PENENTUAN *WITHDRAWAL BENEFIT* DALAM ASURANSI JIWA BERBASIS MODEL *DOUBLE DECREMENT*

Skripsi

Disusun Sebagai Salah Satu Syarat

Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains

SAEFUL AZHAR

3125061698

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA

2011

PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

Nama	:	Saeful Azhar
No. Registrasi	:	3125061698
Judul	:	Penentuan *Withdrawal Benefit* Dalam Asuransi Jiwa Berbasis Model *Double Decrement*

		Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penangung Jawab				
Dekan	:	Dra. Marheni, M.Sc. NIP: 19500606 197412 2 001	....	....
Wakil Penangung Jawab				
Pembantu Dekan I	:	Dr.rer.nat. Apriliana L. F., M.Ed. NIP: 19600408 199903 2 002	....	....
Ketua Penguji	:	Med Irzal, M.Kom. NIP: 19770615 200312 1 001	....	....
Sekretaris	:	Ratna Widyati, S.Si., M.Kom. NIP: 19750925 200212 2 002	....	....
Penguji Ahli	:	Ir. Fariani Hermin, M.T. NIP: 19600211 198703 2 001	....	....
Pembimbing I	:	Drs. Sudarwanto, M.Si., DEA. NIP: 19650325 199303 1 003	....	....
Pembimbing II	:	Ibnu Hadi, M.Si. NIP: 19810718 200801 1 017	....	....

Dinyatakan lulus ujian skripsi pada tanggal: 28 Juli 2011

بسم الله الرحمن الرحيم

In the name of Allah,
the Most Beneficent,
the Most Merciful

Sebuah karya untukmu...

Wahai orang yang mencintai ilmu pengetahuan...

ABSTRACT

Saeful Azhar. 3125061698. *Withdrawal Benefit* Under Double Decrement Model Of Life Insurance. Thesis. Faculty Of Mathematics And Sciences. Jakarta State University. 2011.

This thesis discuss about the calculation of whole life insurance based on double decrement model, as an application of multiple decrement theory. There are two causes of decrement, i.e. death and withdrawal. If a person age (x) who become a policyholder terminate the contract with the insurance company before the coverage period ends, then that person is entitled to the withdrawal benefits. Then it will be discussed about how to determine the value of withdrawal benefits and total premiums of a whole life policy.

Keywords: Whole Life Insurances, Premiums, Reserves, Double Decrement Model, Death, Withdrawal.

ABSTRAK

Saeful Azhar. 3125061698. Penentuan *Withdrawal Benefit* dalam Asuransi Jiwa Berbasis Model *Double Decrement*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Negeri Jakarta. 2011.

Skripsi ini membahas tentang perhitungan asuransi jiwa seumur hidup menggunakan model *double decrement* yang merupakan bagian dari teori *multiple decrement*. Ada dua faktor *decrement* yang digunakan yaitu kematian dan pembatalan. Apabila seorang individu yang menjadi pemegang polis membatalkan kontrak dengan suatu perusahaan asuransi sebelum masa pertanggungannya berakhir, maka orang tersebut berhak memperoleh sejumlah manfaat pembatalan. Kemudian juga dibahas tentang bagaimana cara menentukan nilai manfaat pembatalan dan premi total dalam asuransi jiwa seumur hidup.

Kata kunci: Asuransi Jiwa Seumur Hidup, Premi, Tabungan, Model *Double Decrement*, Kematian, Pembatalan.

KATA PENGANTAR

Puji serta syukur saya panjatkan kehadirat Allah SWT beserta Rasulullah Muhammad SAW, karena hanya atas izinNyalah skripsi yang berjudul "Penentuan *Withdrawal Benefit* Dalam Asuransi Jiwa Berbasis Model *Double Decrement*" ini dapat diselesaikan dengan baik.

Terselesaikannya skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak yang telah banyak memberikan ide, saran, bantuan, doa, dan juga motivasi. Oleh karena itu pada kesempatan ini saya ingin mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Kedua orang tua serta keluarga besar saya tercinta yaitu: Bapak, Mama, Abob, Yayan, dan Dede. Karena telah memberikan banyak doa serta bantuan secara moral maupun material.

2. Bapak Drs. Sudarwanto, M.Si., DEA., selaku Dosen Pembimbing I, yang telah memberikan ide-ide brilian, saran, dan bimbingannya kepada saya.

3. Bapak Ibnu Hadi, M.Si., selaku Dosen Pembimbing II, yang telah memberikan pengarahan, bantuan, dan dukungannya kepada saya.

4. Ibu Dra. Pinta D. Sampurno, M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika.

5. Ibu Ir. Fariani Hermin, M.T., selaku Ketua Program Studi Matematika.

6. Ibu Ratna Widyati, S.Si., M.Kom., selaku Dosen Pembimbing Akademik sekaligus sebagai Sekretaris Jurusan Matematika.

7. Seluruh Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah mengajarkan begitu banyak ilmu pengetahuan kepada saya.

8. Sahabat-sahabat seperjuangan yang tergabung dalam Mamath '06 yaitu: asri, nissa, apri, hengki, hendra, laode, ach fauzan, fahriyah, devi, afifah, nova, fauzan amr, teleng, dany, munir, yulia, vita, riya, risma, danis, lia, mila, siti, puji, si tri, ari, fadhil, reantina, lian, titin, yosa, fitrika, herman, reza, farhan, valen, sherlis.
9. Seluruh mahasiswa Matematika UNJ, Civitas akademika FMIPA UNJ, dan semua pihak yang telah banyak membantu namun tidak bisa saya sebutkan satu per satu. Sekali lagi terima kasih banyak.
10. Yang terakhir saya ucapkan terima kasih kepada Miss Vinka atas cinta dan motivasinya.

Saya menyadari bahwa skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan karena sesungguhnya kesempurnaan hanya milik Allah SWT. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat saya harapkan untuk kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat terutama bagi diri saya sendiri dan juga bagi anda yang membacanya.

