Namun, sebenarnya OLS dapat diterapkan pada sistem persamaan simultan jika saja persamaan struktural pada sistem persamaan simultan diubah terlebih dahulu menjadi bentuk *reduce form*.

3.2 Proses Pengidentifikasian Penduga Parameter Pada Persamaan Simultan

Terdapat dua metode untuk mendapatkan penduga parameter yang tepat bagi persamaan simultan yaitu metode persamaan tunggal dan metode sistem. Metode persamaan tunggal meliputi:

1. *Indirect Least Squares* (ILS) atau kuadrat terkecil tak langsung
2. *Two Stage Least Squares* (2 SLS) atau kuadrat terkecil dua tahap
3. *Limited Information Maximum Likelihood* (LIML)

sedangkan metode sistem meliputi:

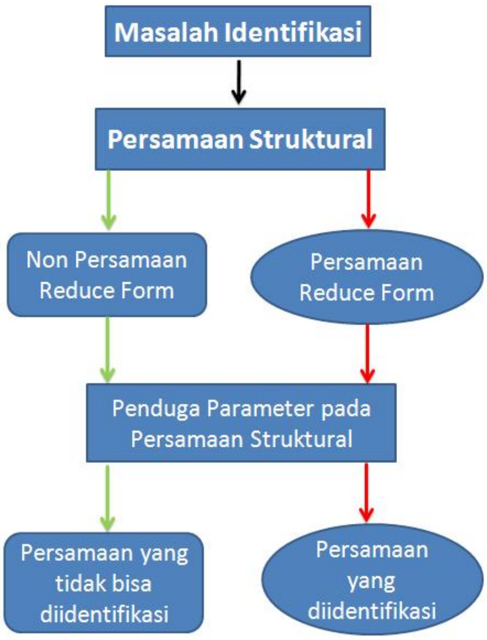
1. *Three Stage Least Squares* (3 SLS) atau kuadrat terkecil tiga tahap
2. *Full Information Maximum Likelihood* (FIML)

Namun, dalam menentukan metode apa yang tepat bagi persamaan simultan diperlukan proses pengidentifikasian terlebih dahulu. Dua cara yang dapat digunakan dalam proses mengidentifikasi persamaan simultan yaitu aturan kondisi order dan aturan kondisi rank.

3.2.1 Masalah Identifikasi

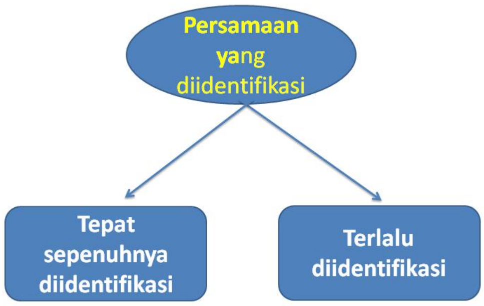
Pengertian dari proses pengidentifikasian atau masalah identifikasi yaitu apakah penduga dari parameter pada persamaan struktural dapat diperoleh dari hasil duga koefisien persamaan *reduce form*. Pengertian dari *reduce form* itu sendiri adalah persamaan yang menggambarkan masing-masing variabel endogen dan merupakan sebuah fungsi dari variabel-variabel *predetermined* dalam model.

Suatu persamaan dapat dikatakan diidentifikasi (*identified*) ketika penduga dari parameter pada persamaan struktural diperoleh dari hasil duga koefisien persamaan *reduce form*. Jika kondisi berlaku sebaliknya, maka dikatakan persamaan yang sedang dibahas tersebut tidak dapat diidentifikasi (*unidentified*) atau kurang diidentifikasi (*underidentified*).



Gambar 3.1: Diagram Alur Identifikasi Masalah

Suatu persamaan yang diidentifikasi dapat berupa tepat sepenuhnya diidentifikasi (*exactly* atau *fully* atau *just identified*) atau terlalu diidentifikasikan (*overidentified*). Dikatakan tepat diidentifikasi jika didapat satu nilai angka dari parameter-parameter struktural sedangkan jika lebih dari satu nilai angka diperoleh dari beberapa parameter dalam persamaan-persamaan struktural maka dikatakan terlalu diidentifikasikan (*overidentified*).



Gambar 3.2: Jenis Persamaan Identifikasi

Pada prinsipnya masalah identifikasi adalah memungkinkan menggunakan persamaan-persamaan *reduce form* untuk menentukan identifikasi sebuah persamaan di dalam sebuah sistem persamaan simultan. Aturan-aturan di dalam identifikasi meliputi identifikasi kondisi order dan identifikasi kondisi rank (*order and rank conditions of identifications*). Notasi-notasi yang biasa digunakan di dalamnya yaitu:

- M = Jumlah variabel endogen di dalam model
- m = Jumlah variabel endogen di dalam sebuah persamaan tertentu
- K = Jumlah variabel *predetermined* di dalam model
- k = Jumlah variabel *predetermined* di dalam sebuah persamaan tertentu.

3.2.1.1 Identifikasi Kondisi Order

Identifikasi dengan kondisi order dapat dinyatakan dengan dua cara yang berbeda yaitu:

1. Di dalam sebuah model yang terdiri dari M persamaan simultan, agar sebuah persamaan teridentifikasi, maka jumlah variabel harus dikeluarkan paling sedikit $M - 1$ variabel (baik endogen maupun *predetermined*)

dari model itu. Jika variabel yang dikeluarkan tepat $M-1$ variabel, maka persamaan itu pasti teridentifikasi. Jika variabel yang dikeluarkan lebih dari $M-1$ variabel, maka persamaan itu *overidentified.*

2. Di dalam sebuah model yang terdiri dari M persamaan simultan, agar sebuah persamaan teridentifikasi, maka jumlah variabel *predetermined* yang dikeluarkan dari persamaan itu harus tidak lebih dari jumlah variabel endogen yang dimasukkan di dalam persamaan itu dikurangi satu.

Berdasarkan aturan di atas sebuah persamaan dinyatakan teridentifikasi, jika persamaan memenuhi syarat perlu sebagai berikut: $K-k \geq m-1$ Dengan ketentuan:

1. Jika $K-k=m-1$, maka persamaan itu sebagai persamaan teridentifikasi dengan tepat (*exactly identified*)

2. Jika $K-k>m-1$, maka persamaan itu sebagai persamaan teridentifikasi lebih (*overidentified*)

Agar lebih jelas mengenai penggunaan identifikasi kondisi order, berikut akan diberikan contoh penerapannya. Misalkan terdapat sistem persamaan simultan seperti tertera di bawah ini:

$$Y_{1t} = \beta_{10} + \beta_{12} Y_{2t} + \beta_{14} Y_{3t} + \gamma_{11} X_{it} + u_{1t} \tag{3.2}$$

$$Y_{2t} = \beta_{20} + \beta_{23} Y_{3t} + \gamma_{21} X_{1t} + \gamma_{22} X_{2t} + u_{2t} \tag{3.3}$$

$$Y_{3t} = \beta_{30} + \beta_{31} Y_{1t} + \gamma_{31} X_{1t} + \gamma_{32} X_{2t} + u_{3t} \tag{3.4}$$

$$Y_{4t} = \beta_{40} + \beta_{41} Y_{1t} + \beta_{42} Y_{2t} + \gamma_{43} X_{3t} + u_{4t} \tag{3.5}$$

Kemudian masukkan koefisien-koefisien persamaan-persamaan di atas ke dalam tabel sebagai berikut:

Koefisien-koefisien Persamaan (3.2) s.d. (3.5)

No.Persm	C	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	X_1	X_2	X_3
(3.2)	$-\beta_{10}$	1	$-\beta_{12}$	$-\beta_{14}$	0	$-\gamma_{11}$	0	0
(3.3)	$-\beta_{20}$	0	1	$-\beta_{23}$	0	$-\gamma_{21}$	$-\gamma_{22}$	0
(3.4)	$-\beta_{30}$	$-\beta_{31}$	0	1	0	$-\gamma_{31}$	$-\gamma_{32}$	0
(3.5)	$-\beta_{40}$	$-\beta_{41}$	$-\beta_{42}$	0	1	0	0	$-\gamma_{43}$

Lakukan langkah identifikasi kondisi order

No.Persm	(K-k)	(m-1)	Ket
(3.2)	3 - 1 = 2	3 - 1 = 2	Tepat
(3.3)	3 - 2 = 1	2 - 1 = 1	Tepat
(3.4)	3 - 2 = 1	2 - 1 = 1	Tepat
(3.5)	3 - 1 = 2	3 - 1 = 2	Tepat

Hasil identifikasi order menunjukkan bahwa persamaan (3.2) sampai dengan (3.5) teridentifikasi dengan tepat.

3.2.1.2 Identifikasi Kondisi Rank

Identifikasi kondisi rank merupakan syarat cukup setelah syarat perlu difasilitasi oleh identifikasi kondisi order. Di dalam sebuah model persamaan simultan yang terdiri dari M persamaan dengan M variabel endogen, suatu persamaan dinyatakan teridentifikasi jika dan hanya jika paling sedikit ada satu determinan tidak nol dari suatu susunan matriks berukuran $(M-1)\times(M-1)$ yang dapat dibentuk melalui koefisien-koefisien variabel (baik endogen maupun *predetermined*) yang dikeluarkan dari persamaan tertentu namun dimasukkan ke dalam persamaan-persamaan yang lain di dalam model itu.

Langkah-langkah yang dapat dipergunakan dalam menentukan kondisi rank adalah sebagai berikut:

1. Tuliskan sistem ke dalam suatu bentuk tabel.

2. Hapuskan baris koefisien-koefisien dari persamaan yang sedang dipertimbangkan identifikasinya.

3. Hapuskan juga kolom yang berhubungan dengan koefisien-koefisien yang terdapat pada langkah nomor 2.

4. Carilah nilai determinan dengan meggunakan koefisien-koefisien yang tertinggal dari variabel-variabel yang dikeluarkan dari persamaan yang dipertimbangkan identifikasinya itu pada persamaan yang lain.

Berdasarkan pembahasan di atas maka dapat diambil kesimpulan prinsip-prinsip identifikasi sebuah persamaan struktural dalam suatu sistem persamaan simultan:

1. Jika $K - k > m - 1$ dan rank dari matriks A adalah $M - 1$, maka persamaan itu overidentifikasi.

2. Jika $K - k = m - 1$ dan rank dari matriks A adalah $M - 1$, maka persamaan itu teridentifikasi dengan tepat.

3. Jika $K - k \geq m - 1$ dan rank dari matriks A lebih kecil daripada $M - 1$, maka persamaan itu kurang teridentifikasi.

4. Jika $K - k < m - 1$, persamaan struktural tidak teridentifikasi. Dalam hal ini rank dari matriks A lebih kecil dari $M - 1$.

Contoh penerapan identifikasi kondisi rank dengan menggunakan persamaan (3.2). Persamaan (3.2) tidak melibatkan variabel-variabel Y_4, X_2, dan X_3. Agar persamaan ini teridentifikasi, harus diperoleh paling sedikit satu determinan order yang memiliki nilai bukan nol dari matriks koefisien-koefisien berukuran (M-1) $\times$ (M-1) yang dikeluarkan dari persamaan ini, tetapi masuk ke dalam persamaan-persamaan yang lain.