Jakarta, Agustus 2011

Saeful Azhar

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada masa sekarang ini, asuransi jiwa adalah bagian dari investasi yang merupakan pengalihan resiko finansial terhadap kematian seseorang yang dibebankan kepada suatu perusahaan asuransi. Seorang peserta asuransi (*insured*) atau pemegang polis yang telah terikat kontrak dengan suatu perusahaan asuransi (*insurer*) akan membayar kewajibannya berupa premi. Perusahaan asuransi akan membayar kewajibannya berupa manfaat (*benefit*) kepada orang tersebut apabila terjadi klaim di masa depan.

Dalam produk asuransi jiwa di beberapa negara dikenal suatu istilah, yaitu *withdrawal benefit*. Jika seorang individu yang menjadi peserta asuransi jiwa membatalkan dan menghentikan suatu kontrak dengan perusahaaan asuransi, maka orang tersebut berhak menerima sejumlah manfaat pembatalan yang disebut dengan *withdrawal benefit* atau *nonforfeiture benefit* (Carriere, 1998). Hal ini dikarenakan selama masa pertanggungan orang tersebut telah membayar sejumlah premi kepada perusahaan asuransi yang bersangkutan.

Dalam ilmu aktuaria, berakhirnya suatu status disebut *decrement*. Status seorang individu dapat berakhir karena disebabkan oleh berbagai faktor, misalnya karena kematian, cacat, pensiun, dan pembatalan atau pengunduran diri. Faktor-faktor tersebut dikenal sebagai faktor *decrement*. Model perhitungan asuransi jiwa yang telah banyak dipelajari adalah model yang berbasis pada satu faktor *decrement*, yaitu kematian, sehingga disebut sebagai model *single decrement*, sedangkan model perhitungan asuransi jiwa yang berbasis pada lebih dari satu faktor *decrement* disebut sebagai model *multiple decrement*.

Bowers (1997) menjelaskan bahwa, jika *withdrawal benefit* dalam asuransi jiwa berbasis model *double decrement* dengan pembayaran kontinu adalah sama dengan tabungan dalam asuransi jiwa berbasis model *single decrement*, maka premi dan tabungan dalam model *double decrement* adalah sama dengan premi dan tabungan dalam model *single decrement*. Dalam skripsi ini akan dibahas lebih lanjut mengenai penentuan nilai premi dan *withdrawal benefit* dalam perhitungan asuransi jiwa seumur hidup.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana penentuan nilai *withdrawal benefit* dalam asuransi jiwa yang berbasis pada model yang menggunakan dua faktor *decrement*, yaitu kematian dan pembatalan. Selanjutnya akan dibahas bagaimana penentuan nilai premi total dalam asuransi jiwa berbasis model *double decrement* tersebut.

1.3 Pembatasan Masalah

Asuransi jiwa yang dibahas dalam skripsi ini adalah asuransi jiwa seumur hidup untuk seorang individu. Waktu-hingga-kematian (*time-until-death*) dan waktu-hingga-pembatalan (*time-until-withdrawal*) adalah variabel acak yang diasumsikan saling bebas. Tingkat suku bunga diasumsikan konstan.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah:

1. Mengaplikasikan model *double decrement* dalam asuransi jiwa seumur hidup.

2. Mengetahui perhitungan nilai premi dan *withdrawal benefit* dalam asuransi jiwa seumur hidup yang berbasis model *double decrement*.

1.5 Manfaat Penulisan

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat menambah pengetahuan dalam bidang aktuaria tentang model *multiple decrement*. Penulis mampu melakukan analisis dalam perhitungan asuransi jiwa berbasis model *double decrement*.

1.6 Metode Penulisan

Metode penulisan yang digunakan pada skripsi ini adalah kajian teoritis dalam bidang aktuaria tentang aplikasi teori model *multiple decrement* dengan menggunakan pemikiran logis dan sistematis yang didasarkan pada buku dan jurnal.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Laju Pembungaan

Bunga adalah suatu penghargaan atas modal uang yang telah diinvestasikan. Suku bunga untuk satu satuan waktu dinotasikan dengan i. Suku bunga yang bunganya dibayarkan beberapa kali dalam satu periode disebut bunga nominal. Pada umumnya metode perhitungan bunga yang digunakan adalah perhitungan bunga majemuk, dimana bunga yang dihasilkan dijadikan modal pada periode berikutnya untuk dibungakan lebih lanjut.

Menurut Futami (1987), laju pembungaan yang dinotasikan dengan δ merupakan tingkat bunga nominal tahunan untuk waktu sesaat. Secara umum, jika dalam satu tahun terjadi pembayaran sebanyak k kali dengan besaran pokok 1 dan bunga tahunan sebesar i, maka satu tahun kemudian besar pokok beserta bunga menjadi

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(k)}}{k} \right)^k.$$

Setelah satu tahun kemudian besar bunga menjadi

$$i = \left(1 + \frac{i^{(k)}}{k} \right)^k - 1$$

kemudian dapat diperoleh

$$i^{(k)} = k \left[(1 + i)^{\frac{1}{k}} - 1 \right] \tag{2.1}$$

dimana

$$\begin{aligned} k &= \text{banyaknya pembayaran bunga tiap tahun} \\ i^{(k)} &= \text{tingkat bunga nominal per tahun yang dibayarkan } k \text{ kali} \\ \frac{i^{(k)}}{k} &= \text{tingkat bunga yang dibayarkan tiap } \frac{1}{k} \text{ tahun.} \end{aligned}$$

Dari persamaan (2.1), dapat diperoleh laju pembungaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} i^{(k)} &= \lim_{k\to\infty} k \, [(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1] \\ &= \lim_{k\to\infty} k \, [e^{\frac{1}{k} \ln(1+i)} - 1] \\ &= \lim_{k\to\infty} k \left[\frac{1}{k} \ln(1+i) + \frac{(\ln(1+i))^2}{2k^2} + \ldots \right] \\ &= \ln(1+i) \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Faktor diskonto v didefinisikan dengan $\dfrac{1}{1+i}$, maka hubungan antara faktor diskonto dengan laju pembungaan adalah

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{1+i} \\ \ln v &= \ln(1+i)^{-1} \\ \ln v &= -\ln(1+i) \\ \ln v &= -\delta \\ v &= e^{-\delta}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2 Fungsi Hidup