Untuk memperoleh determinan, hal pertama yang kita lakukan yaitu memperoleh koefisien-koefisien yang relevan dari variabel-variabel Y_4, X_2, dan X_3 yang masuk ke dalam persamaan-persamaan yang lain. Dalam kasus ini hanya ada satu matriks yaitu

$$\begin{pmatrix} 0 & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_{32} & 0 \\ 0 & -\gamma_{43} & \end{pmatrix}$$

Matriks di atas memiliki determinan 0. Karena determinan 0 maka rank dari matriks lebih kecil dari 3. Sehingga persamaan (3.2) tidak memenuhi syarat kondisi rank dan menjadi tidak teridentifikasi. Dari contoh penerapan identifikasi kondisi order dan identifikasi kondisi rank dapat diketahui bahwa kondisi rank memberikan informasi sebuah persamaan teridentifikasi atau tidak sedangkan kondisi order memberikan informasi suatu persamaan teridentifikasi tepat atau lebih.

3.3 *Two Stage Least Squares* (2 SLS)

Two Stage Least Squares (2 SLS) digunakan untuk menggantikan metode OLS yang tidak dapat diterapkan untuk mengestimasi suatu persamaan dalam sistem persamaan-persamaan simultan, terutama karena adanya saling ketergantungan antara variabel galat dengan variabel-variabel penjelas endogen. Metode yang digunakan 2 SLS sistematis dalam menciptakan variabel-variabel instrumen untuk menggantikan variabel-variabel endogen dalam posisinya sebagai variabel-variabel penjelas dalam sistem persamaan-persamaan simultan.

Suatu model persamaan simultan yang berisikan G variabel endogen dan K variabel eksogen, dapat dituliskan dalam bentuk matriks seperti sebagai berikut:

$$\mathbf{B}\mathbf{y}_t + \Gamma\mathbf{x}_t = \mathbf{u}_t \tag{3.6}$$

dimana G variabel endogen dinotasikan dengan y dan K variabel eksogen dinotasikan dengan x

- $\mathbf{y}_t$ = vektor observasi pada variabel endogen yang berukuran $G \times 1$
- $\mathbf{x}_t$ = vektor observasi pada variabel eksogen yang berukuran $K \times 1$
- $\mathbf{u}_t$ = vektor galat yang berukuran $G \times 1$
- $\mathbf{B}$ = matriks koefisien variabel endogen yang berukuran $G \times G$
- Γ = matriks koefisien variabel endogen yang berukuran $K \times K$
- $t = 1, 2, \ldots, T$

Dengan mengasumsikan bahwa B adalah matriks *nonsingular* didapatkanlah:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= -\mathbf{B}^{-1}\Gamma\mathbf{x}_t + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u}_t \\ &= \Pi\mathbf{X}_t + \mathbf{v}_t \end{aligned}$$

Pada persamaan di atas yang disebut sebagai persamaan reduksi yaitu

$$\Pi = -\mathbf{B}^{-1}\Gamma \qquad\qquad \mathbf{v}_t = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u}_t$$

Persamaan (3.6) merupakan persamaan struktural dengan galat u_t dan kovarian matriks dari u_t adalah σ serta asumsi-asumsi:

- $E(\mathbf{u}_t) = 0$
- $E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_s^{'}) = 0$ untuk $t \neq s$
- $E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t^{'}) = \Sigma$ yang merupakan matriks *nonsingular*

sehingga didapatkan

$$E(\mathbf{v}_t) = (\mathbf{B}^{-1})0 = 0$$

dan

$$E(\mathbf{v}_t\mathbf{v}_t') = \mathbf{B}^{-1}\Sigma(\mathbf{B}^{-1})' = \Omega$$

Salah satu persamaan tunggal pada model persamaan simultan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{Y}_1\beta_1 + \mathbf{X}_1\gamma_1 + \mathbf{u}_1 = \mathbf{Z}_1\delta_1 + \mathbf{u}_1 \tag{3.7}$$

persamaan tersebut dapat digunakan untuk menduga nilai y dengan menggunakan metode 2 SLS. dimana:

- $\mathbf{y}_1$ = vektor observasi pada *dependent* variabel endogen yang berukuran $T \times 1$
- $\mathbf{Y}_1$ = matriks observasi yang termasuk pada variabel endogen lain berukuran $T \times (G_1 - 1)$
- $\mathbf{X}_1$ = matriks observasi pada variabel eksogen yang berukuran $T \times K_1$
- $\delta_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$ = vektor parameter yang akan diestimasi dan berukuran $(G_1 - 1 + K_1) \times 1$
- $\mathbf{u}$ = vektor galat yang berukuran $T \times 1$
- $\mathbf{Z}_1$=[$\mathbf{Y}_1\mathbf{X}_1$]

Asumsi yang digunakan adalah $E(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1)' = \sigma^2\mathbf{I}_t$ dan diasumsikan juga bahwa persamaan (3.7) terlalu diidentifikasi dengan syarat $(m_2{+}K_2) > (m{-}1)$ m_2 dan k_2 adalah jumlah variabel endogen dan eksogen yang tidak termasuk pada persamaan (3.7). Dengan demikian didapatkan bahwa $K = K_1 + K_2$ dan

$m = m_1 + m_2$. Karena $\mathbf{Y}_1$ dan $\mathbf{u}_1$ berkorelasi maka penduga parameter yang dihasilkan dengan metode OLS akan menjadi tidak konsisten. Untuk mendapatkan penduga parameter yang konsisten maka dapat digunakan variabel instrumental dari $\mathbf{Y}_1 = [\mathbf{y}_2\ \mathbf{y}_3\ \ldots\ \mathbf{y}_{G1}]$. Untuk $\mathbf{y}$ adalah vektor berukuran $T \times 1$. Bentuk persamaan reduksi dari variabel ini adalah

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_2 &= \mathbf{X}\pi_2 + \mathbf{v}_2 \\
\mathbf{y}_3 &= \mathbf{X}\pi_3 + \mathbf{v}_3 \\
&\vdots \\
\mathbf{y}_{G1} &= \mathbf{X}\pi_{G1} + \mathbf{v}_{G1}
\end{aligned}$$

dimana

- $\mathbf{X}$ = matriks semua variabel eksogen yang ada pada sistem persamaan simultan berukuran $T \times K$
- π = vektor koefisien persamaan reduksi yang berukuran $K \times 1$
- $\mathbf{v}$ = vektor galat pada persamaan reduksi yang berukuran $T \times 1$

Persamaan reduksi untuk persamaan (3.7) adalah

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{X}\Pi_1 + \mathbf{V}_1 \tag{3.8}$$

Bentuk reduksi persamaan (3.8) harus memenuhi asumsi sebagai berikut:

1. $p \lim \frac{1}{T}\mathbf{X}'\mathbf{X} = \mathbf{Q}$, sebuah matriks *definite positive*
2. $p \lim \frac{1}{T}\mathbf{X}'\mathbf{V}_1 = 0$
3. $p \lim \frac{1}{T}\mathbf{V}_1'\mathbf{X} = 0$
4. $p \lim \frac{1}{T}\mathbf{V}_1'\mathbf{V}_1 = \Omega$,

5. $p \lim \frac{1}{T}\mathbf{Y}_1^{'}\mathbf{Y}_1 = \Pi_1'\mathbf{Q}\Pi_1'$

6. $p \lim \frac{1}{T}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Q}\Pi_1$

Oleh karena itu, dengan menggunakan metode OLS didapatkan penduga $\mathbf{Y}_1$:

$$\hat{\Pi}_1 = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1 \tag{3.9}$$

dan juga diketahui bahwa

$$\mathbf{V}_1 = [\mathbf{V}_2\ \mathbf{V}_3\ \ldots\ \mathbf{V}_{G1}]$$
$$\mathbf{Y}_1 - \mathbf{V}_1 = [\mathbf{X}\pi_3\ \mathbf{X}\pi_3\ \ldots\ \mathbf{X}\pi_{G1}]$$

sehingga persamaan (3.7) dapat ditulis

$$\mathbf{y}_1 = (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{V}_1)\beta_1 + \mathbf{X}_1\gamma_1 + (\mathbf{u}_1 + \mathbf{V}_1\beta_1) \tag{3.10}$$

Karena $(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{V}_1)$ hanya bergantung pada $\mathbf{X}$ dan tidak mengandung galat, maka $(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{V}_1)$ tidak berkorelasi dengan $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{V}_1\beta_1)$. Hal ini akan memberikan dampak yaitu metode OLS menghasilkan penduga yang konsisten untuk β_1 dan γ_1 pada persamaan (3.10). Hanya saja kelemahannnya adalah $\mathbf{V}_1$ menjadi tidak terlihat karena berada pada $(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{V}_1)$. $\mathbf{V}_1$ dapat diganti dengan bentuk reduksi yang sesuai dengannya.

$$Y_1 - \widehat{V_1} = \widehat{Y_1} = [\mathrm{X}\widehat{\pi}_2\ \mathrm{X}\widehat{\pi}_3\ \ldots\ \mathrm{X}\widehat{\pi}_{G1}]$$

dimana $p \lim \left(\mathbf{Y}_1 - \widehat{\mathbf{V}_1}\right) = [\mathbf{X}\pi_2\mathbf{X}\ \pi_3\ \ldots\ \mathbf{X}\pi_{G1}] = \mathbf{Y}_1 - \mathbf{V}_1$

Jadi $\mathbf{Y}_1 - \widehat{\mathbf{V}_1}$ dan $\mathbf{u}_1 + \widehat{\mathbf{V}_1}\beta_1$ asimtot yang tidak berkorelasi. Oleh karena itu, OLS dapat digunakan pada

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \widehat{\mathbf{Y}_1}\beta_1 + \mathbf{X}_1\gamma_1 + \mathbf{u}_1^* \\ \mathbf{u}_1^* &= \mathbf{u}_1 + \widehat{\mathbf{V}_1}\beta_1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Sehingga didapatkan penduga yang konsisten untuk β_1 dan γ_1. Langkah-langkah di atas merupakan tahapan penyelesaian dengan menggunakan metode *Two Stage Least Squares* (2 SLS). Menjalankan proses *Ordinary Least Squares* (OLS) sebanyak dua kali merupakan prinsip kerja dari 2 SLS. Lebih khusus, langkah 2 SLS adalah sebagai berikut:

1. Menduga persamaan reduksi untuk $\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \ldots, \mathbf{y}_{G1}$
2. Penggunaaan metode OLS pada persamaan (3.11)

Jika dianalogikan dengan persamaan (3.9), maka persamaan (3.11) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{y}_1 = \hat{\mathbf{Z}}_1 + \mathbf{u}_1^* \tag{3.12}$$

dimana $p \lim \left(Y_1 - \widehat{V_1}\right) = [\mathrm{X}\pi_2 \mathrm{X}\ \pi_3\ \ldots\ \mathrm{X}\pi_{G1}] = Y_1 - V_1$

Penggunaan metode *Least Square* persamaan (3.12) adalah seperti ditunjukkan pada persamaan di bawah ini:

$$\widetilde{\delta}_1 = \begin{bmatrix} \widetilde{\beta}_1 \\ \widetilde{\gamma}_1 \end{bmatrix} = \left(\widehat{\mathrm{Z}}_1'\widehat{\mathrm{Z}}_1\right)^{-1}\left(\widehat{\mathrm{Z}}_1' y_1\right) = \begin{bmatrix} \widehat{Y}_1'\widehat{Y}_1 & \widehat{Y}_1'\mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_1'\widehat{Y}_1 & \mathrm{X}_1'\mathrm{X}_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{Y}_1' y_1 \\ \mathrm{X}_1' y_1 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Karena