Misalkan T menyatakan suatu waktu hidup. Waktu hidup seseorang dianggap sebagai variabel acak kontinu yang non-negatif. Fungsi distribusi kumulatif dari waktu hidup T dinotasikan sebagai berikut

$$F(t) = \mathbf{P}(T \leq t);\ t \geq 0.$$

Akan selalu diasumsikan bahwa F memiliki fungsi kepadatan peluang $f(t)$ yang kontinu pada interval $(0, \infty)$, yaitu

$$F(t) = \int_0^t f(x)\ dx$$

atau

$$F'(t) = f(t).$$

Definisi 2.2.1. *Misalkan T adalah waktu hingga terjadi kematian, dimana $T \geq 0$. Fungsi hidup adalah peluang seseorang akan bertahan hidup hingga waktu t yang didefinisikan sebagai berikut*

$$S(t) = \mathbf{P}(T > t).$$

Fungsi hidup harus memenuhi beberapa kondisi sebagai berikut:

1. *Fungsi hidup $S(t)$ adalah fungsi kontinu untuk $0 \leq t \leq \infty$.*

2. *$S(t)$ merupakan fungsi turun dan tidak naik.*

3. *Untuk $t = 0$ berlaku $S(0) = 1$, dan untuk $t = \infty$ berlaku $S(\infty) = 0$.*

Fungsi hidup dapat ditulis sebagai

$$S(t) = \int_t^{\infty} f(x)\ dx$$

sehingga fungsi F dan S memenuhi hubungan

$$F(t) + S(t) = 1.$$

Jika T merupakan variabel acak kontinu, maka $S(t)$ juga kontinu dan merupakan komplemen dari fungsi distribusi kumulatif, yaitu

$$S(t) = 1 - F(t).$$

Berdasarkan sifat dari fungsi distribusi kumulatif, $f(t)$ dapat dinyatakan sebagai turunan dari $S(t)$ terhadap t sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{dF(t)}{dt} \\ &= \frac{d(1 - S(t))}{dt} \\ &= -\frac{dS(t)}{dt}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.2.1 Waktu-Hingga-Kematian Untuk Orang Berusia x Tahun

Peluang bersyarat bahwa seseorang yang baru lahir akan meninggal dalam usia antara x dan z, dengan sebelumnya hidup hingga usia x adalah

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(x < X \leq z \mid X > x) &= \frac{\mathbf{P}(X \leq z) - \mathbf{P}(X < x)}{\mathbf{P}(X > x)} \\
&= \frac{F_X(z) - F_X(x)}{S_X(x)} \\
&= \frac{(1 - S_X(z)) - (1 - S_X(x))}{S_X(x)} \\
&= \frac{-S_X(z) + S_X(x)}{S_X(x)} \\
&= \frac{S_X(x) - S_X(z)}{S_X(x)}.
\end{aligned}$$

Definisi 2.2.2. *Seseorang yang berusia x tahun dinotasikan dengan (x) dan X adalah variabel acak kontinu yang menyatakan usia (x) saat meninggal, maka waktu hidup akan datang (future lifetime) dari (x) dinotasikan dengan $T(x)$, didefinisikan sebagai*

$$T(x) = X - x.$$

Fungsi distribusi dari $T(x)$ adalah

$$_tq_x = \mathbf{P}\left[T(x) \leq t\right] \ ; \ t \geq 0 \tag{2.4}$$

kemudian fungsi hidup (x) adalah

$$_tp_x = 1 - {}_tq_x = \mathbf{P}\left[T(x) > t\right] \ ; \ t \geq 0.$$

Notasi $_tq_x$ menyatakan peluang bahwa (x) akan meninggal dalam waktu t tahun, merupakan fungsi distribusi dari $T(x)$. Sebaliknya, $_tp_x$ menyatakan peluang (x) akan hidup hingga usia $x + t$, merupakan fungsi hidup untuk (x). Jika $t = 1$, awalan dalam simbol tidak perlu dituliskan sehingga diperoleh

$$q_x = \mathbf{P}[(x) \text{ akan meninggal sebelum usia } x+1]$$
$$p_x = \mathbf{P}[(x) \text{ akan hidup hingga usia } x+1].$$

Nilai harapan dari $T(x)$ dinotasikan dengan $\dot{e}_x$ yang disebut harapan hidup lengkap (*complete expectation of life*). Dengan menggunakan pengintegralan, diperoleh nilai harapan dari $T(x)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= E[T(x)] \\ &= \int_0^\infty t \ f_T(t) \ dt \\ &= \int_0^\infty t \ \left(-\frac{dS(t)}{dt}\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

nilai dari $E[T(x)]^2$ adalah

$$\begin{aligned} E[T(x)]^2 &= \int_0^\infty t^2 \ f_T(t) \ dt \\ &= \int_0^\infty t^2 \ \left(-\frac{dS(t)}{dt}\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dari persamaan (2.5) dan (2.6) diperoleh variansi dari $T(x)$, yaitu

$$\begin{aligned} Var[T(x)] &= E[T(x)]^2 \ - \ (E[T(x)])^2 \\ &= \int_0^\infty t^2 \ \left(-\frac{dS(t)}{dt}\right) \ - \ \left[\int_0^\infty t \ \left(-\frac{dS(t)}{dt}\right)\right]^2 \\ &= \int_0^\infty t^2 \ \left(-\frac{dS(t)}{dt}\right) \ - (\dot{e}_x)^2. \end{aligned}$$

2.2.2 Laju Kematian

Laju kematian seseorang pada suatu waktu atau *force of mortality* yang dinotasikan dengan μ_x, dapat dicari dengan menggunakan peluang bersyarat (0) akan meninggal antara usia x dan $x+t$, dengan sebelumnya hidup hingga usia x. Misalkan X adalah usia saat meninggal, $F(x)$ merupakan fungsi distribusi dari X, sehingga dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(x < X \leq x+t \mid X > x) &= \frac{\mathbf{P}(X \leq x+t) - \mathbf{P}(X < x)}{\mathbf{P}(X > x)} \\ &= \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= {}_tq_x \end{aligned} \tag{2.7}$$

dimana ${}_tq_x$ adalah peluang (x) akan meninggal dalam t tahun, sehingga peluang (x) akan hidup dalam t tahun adalah

$$\begin{aligned}{}_tp_x &= 1 - \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{1 - F(x) - F(x+t) + F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{1 - F(x+t)}{1 - F(x)}.\end{aligned}$$