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{Y}}_1'\hat{\mathbf{Y}}_1 &= (\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{V}}_1)'(\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{V}}_1) \\
&= \mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{V}}_1'\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_1'\hat{\mathbf{V}}_1 + \hat{\mathbf{V}}_1'\hat{\mathbf{V}}_1 \\
&= \mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{V}}_1'(\hat{\mathbf{Y}}_1 + \hat{\mathbf{V}}_1) - (\hat{\mathbf{Y}}_1 + \hat{\mathbf{V}}_1)\hat{\mathbf{V}}_1 + \hat{\mathbf{V}}_1'\hat{\mathbf{V}}_1 \\
&= \mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{V}}_1'\hat{\mathbf{V}}_1 - \hat{\mathbf{V}}_1'\hat{\mathbf{V}}_1 + \hat{\mathbf{V}}_1'\hat{\mathbf{V}}_1 \\
&= \mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{V}}_1'\hat{\mathbf{V}}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{V}}_1'\hat{\mathbf{X}}_1 &= (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{X}\hat{\Pi}_1)'\mathbf{X}_1 \\
&= \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 - \hat{\Pi}_1'\mathbf{X}'\mathbf{X}_1 \\
&= \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 - [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1]'\mathbf{X}'\mathbf{X}_1 \\
&= \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 - \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}_1 \\
&= \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 - \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}_1 \\
&= \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 - \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{V}}_1'\hat{\mathbf{Y}}_1' &= (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{X}\hat{\Pi}_1)'\hat{\mathbf{Y}}_1 \\
&= \mathbf{Y}_1'\hat{\mathbf{Y}}_1 - \hat{\Pi}_1'\mathbf{X}'\hat{\mathbf{Y}}_1 \\
&= \mathbf{Y}_1'\hat{\mathbf{Y}}_1 - [(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1]'\mathbf{X}'\hat{\mathbf{Y}}_1 \\
&= \mathbf{Y}_1'\hat{\mathbf{Y}}_1 - \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\hat{\mathbf{Y}}_1 \\
&= \mathbf{Y}_1'\hat{\mathbf{Y}}_1' - \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X}'\hat{\mathbf{Y}}_1 \\
&= \mathbf{Y}_1'\hat{\mathbf{Y}}_1 - \mathbf{Y}_1'\hat{\mathbf{Y}}_1 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}_1'\hat{\mathbf{V}}_1 &= \mathbf{X}_1'(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{X}\hat{\Pi}_1) \\
&= \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 - \mathbf{X}_1'\mathbf{X}\hat{\Pi}_1 \\
&= \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 - \mathbf{X}_1'\mathbf{X}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1] \\
&= \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 - \mathbf{X}_1'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1 \\
&= \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 - \mathbf{X}_1'\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1 \\
&= \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 - \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{V}_1 &= \hat{\mathbf{Y}}_1'(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{X}\hat{\Pi}_1) \\
&= \hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{X}\hat{\Pi}_1 \\
&= \hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{X}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1] \\
&= \hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1 \\
&= \hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1 \\
&= \hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{Y}_1 = 0 \\
\hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{X}_1 &= (\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{V}}_1)'\mathbf{X}_1 = \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 \\
\mathbf{X}_1'\hat{\mathbf{Y}}_1 &= \mathbf{X}_1'(\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{V}}_1) = \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1
\end{aligned}
$$

dan

$$
\hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{y}_1 = (\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{V}}_1)'\mathbf{y}_1 = \hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{y}_1 - \hat{\mathbf{V}}_1'\mathbf{y}_1
$$

Maka persamaan (3.13) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_1 &= \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \tilde{\gamma}_1 \end{bmatrix} \\
&= (\widehat{\mathbf{Z}}_1'\widehat{\mathbf{Z}}_1)^{-1}(\widehat{\mathbf{Z}}_1'\mathbf{y}_1) \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 - \widehat{\mathbf{V}}_1'\widehat{\mathbf{V}}_1 & \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1'\mathbf{y}_1 - \widehat{\mathbf{V}}_1'\mathbf{y}_1 \\ \mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Bentuk seperti ini merupakan formula dari estimator 2 SLS yang biasa diberikan dan pada kenyataannya memang berbeda dari bentuk estimator OLS, yaitu

$$\hat{\delta}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \tilde{\gamma}_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{Z}_1'\mathbf{Z}_1)^{-1}(\mathbf{Z}_1'\mathbf{y}_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1'\mathbf{y}_1 \\ \mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Untuk membuktikan kekonsistenan dari 2 SLS maka dapat dilihat dari peluang limitnya, yaitu:

$$\begin{aligned}
p\lim(\tilde{\delta}_1) &= p\lim[(\hat{\mathbf{Z}}_1'\hat{\mathbf{Z}}_1)^{-1}\hat{\mathbf{Z}}_1'\mathbf{y}_1] \\
&= p\lim[(\hat{\mathbf{Z}}_1'\hat{\mathbf{Z}}_1)^{-1}\hat{\mathbf{Z}}_1'(\hat{\mathbf{Z}}_1\delta_1 + \mathbf{u}_1^*)] \\
&= \delta_1 + p\lim(\hat{\mathbf{Z}}_1'\hat{\mathbf{Z}}_1)^{-1}\hat{\mathbf{Z}}_1'\mathbf{u}_1 \\
&= \delta_1 + p\lim\left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}_1'\hat{\mathbf{Z}}_1}{T}\right)^{-1} p\lim\left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}_1'\mathbf{u}_1}{T}\right)
\end{aligned}$$

Metode ini akan konsisten karena

$$p\ \lim(\frac{\hat{\mathbf{Z}}_1'\mathbf{u}_1}{T}) = \begin{bmatrix} p\ \lim\frac{\hat{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{u}_1}{\mathbf{T}} \\ p\ \lim\frac{\mathbf{X}_1'\mathbf{u}_1}{\mathbf{T}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Hal ini disebabkan variabel **X** tidak berkorelasi dengan galat sehingga

$$p\ \lim \frac{\mathbf{X}_1'\mathbf{u}_1}{\mathbf{T}} = 0$$

Begitu juga dengan

$$\begin{aligned} p\lim \frac{\hat{\mathbf{Y}}_1' u_1}{T} &= p\lim \left(\frac{\hat{\Pi}_1' \mathbf{X}_1' \mathbf{u}_1}{T} \right) \\ &= p\lim \left(\frac{\hat{\Pi}_1'}{T} \right) \cdot p\lim \left(\frac{\mathbf{X}_1' \mathbf{u}_1}{T} \right) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan bahwa

$$p\lim(\tilde{\delta}_1) = \delta_1$$

Untuk mendapatkan asimtot matriks variannya, maka dari persamaan (3.14) didapatkan

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_1 &= \delta_1 + (\hat{\mathbf{Z}}_1'\hat{\mathbf{Z}}_1)^{-1}\hat{\mathbf{Z}}_1'\mathbf{u}_1 \\ \tilde{\delta}_1 - \delta_1 &= (\hat{\mathbf{Z}}_1'\hat{\mathbf{Z}}_1)^{-1}\hat{\mathbf{Z}}_1'\mathbf{u}_1 \end{aligned}$$

Melalui pendekatan peluang limitnya maka asimtot matriks variannya adalah

$$
\begin{aligned}
asy\ var &= T^{-1} p\lim[T(\tilde{\delta}_1 - \delta_1)(\tilde{\delta}_1 - \delta_1)] \\
&= T^{-1} p\lim[T(\hat{\mathbf{Z}}_1' - \hat{\mathbf{Z}}_1)^{-1}\hat{\mathbf{Z}}_1'\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1'\hat{\mathbf{Z}}_1(\hat{\mathbf{Z}}_1'\hat{\mathbf{Z}}_1')^{-1}] \\
&= T^{-1} p\lim\left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}_1'\hat{\mathbf{Z}}_1}{T}\right)^{-1} \cdot p\lim\left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}_1'\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1'\hat{\mathbf{Z}}_1}{T}\right) \cdot p\lim\left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}_1'\hat{\mathbf{Z}}_1}{T}\right)^{-1} \\
&= T^{-1} \cdot \hat{\sigma}_{\mathbf{u}}^2 \cdot p\lim\left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}_1'\hat{\mathbf{Z}}_1}{T}\right)^{-1} \\
&= \hat{\sigma}_{\mathbf{u}}^2 \cdot p\lim(\hat{\mathbf{Z}}_1'\hat{\mathbf{Z}}_1)^{-1} \\
&= \hat{\sigma}_{\mathbf{u}}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{V}}_1'\hat{\mathbf{V}}_1 & \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 \end{bmatrix}^{-1}
\end{aligned}
$$

dimana

$$\hat{\sigma}_{\mathbf{u}}^2 = (\mathbf{y}_1 - \mathbf{Z}_1\tilde{\delta}_1)'(\mathbf{y}_1 - \mathbf{Z}_1\tilde{\delta}_1)/\tau_1$$

Baik $\tau_1 = T$ maupun $\tau_1 = T - G_1 + 1 - K_1$ akan membuat $\hat{\sigma}_u^2$ konsisten terhadap σ_u^2. Jika Z_1 hanya berisi variabel eksogen yang nonstokastik maka pemilihan $\tau_1 = T - G_1 + 1 - K_1$ akan memberikan taksiran yang tak bias terhadap varian.

3.4 Contoh Penggunaan *Two Stage Least Squares* (2 SLS)

Contoh berikut merupakan penggunaan 2 SLS pada model ekonomi makro sederhana dari Keynes dengan data ekonomi dari US tahun 1963-1994. Sistem persamaan yang dikembangkan adalah sebagai berikut:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + NX_t \tag{3.15}$$

$$CO_t = \beta_0 + \beta_1 YD_t + \beta_2 CO_{t-1} + u_{1t} \tag{3.16}$$

$$YD_t = Y_t - T_t \tag{3.17}$$

$$I = \beta_3 + \beta_4 Y_t + \beta_5 r_{t-1} + u_{2t} \tag{3.18}$$

$$r = \beta_6 + \beta_7 Y_t + \beta_8 M_t + u_{3t} \tag{3.19}$$

Dimana

- Y_t = Produk Domestik Brutto (PDB/GDB) tahun t
- CO_t = Total Konsumsi Rumah Tangga tahun t
- I_t = Total Investasi Swasta Domestik Bruto tahun t
- G_t = Total pembelian barang-barang dan jasa-jasa oleh pemerintah
- NX_t =Total Ekspor bersih pada barang-barang dan jasa-jasa tahun t
- T_t = Total Pajak tahun t
- r_t = Tingkat Bunga tahun t
- M_t = Penawaran Uang tahun t
- YD_t= Pendapatan Disposable Rumah Tangga tahun t

Semua variabel tersebut dinyatakan dalam Milyar Dollar US tahun 1987 (harga konstan) kecuali suku bunga dalam nominal persen seperti dalam lampiran. Persamaan-persamaan (3.15) dan (3.16) adalah persamaan struktural dalam sistem tersebut, namun persamaan-persamaan yang bersifat stokastik adalah persamaan-persamaan (3.17), (3.18), (3.19).