Dengan mengganti $t = \triangle x$ pada persamaan (2.7), maka diperoleh

$$\mathbf{P}(x < X \leq x + \triangle x \mid X > x) = \frac{F(x + \triangle x) - F(x)}{1 - F(x)}.$$

Misalkan X adalah usia saat kematian terjadi, dimana $X \geq 0$. Laju kematian didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mu_x &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\mathbf{P}(x < X \leq x + \triangle x | X > x)}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\mathbf{P}(x < X \leq x + \triangle x)}{\triangle x \ \mathbf{P}(X > x)} \\
&= \frac{1}{\mathbf{P}(X > x)} \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\mathbf{P}(X \leq x + \triangle x) - \mathbf{P}(X < x)}{\triangle x} \\
&= \frac{1}{S(x)} \lim_{\triangle x \to 0} \frac{F_X(x + \triangle x) - F_X(x)}{\triangle x} \\
&= \frac{1}{S(x)} \frac{dF(x)}{dx} \\
&= \frac{\frac{d}{dx} F(x)}{S(x)} \\
&= \frac{\frac{d}{dx}(1 - S(x))}{S(x)} \\
&= -\frac{d}{dx}(\ln S(x)). \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Dengan mengganti $x = y$ pada persamaan (2.8) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mu(y) &= -\frac{d}{dy}(\ln S(y)) \\
-\mu(y) &= \frac{d(\ln S(y))}{dy} \\
-\mu(y) \ dy &= d(\ln S(y)). \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Persamaan (2.9) diintegralkan dari x ke $x + n$, diperoleh

$$\begin{aligned}
-\int_x^{x+n} \mu(y) \ dy &= \int_x^{x+n} d \ \ln S(y) \\
&= \ln S(y) \mid_x^{x+n} \\
&= \ln S(x + n) - \ln S(x) \\
&= \ln \left[\frac{S(x + n)}{S(x)} \right] \\
&= \ln \ {}_n p_x
\end{aligned}$$

sehingga dapat diperoleh

$$\exp\left[-\int_x^{x+n} \mu(y)\ dy\right] = \ {}_np_x. \tag{2.10}$$

jika $s = y - x$, maka persamaan (2.10) dapat ditulis kembali menjadi

$${}_np_x = \exp\left[-\int_x^{x+n} \mu(x+s)\ ds\right].$$

Misalkan $F_T(t)$ dan $f_T(t)$ menyatakan fungsi distribusi dan fungsi kepadatan peluang dari $T(x)$. Diketahui bahwa $F_T(t) = \ {}_tq_x$, maka

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{d}{dt}\ {}_tq_x \\ &= \frac{d}{dt}\left[1 - \frac{S(x+t)}{S(x)}\right] \\ &= \frac{S(x+t)}{S(x)}\left[-\frac{S'(x+t)}{S(x+t)}\right] \\ &= \ {}_tp_x\ \mu(x+t) \quad ; t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Jika ${}_tp_x\ \mu(x+t)\ dt$ adalah peluang bahwa (x) akan meninggal antara t dan $t+dt$ dimana

$$\int_0^{\infty} {}_tp_x\ \mu(x+t)\ dt = 1$$

maka dari persamaan (2.11) dapat diperoleh

$$\frac{d}{dt}(1 - \ {}_tp_x) \ = \ -\frac{d}{dt}\ {}_tp_x \ = \ {}_tp_x\ \mu(x+t). \tag{2.12}$$

2.3 Asuransi Jiwa Seumur Hidup

Asuransi jiwa seumur hidup adalah suatu bentuk asuransi yang menyediakan pembayaran manfaat apabila terjadi kematian atas peserta asuransi pada suatu waktu di masa depan. Berdasarkan waktu pembayaran manfaatnya, asuransi jiwa seumur hidup dibedakan menjadi dua jenis yaitu pembayaran manfaat yang dilakukan segera saat terjadi kematian, dan pembayaran manfaat yang dilakukan pada akhir tahun setelah terjadi kematian.

Dalam asuransi jiwa seumur hidup dimana manfaatnya dibayarkan segera saat terjadi kematian, waktu pembayaran manfaatnya tidak diketahui sampai pemegang polis meninggal.

Definisi 2.3.1. *Misalkan b_t adalah fungsi manfaat, v_t adalah fungsi diskonto, definisikan z_t sebagai fungsi nilai sekarang yaitu*

$$z_t = b_t\ v_t. \tag{2.13}$$

Karena variabel acak waktu hidup akan datang $T(x) = t$ bernilai non-negatif, maka b_t, v_t, dan z_t juga bernilai non-negatif. Nilai sekarang manfaat bergantung pada tanggal pembayaran, sehingga nilai sekarang manfaat Z merupakan suatu fungsi dari waktu kematian dan didefinisikan sebagai suatu variabel acak. Sehingga dapat dituliskan sebagai

$$Z = b_T\ v_T.$$

Misalkan pembayaran sebesar 1 unit akan dibayarkan pada saat terjadi kematian (x), fungsi b_t, v_t, dan Z dapat dituliskan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
b_t &= 1 \quad ; \quad t \geq 0 \\
v_t &= v^t \quad ; \quad t \geq 0 \\
Z &= v^T \quad ; \quad T \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

Nilai harapan dari nilai sekarang manfaat Z disebut sebagai *actuarial present value* (APV). Simbol dasar APV untuk asuransi jiwa seumur hidup dengan pembayaran manfaat sebesar 1 unit dilakukan segera pada saat kematian (x) adalah $E[Z]$ yang dinotasikan dengan $\bar{A}_x$. Nilai ini bisa dicari dengan menganggap Z sebagai fungsi T sehingga $E[Z] = E[z_T]$. Berdasarkan persamaan (2.11), T memiliki fungsi kepadatan peluang $f_T(t) = \ {}_tp_x \ \mu(x+t) = \ {}_tp_x \ \mu_x(t)$. Sehingga dapat diperoleh

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_x &= E[Z] \\
&= E[z_T] \\
&= \int_0^\infty z_T \ f_T(t)dt \\
&= \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x \ \mu_x(t)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\delta t} \ {}_tp_x \ \mu_x(t)dt.
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

2.4 Anuitas Jiwa Seumur Hidup

Anuitas jiwa adalah deretan pembayaran yang dilakukan secara kontinu pada interval waktu tertentu (bulanan, tahunan) selama orang yang melakukan pembayaran masih hidup. Anuitas dapat dibayarkan secara berjangka selama beberapa tahun, atau dapat juga dibayarkan selama seumur hidup. Anuitas jiwa mempunyai peran yang penting dalam pembentukan manfaat yang akan dibayarkan apabila terjadi klaim.

Anuitas jiwa seumur hidup merupakan anuitas jiwa yang dibayarkan selama seumur hidup. Pada prakteknya anuitas dibayarkan dalam interval waktu diskrit. Namun jika interval waktu pembayarannya saling berdekatan (misalkan bulanan), anuitas ini bisa dianggap sebagai anuitas yang dibayarkan secara kontinu.

Definisi 2.4.1. *Misalkan suatu anuitas jiwa dibayarkan secara kontinu sebesar 1 unit setiap tahun, T adalah waktu hidup akan datang, dan δ adalah laju pembungaan. Definisikan variabel acak Y sebagai nilai sekarang dari anuitas jiwa sebagai berikut*

$$Y = \bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1 - v^T}{\delta} \ ; T \geq 0.$$

Actuarial present value (APV) untuk anuitas jiwa seumur hidup yang dinotasikan dengan $\bar{a}_x$ merupakan nilai harapan dari variabel Y, yaitu

$$\begin{aligned} \bar{a}_x &= E[Y] \\ &= \frac{E[1 - v^T]}{E[\delta]} \\ &= \frac{1 - E[v^T]}{\delta} \\ &= \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta} \end{aligned} \tag{2.16}$$

dimana $E[v^T] = \bar{A}_x$ adalah APV dari asuransi jiwa seumur hidup yang diperoleh dari persamaan (2.15).

Nilai $\bar{a}_x$ juga dapat diperoleh dengan integral parsial dari fungsi kepadatan peluang T yaitu $f_T(t) = {}_tp_x \ \mu_x(t)$, dan anuitas jiwa sebesar 1 unit yang dibayarkan pada waktu t, dengan memisalkan

$$u = \frac{1 - v^t}{\delta} \ ; \ du = v^t \ dt \ ; \ w = -{}_tp_x \ ; \ dw = {}_tp_x \ \mu_x(t) \ dt$$

sehingga dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
\bar{a}_x &= E[Y] \\
&= \int_0^\infty \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_tp_x\ \mu_x(t)\ dt \\
&= \frac{1-v^t}{\delta}\ (-{}_tp_x)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty (-{}_tp_x)\ v^t\ dt \\
&= 0 - \left(-\int_0^\infty v^t\ {}_tp_x\ dt\right) \\
&= \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x\ dt.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

2.5 Premi (*Premium*)

Polis asuransi merupakan perjanjian finansial antara perusahaan asuransi dengan pemegang polis tersebut. Perusahaan asuransi akan membayar sejumlah manfaat jika terjadi kematian pada pemegang polis, dan pemegang polis akan membayar sejumlah premi kepada perusahaan asuransi untuk menjamin manfaat tersebut.

Aliran dana dari suatu kontrak asuransi jiwa terdiri dari pengeluaran manfaat (*future outgo*) dan pemasukan premi (*future income*), dimana keduanya bergantung pada waktu hidup akan datang T dari pemegang polis. Sehingga dapat dimodelkan suatu variabel acak yang merepresentasikan kerugian akan datang atau *future loss* bagi perusahaan asuransi (Dickson, 2009).

Definisi 2.5.1. *Misalkan L adalah kerugian yang dialami oleh perusahaan asuransi, didefinisikan sebagai pengurangan dari nilai sekarang pengeluaran manfaat (outgo) dan nilai sekarang pemasukan premi (income), yaitu*

$$L = \textit{Present value of benefit outgo} - \textit{Present value of premium income}.$$

Jika $\bar{P}$ dan Y yang masing-masing dinotasikan sebagai premi tahunan dan anuitas jiwa yang dibayarkan secara kontinu, Z sebagai manfaat yang didefinsikan pada persamaan (2.13). Maka secara umum variabel acak kerugian perusahaan di masa akan datang dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} L &= Z - \bar{P}\ Y \\ &= b_T\ v_T - \bar{P}\ Y. \end{aligned} \tag{2.18}$$

2.5.1 Premi *Netto* Untuk Asuransi Jiwa Seumur Hidup

Premi *netto* adalah premi yang dihitung tanpa melibatkan unsur biaya (*expenses*) yang dibebankan kepada perusahaan berkaitan dengan polis asuransi. Premi *netto* dapat diperoleh dengan menggunakan prinsip ekuivalen. Prinsip ekuivalen adalah suatu keadaan dimana nilai harapan dari kerugian akan datang yag dialami perusahaan sama dengan nol. Dengan kata lain perusahaan diharapkan tidak mengalami kerugian. Sehingga dapat diperoleh

$$E[L] = 0$$
$$E[Z - \bar{P}\ Y] = 0$$

atau

$$E[Z] \ = \ E[\bar{P}\ Y]. \tag{2.19}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.18), maka kerugian perusahaan di masa akan datang dalam asuransi jiwa seumur hidup untuk seorang individu dengan manfaat kematian sebesar 1 unit adalah

$$L = v^T - \bar{P}_x\ \bar{a}_{\overline{T|}}. \tag{2.20}$$

Premi *netto* tahunan untuk asuransi jiwa seumur hidup $\bar{P}_x$ dimana manfaatnya dibayarkan segera saat kematian (x) dapat ditentukan dengan menggunakan prinsip ekuivalen pada persamaan (2.19), yaitu

$$
\begin{aligned}
E[L] &= 0 \\
E[Z - \bar{P}\ Y] &= 0 \\
E[v^T - \bar{P}_x\ \bar{a}_{\overline{T|}} &= 0 \\
E[v^T] &= E[\bar{P}_x\ \bar{a}_{\overline{T|}}] \\
E[v^T] &= \bar{P}_x\ E[\bar{a}_{\overline{T|}}] \\
\bar{A}_x &= \bar{P}_x\ \bar{a}_x \\
\bar{P}_x &= \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \\
\bar{P}_x &= \frac{\displaystyle\int_0^\infty v^t\ {}_tp_x\ \mu_x(t)dt}{\displaystyle\int_0^\infty v^t\ {}_tp_x\ dt}.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