Variabel-variabel endogen yang ditentukan melalui sistem adalah Y_t, CO_t, YD_t, dan I_t. Untuk membuktikan bahwa keempat variabel itu ditentukan secara simultan dapat dilihat dengan melihat perubahan salah satu dari variabel itu akan diikuti oleh perubahan variabel yang lain dalam sistem simultan tersebut. Misalnya jika I_t nilainya naik, maka akan menyebabkan Y_t naik dan kenaikan nilai Y_t akan membuat kembali naiknya I_t .

Variabel r_t bukan merupakan variabel endogen dalam sistem persamaan simultan, karena hanya muncul sesekali dalam keseluruhan sistem persamaan simultan (ingat bahwa r_t tidak sama dengan r_{t-1}). Dalam keseluruhan sistem persamaan simultan variabel-variabel *predetermined* adalah G_t, NX_t, T_t, CO_{t-1}, dan r_{t-1}.

Menurut syarat kondisi order, persamaan (3.16) memenuhi syarat karena jumlah variabel *predetermined* lebih banyak daripada koefisien-koefisien slope dari persamaan tersebut. Persamaan ini *overidentified.* Persamaan (3.18) juga *overidentified.* Persamaan-persamaan (3.15) dan (3.17) adalah persamaan-persamaan identitas, sehingga tidak perlu diestimasi. Sekarang kita siap menggunakan 2 SLS terhadap model itu.

Langkah Pertama : Terdapat dua persamaan *reduce form* yang perlu diestimasi dengan menggunakan 2 SLS. Satu persamaan *reduce form* dapat kita lihat sebagai berikut:

$$\Upsilon D_t = 518.99 - 0.54G_t - 0.64NX_t - 0.36T_t + 1.24CO_t - 2.55r_{t-1}$$

$$(85.57) \quad (0.20) \quad (0.16) \quad (0.19) \quad (0.06) \quad (4.07)$$

$$t \quad 6.06 \quad -2.72 \quad -3.92 \quad -1.96 \quad 21.65 \quad -0.63$$

$n = 31 \quad \bar{R}^2 = 0.997 \quad DW = 2.06$

Pada langkah ini kita tidak menguji setiap hipotesis dalam persamaan *reduce form* ini. Tujuan pada langkah ini adalah membuat variabel instrument yang digunakan untuk mengganti variabel endogen pada langkah kedua. Untuk itu, kita menghitung Υ_t dan ΥD_t untuk 31 pengamatan dengan mengisikan nilai-nilai aktuil dari 5 variabel *predetermined* ke dalam persamaan *reduce form*, seperti pada persamaan (3.19).

Langkah kedua : Menggantikan $\hat{Y}_t$ dan $\hat{YD}_t$ untuk variabel-variabel endogen yang muncul di sebelah kanan pada persamaan-persamaan (3.16) dan (3.18). Misalnya, $\hat{YD}_t$ dari persamaan (3.19) menggantikan YD_tpada persamaan (3.16) berikut :

$$CO_t = \beta_0 + \beta_1 \hat{YD}_t + \beta_2 CO_{t-1} + u_{1t} \tag{3.20}$$

Sekarang, kita dapat menggunakan OLS untuk menyelesaikan persamaan (3.20) dan persamaan lain pada langkah kedua ini berdasarkan data pada tabel yang tertera pada lampiran.

$$CO_t = -24.72 + 0.44\hat{YD}_t + 0.54CO_t - 1 + u_1t \tag{3.21}$$

$$(40.77) \quad (0.18) \quad (0.19)$$

$$t \quad -0.61 \quad 2.47 \quad 2.85$$

$n = 31 \quad \bar{R}^2 = 0.997 \quad DW = 1.47$

$$I = 33.76 + 0.16\hat{Y}_t - 5.59r_t - 1 + u_2t \tag{3.22}$$

$$(42.08) \quad (0.01) \quad (3.18)$$

$$t \quad 0.80 \quad 16.15 \quad -1.76$$

$n = 31 \quad \bar{R}^2 = 0.896 \quad DW = 1.01$

Jika kita menggunakan prosedur OLS untuk menggantikan langkah-langkah dengan 2SLS maka hasilnya adalah sebagai berikut :

$$CO_t = -24.72 + 0.44YD_t + 0.54CO_t - 1 + u_1t \tag{3.23}$$

$$(34.70) \quad (0.15) \quad (0.16)$$

$$t \quad -0.71 \quad 2.89 \quad 3.35$$

$n = 31 \quad \bar{R}^2 = 0.997 \quad DW = 0.982$

$$I = 32.85 + 0.164Y_t - 5.604r_t - 1 + u_2t \tag{3.24}$$

$$(41.17) \quad (0.01) \quad (3.11)$$

$$t \quad 0.80 \quad 16.53 \quad -1.80$$

$n = 31 \quad \bar{R}^2 = 0.901 \quad DW = 0.97$

Untuk persamaan (3.19), kita dapat mengestimasi dengan menggunakan prosedur OLS saja :

$$r_t = -13.005 + 0.008Y_t - 0.025M_t + u_2t \tag{3.25}$$

$$(3.991) \quad (0.0016) \quad (0.0047)$$

$$t \quad -3.258 \quad 5.272 \quad -5.289$$

$n = 31 \quad \bar{R}^2 = 0.467 \quad DW = 0.658$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil pada penulisan skripsi ini adalah

1. *Two Stage Least Squares* digunakan untuk menduga parameter suatu sistem persamaan simultan karena penduga parameter yang dihasilkan bersifat tak bias dan konsisten.

2. Prinsip kerja yang digunakan oleh metode *Two Stage Least Squares* adalah dengan menggunakan metode *Ordinary Least Squares* sebanyak dua kali.

4.2 Saran

Skripsi ini hanya menyajikan keutamaan dari *Two Stage Least Squares* (2 SLS) yang dapat menghasilkan penduga parameter yang baik. Untuk ke depannya saran yang dianjurkan yaitu

1. Terpenuhinya syarat penduga parameter yang baik lainnya yaitu nilai variansi yang minimum.

2. Menggunakan metode penduga parameter persamaan simultan lainnya selain *Two Stage Least Squares* (2 SLS).

DAFTAR PUSTAKA

Dufour, Marie Jane. 2008. *Simultaneous equations*. Mc Gill University

Greene, William H. 2002. *Econometrics Analysis Fifth Edition*. Prentice Hall.

Gujarati, Damodar. 1991. *Ekonometrika Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Gujarati, Damodar. 2005. *Basic Econometrics, Fourth Edition*. The MacGraw-Hill.

Keshk, Omar M.G. 2003. *Simultaneous Equations Models: what are they and how are they estimated*.

Myers, Raymond H and Janet Milton. 1991. *A First Course in the Theory of Linear Statistical Models*. Boston: PWS Kent Publishing.

Sarwoko. 2005. *Dasar-dasar Ekonometrika*. Yogyakarta: ANDI.

Sembiring RK. 1995. *Analisis Regresi*. Bandung: ITB.

Walpole, Ronald E. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Bandung: ITB.

http://ekonmetrik.blogspot.com/2009/03/persamaan-simultan.html. 30 April 2011, pukul:22.30.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Model Ekonomi Makro Sederhana

obs	R	YD	M	Y	CO	I	G
1963	3.55	na	na	na	1341.90	na	na
1964	3.97	1562.20	160.30	2340.60	1517.20	371.80	549.10
1965	4.38	1653.50	167.90	2470.50	1597.00	413.00	566.90
1966	5.55	1734.30	172.00	2616.20	1573.80	438.00	622.40
1967	5.10	1811.40	183.30	2685.20	1622.40	418.60	667.90
1968	5.90	1886.80	197.40	2796.90	1707.50	440.10	686.80
1969	7.83	1947.40	203.90	2873.00	1771.20	461.30	682.00
1970	7.71	2025.30	215.40	2873.90	1813.50	429.70	665.80
1971	5.11	2099.90	228.30	2955.90	1873.70	475.70	652.40
1972	4.73	2186.20	249.20	3107.10	1978.40	532.20	653.00
1973	8.15	2334.10	262.80	3268.60	2066.70	591.70	644.20
1974	9.84	2317.00	274.30	3248.10	2053.80	543.00	655.40
1975	6.32	2355.40	287.50	3221.70	2097.50	437.60	663.50
1976	5.34	2440.90	306.30	3380.80	2207.30	520.60	659.20
1977	5.61	2512.60	331.10	3533.30	2296.60	600.40	664.10
1978	7.99	2638.40	358.20	3703.50	2391.80	664.60	677.00
1979	10.91	2710.10	382.50	3796.80	2448.40	669.70	689.30
1980	12.29	2773.60	408.50	3776.30	2447.10	594.40	704.20
1981	15.76	2795.80	436.30	3834.10	2476.90	631.10	713.20
1982	11.89	2820.40	474.30	3760.30	2503.70	540.50	723.60
1983	8.89	2893.60	521.00	3906.60	2619.40	599.50	743.80

obs	R	YD	M	Y	CO	I	G
1984	10.16	3080.10	552.10	4158.50	2746.10	757.50	766.90
1985	8.01	3162.10	619.90	4279.80	2865.80	745.90	813.40
1986	6.39	3261.90	724.50	4404.50	2969.10	735.10	855.40
1987	6.85	3289.50	750.10	4539.90	3052.20	749.30	881.50
1988	7.68	3404.30	787.40	4718.60	3162.40	773.40	886.80
1989	8.80	3464.90	794.70	4838.00	3223.30	784.00	904.40
1990	7.95	3524.50	826.40	4897.30	3272.60	746.80	932.60
1991	5.85	3538.50	897.70	4867.60	3259.40	683.80	944.00
1992	3.80	3648.10	1024.80	4979.30	3349.50	725.30	936.90
1993	3.30	3704.10	1128.40	5134.50	3458.70	819.90	929.80
1994	4.93	3835.40	1157.60	5342.30	3578.50	955.50	922.50

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama	:	Puji Astuti
No. Registrasi	:	3125061705
Jurusan	:	Matematika
Program Studi	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang saya buat ini dengan judul **"*Two Stage Least Squares* (2 SLS) sebagai Salah Satu Metode Penduga Parameter pada Persamaan Simultan dalam Ekonometrika"** adalah:

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.

2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, 08 Agustus 2011

Puji Astuti

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Puji Astuti. Dilahirkan di Jakarta pada 6 Oktober 1988. Anak bungsu dari tiga bersaudara, dari pasangan suami istri, Bapak Nurtjahya dan Ibu Susilawati.

Riwayat Pendidikan. Pendidikan formal yang pernah ditempuh adalah SD Negeri 13 Pagi Jagakarsa Jakarta Selatan, lulus tahun 2000. Pada tahun yang sama masuk SLTPN 41 Jakarta Selatan, lulus tahun 2003, kemudian melanjutkan ke SMA Negeri 38 Jakarta Selatan dan lulus pada tahun 2006. Kemudian melanjutkan studi di Universitas Negeri Jakarta, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, angkatan 2006.

Riwayat Organisasi. Pengalaman organisasi penulis di dalam UNJ adalah penulis pernah mengikuti berbagai kepanitiaan di Badan Eksekutif Mahasiswa seperti anggota panitia masa pengenalan akademik (MPA), PKMJ, pelangi matematika, dan expo MIPA. Penulis pernah pula menjadi pengurus dari Badan Eksekutif Mahasiswa FMIPA. Selain itu kiprah organisasi penulis adalah selama 3 tahun berturut-turut menjadi pengurus di KAMMI Komisariat UNJ.