2.6 Tabungan (*Reserve*)

Tabungan (*reserve*) adalah besarnya kewajiban (*liability*) yang dibentuk oleh perusahaan asuransi untuk memenuhi kewajiban berupa pembayaran manfaat kepada pemegang polis di masa yang akan datang. Variabel acak yang digunakan dalam perhitungan tabungan adalah kerugian akan datang di sepanjang jangka waktu suatu polis asuransi. Tabungan yang dibentuk dengan menggunakan metode prospektif adalah tabungan yang dibentuk dari selisih antara nilai sekarang manfaat asuransi di masa akan datang dan nilai sekarang premi yang masih akan diterima.

Definisi 2.6.1. *Misalkan ada suatu polis asuransi masih berlaku t tahun setelah diterbitkan, Nilai sekarang dari kerugian akan datang yang dinotasikan dengan ${}_tL$ didefinisikan sebagai berikut*

$$ {}_tL = \textit{Present value of benefit at time } t - \textit{Present value of premium at time } t. $$

Misalkan suatu kontrak asuransi untuk seorang peserta (x) dimana manfaat b_t dibayarkan segera saat kematian pada waktu t, dan premi tahunan π_t dibayarkan secara kontinu. Kerugian prospektif untuk seorang (x) yang hidup pada waktu t adalah pengurangan dari nilai sekarang manfaat dengan nilai sekarang premi pada waktu t, yaitu

$$ {}_tL = b_{T(x)}\ v^{T(x)-t} - \int_t^{T(x)} \pi_u\ v^{u-t}\ du\ ;\ T(x) > t. \tag{2.22} $$

Tabungan untuk suatu asuransi jiwa yang berlaku bagi seorang peserta (x) setelah t tahun polis diterbitkan didefinisikan sebagai nilai harapan bersyarat dari kerugian akan datang ${}_tL$, dengan syarat (x) hidup hingga waktu t. Secara umum tabungan untuk suatu asuransi jiwa didefinisikan sebagai berikut

$$ \begin{aligned} {}_t\bar{V} &= E[{}_tL \mid T(x) > t] \\ &= E\left[b_{T(x)}\ v^{T(x)-t} - \int_t^{T(x)} \pi_u\ v^{u-t}\ du \mid T(x) > t\right] \\ &= E\left[b_{(T(x)-t)+t}\ v^{T(x)-t} - \int_0^{T(x)-t} \pi_{t+r}\ v^r\ dr \mid T(x) > t\right] \end{aligned} \tag{2.23} $$

asumsikan bahwa distribusi bersyarat dari $T(x)-t$ dengan $T(x) > t$, adalah sama dengan distribusi dari $T(x+t)$ sehingga persamaan (2.23) dapat dituliskan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V} &= E\left[b_{T(x+t)+t}\ v^{T(x+t)} - \int_0^{T(x+t)} \pi_{t+r}\ v^r\ dr\right] \\
&= \int_0^\infty \left(b_{t+u}\ v^u - \int_0^u \pi_{t+r}\ v^r\ dr\right) {}_u p_{x+t}\ \mu_x(t+u)\ du \\
&= \int_0^\infty b_{t+u}\ v^u\ {}_u p_{x+t}\ \mu_x(t+u)\ du - \int_0^\infty \left(\int_0^u \pi_{t+r}\ v^r\ dr\right) {}_u p_{x+t}\ \mu_x(t+u)\ du \\
&= \int_0^\infty b_{t+u}\ v^u\ {}_u p_{x+t}\ \mu_x(t+u)\ du - \ \left[\left(\int_0^u \pi_{t+r}\ v^r\ dr\right)(-{}_u p_{x+t})\Big|_0^\infty \right.\\
&\quad \left. - \int_0^\infty (-{}_u p_{x+t})(\pi_{t+u}\ v^u)\ du\right] \\
&= \int_0^\infty b_{t+u}\ v^u\ {}_u p_{x+t}\ \mu_x(t+u)\ du - \int_0^\infty \pi_{t+u}\ v^u\ {}_u p_{x+t}\ du. \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan persamaan (2.24) diatas, ${}_t\bar{V}$ dapat dituliskan sebagai selisih antara APV manfaat akan datang dan APV premi akan datang.

Dari persamaan (2.24) dapat ditentukan persamaan diferensial untuk suatu tabungan (*reserve*). Untuk menyederhanakan perhitungan derivatif ${}_t\bar{V}$ terhadap t, variabel integrasi akan diubah dengan mensubstitusikan $s = t + u$, kemudian ${}_t\bar{V}$ dikalikan dengan faktor $\dfrac{v^t\ {}_t p_x}{v^t\ {}_t p_x}$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V} &= \int_0^\infty \left[b_{t+u}\ \mu_x(t+u) - \pi_{t+u}\right] v^u\ {}_u p_{x+t}\ du \left(\frac{v^t\ {}_t p_x}{v^t\ {}_t p_x}\right) \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^\infty \left[b_{t+u}\ \mu_x(t+u) - \pi_{t+u}\right] v^u\ {}_u p_{x+t}\ (v^t\ {}_t p_x)\ du}{v^t\ {}_t p_x} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^\infty [b_{t+u}\mu_x(t+u) - \pi_{t+u}] v^{t+u}\ {}_{t+u} p_x\ du}{v^t\ {}_t p_x} \\
&= \frac{\displaystyle\int_t^\infty [b_s\mu_x(s) - \pi_s]\ v^s\ {}_s p_x\ ds}{v^t\ {}_t p_x}. \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

Turunan terhadap t dari persamaan (2.25) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\ {}_t\bar{V} &= \frac{-[b_t\ \mu_x(t)-\pi_t]\ (v^t\ {}_tp_x)^2 - \displaystyle\int_t^\infty [b_s\ \mu_x(s)-\pi_s]v^s\ {}_sp_x\ ds\ (v^t\ {}_tp_x)(-\mu_x(t)-\delta)}{(v^t\ {}_tp_x)^2} \\
&= -[b_t\ \mu_x(t)-\pi_t] + [\mu_x(t)+\delta].\ \frac{\displaystyle\int_t^\infty [b_s\ \mu_x(s)-\pi_s]v^s\ {}_sp_x\ ds}{v^t\ {}_tp_x} \\
&= \pi_t - b_t\ \mu_x(t) + [\delta+\mu_x(t)]\ {}_t\bar{V}. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Dalam hal ini, tingkat perubahan tabungan dibentuk dari tiga komponen, yaitu tingkat pemasukan premi, tingkat pengeluaran manfaat, dan peningkatan tabungan berdasarkan bunga dan ketahanan hidup.

2.6.1 Tabungan Untuk Asuransi Jiwa Seumur Hidup

Misalkan tabungan untuk asuransi jiwa seumur hidup dimana manfaat sebesar 1 unit dibayarkan segera saat kematian kepada seorang (x) dinotasikan dengan ${}_t\bar{V}_x$, tingkat premi tahunan dinotasikan $\bar{P}_x$. Untuk $T(x) > t$, nilai sekarang kerugian prospektif pada waktu t adalah

$$ {}_tL = v^{T(x)-t} - \bar{P}_x\ \bar{a}_{\overline{T(x)-t|}}. \qquad (2.27)$$

Tabungan merupakan nilai harapan bersyarat yang dihitung menggunakan distribusi bersyarat dari waktu hidup akan datang pada waktu t, dengan (x) hidup hingga waktu t. Premi yang digunakan dalam perhitungan adalah premi netto yang dihitung menggunakan prinsip ekuivalen dan tidak memasukkan unsur biaya. Tabungan untuk asuransi jiwa seumur hidup adalah sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
{}_t\bar{V}_x &= E[{}_tL \mid T(x) > t] \\
&= E[v^{T(x)-t} - \bar{P}_x \; \bar{a}_{\overline{T(x)-t|}} \mid T(x) > t] \\
&= E[v^{T(x)-t} \mid T(x) > t] - \bar{P}_x \; E[\bar{a}_{\overline{T(x)-t|}} \mid T(x) > t] \\
&= \bar{A}_{x+t} - \bar{P}_x \; \bar{a}_{x+t}. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Untuk kasus khusus dimana $t = 0$, maka akan diperoleh ${}_0\bar{V}_x = 0$. Ini sebagai akibat dari perhitungan premi yang dilakukan menggunakan prinsip ekuivalen pada saat kontrak dimulai.

2.7 Model *Multiple Decrement*

Dalam ilmu aktuaria, berakhirnya suatu status disebut *decrement*. Model matematika dari perhitungan asuransi jiwa yang dibentuk pada bagian-bagian sebelumnya merupakan model *single decrement* yaitu model yang menggunakan faktor *decrement* tunggal, yaitu kematian (*death*). Model *single decrement* dapat diperluas dengan menggunakan beberapa faktor *decrement* lain. Model matematika yang menganalisa suatu grup dengan menggunakan lebih dari satu faktor *decrement* disebut model *multiple decrement*.

Dalam asuransi jiwa berbasis model *single decrement* hanya dikenal satu variabel acak $T(x)$, yaitu waktu hingga kematian untuk orang berusia x. Dalam model *multiple decrement* ada dua variabel acak yaitu T sebagai waktu hingga berakhirnya suatu status (x) (*time-until-decrement*), dan J sebagai penyebab berakhirnya suatu status (x) (*cause-of-decrement*). Fungsi kepadatan peluang bersama dari T dan J dinotasikan dengan $f_{T,J}(t, j)$, fungsi kepadatan peluang marjinal T dinotasikan dengan $f_T(t)$, dan fungsi peluang marjinal J dinotasikan dengan $f_J(j)$.

2.7.1 Model *Double Decrement*

Asuransi jiwa berbasis model *double decrement* adalah model perhitungan asuransi yang menggunakan dua faktor *decrement.* Dalam kasus ini, faktor-faktor yang digunakan adalah kematian (*death*) dan pembatalan (*withdrawal*). Misalkan $j = 1$ merupakan faktor kematian, dan $j = 2$ merupakan faktor pembatalan, berlaku hubungan yang berkaitan dengan fungsi marjinal T dan J sebagai berikut

$$\int_0^\infty f_T(t)\ dt = 1$$

$$\sum_{j=1}^{2} f_J(j) = f_J(1) + f_J(2) = 1.$$

Fungsi kepadatan peluang bersama dari T dan J yaitu $f_{T,J}(t,j)$, dapat digunakan untuk menentukan peluang dari kejadian-kejadian yang didefinisikan oleh T dan J. Peluang *decrement* j atau peluang status (x) berakhir karena faktor j antara waktu t dan $t + dt$ adalah

$$f_{T,J}(t,j)dt = \mathbf{P}[(t < T \leq t + dt) \cap (J = j)] \tag{2.29}$$

peluang status (x) berakhir karena faktor j sebelum waktu t adalah

$$\int_0^t f_{T,J}(s,j)ds = \mathbf{P}[(0 < T \leq t) \cap (J = j)].$$

Persamaan di atas mempunyai simbol khusus dengan menggunakan superscript (j) yang menyatakan faktor *decrement* yang digunakan yaitu

$$\int_0^t f_{T,J}(s,j)ds = {}_t q_x^{(j)}\ ;\ \text{dimana } t \geq 0,\ j = 1,2 \tag{2.30}$$

dan peluang *decrement* total atau peluang status (x) berakhir karena seluruh faktor $j = 1, 2$ antara waktu a dan b adalah

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2} \int_a^b f_{T,J}(t,j)dt &= \int_a^b f_{T,J}(t,1)dt + \int_a^b f_{T,J}(t,2)dt \\ &= \mathbf{P}[a < T \leq b].\end{aligned}$$

Dengan definisi distribusi marjinal untuk J, peluang status (x) berakhir karena faktor j pada suatu waktu di masa akan datang adalah

$$f_J(j) = \int_0^\infty f_{T,J}(s,j)\ ds = \ {}_\infty q_x^{(j)}\ ;\ j = 1, 2$$

fungsi kepadatan marjinal $f_T(t)$ dan fungsi distribusi $F_T(t)$ dimana $t \geq 0$ adalah

$$\begin{aligned}f_T(t) &= \sum_{j=1}^{2} f_{T,J}(t,j) \\ &= f_{T,J}(t,1) + f_{T,J}(t,2)\end{aligned}$$

dan

$$F_T(t) = \int_0^t f_T(s)ds.$$

Notasi fungsi distribusi waktu hidup akan datang $T(x)$ yaitu, ${}_tq_x$, dapat diperluas menjadi variabel acak waktu hingga berakhirnya suatu status (*time-until-decrement*) dalam model *double decrement.* Dengan menggunakan superscript (τ) untuk menyatakan bahwa suatu fungsi melibatkan seluruh faktor *decrement.* Peluang *decrement* total atau peluang status (x) berakhir karena seluruh faktor (yaitu kematian dan pembatalan) sebelum waktu t adalah

$$\begin{aligned}
{}_tq_x^{(\tau)} &= \mathbf{P}[T \leq t] \\
&= F_T(t) \\
&= \int_0^t f_T(s)ds \\
&= \int_0^t \sum_{j=1}^{2} f_{T,J}(s,j)ds \\
&= \sum_{j=1}^{2} \int_0^t f_{T,J}(s,j)ds \\
&= \sum_{j=1}^{2} {}_tq_x^{(j)} = {}_tq_x^{(1)} + {}_tq_x^{(2)}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Peluang *survival* total atau peluang status (x) tetap bertahan dari seluruh faktor (tetap hidup dan melanjutkan kontrak) hingga usia $x+t$ adalah

$$\begin{aligned}
{}_tp_x^{(\tau)} &= \mathbf{P}[T > t] \\
&= 1 - F_T(t) \\
&= 1 - {}_tq_x^{(\tau)}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Laju *decrement* total adalah

$$\begin{aligned}
\mu_x^{(\tau)}(t) &= \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} \\
&= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt}\, {}_tq_x^{(\tau)} \\
&= -\frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt}\, {}_tp_x^{(\tau)} \\
&= -\frac{d}{dt} \ln\, {}_tp_x^{(\tau)}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

atau

$${}_tp_x^{(\tau)} = \exp\left[-\int_0^t \mu_x^{(\tau)}(s)ds \right]. \tag{2.34}$$

Secara matematis, fungsi-fungsi untuk variabel T pada model *double decrement* identik dengan fungsi-fungsi untuk $T(x)$ yang ada pada model *single decrement*. Perbedaannya terletak pada interpretasi masing-masing variabel dalam aplikasinya. Persamaan (2.29) dapat diuraikan dengan syarat seseorang harus tetap bertahan dalam statusnya hingga waktu t, sehingga diperoleh

$$f_{T,J}(t,j)dt = \mathbf{P}[T > t]\mathbf{P}[(t < T \leq t + dt) \cap (J = j)|T > t]. \tag{2.35}$$

Laju *decrement* j didefinisikan sebagai berikut

$$\mu_x^{(j)}(t) = \frac{f_{T,J}(t,j)}{1 - F_T(t)} = \frac{f_{T,J}(t,j)}{{}_tp_x^{(\tau)}} \tag{2.36}$$

laju *decrement* j pada usia $x + t$ memiliki interpretasi peluang bersyarat, yaitu nilai dari fungsi kepadatan peluang bersyarat bersama dari T dan J pada waktu $x + t$ dan disebabkan oleh faktor j, dengan syarat harus bertahan hingga waktu $x + t$. Sehingga persamaan (2.35) dapat dituliskan sebagai

$$f_{T,J}(t)dt \;=\; {}_tp_x^{(\tau)}\mu_x^{(j)}(t) \;\;;\;\; j = 1, 2.$$

Dari persamaan (2.30) dan (2.36), maka berlaku

$$\mu_x^{(j)}(t) = \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\,{}_tq_x^{(j)} \tag{2.37}$$

dengan menggunakan persamaan (2.31) dan (2.33), diperoleh laju *decrement* total adalah penjumlahan dari laju kematian ($j = 1$) dan laju pembatalan ($j = 2$)

$$\begin{aligned}
\mu_x^{(\tau)}(t) &= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\ {}_tq_x^{(\tau)} \\
&= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\left({}_tq_x^{(1)} + \ {}_tq_x^{(2)}\right) \\
&= \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\ {}_tq_x^{(1)} + \frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}\frac{d}{dt}\ {}_tq_x^{(2)} \\
&= \mu_x^{(1)}(t) + \mu_x^{(2)}(t). \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

Fungsi peluang bersyarat J, dengan syarat status seseorang berakhir pada waktu t yaitu

$$\begin{aligned}
f_{J|T}(j|t) &= \frac{f_{T,J}(t,j)}{f_T(t)} \\
&= \frac{{}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_x^{(j)}(t)}{{}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_x^{(\tau)}(t)} \\
&= \frac{\mu_x^{(j)}(t)}{\mu_x^{(\tau)}(t)}
\end{aligned}$$

sehingga peluang *decrement* ${}_tq_x^{(j)}$ dapat ditulis sebagai

$${}_tq_x^{(j)} = \int_0^t\ {}_sp_x^{(\tau)}\ \mu_x^{(j)}(s)\ ds. \qquad (2.39)$$

2.8 Manfaat Pembatalan (*Withdrawal Benefit*)

Dalam masa pertanggungan, ada kemungkinan bahwa pemegang polis akan membatalkan kontrak asuransi. Misalnya karena mengalami kesulitan dalam membayar premi, atau karena sudah tidak memerlukan asuransi lagi. Selama dalam masa pertanggungan pemegang polis boleh mengajukan pembatalan kontrak asuransi, dan berhak menerima sejumlah manfaat karena tejadinya pembatalan tersebut. Sejumlah manfaat yang dikembalikan itu disebut *cash value* atau *nonforfeiture benefit* atau bisa disebut sebagai manfaat pembatalan (*withdrawal* *benefit*). Karena sudah tertulis dalam kontrak asuransi, maka walaupun nilai tunainya sebesar 0 harus tetap dikembalikan kepada pemegang polis. Tetapi polis asuransi yang demikian dalam satu sisi menguntungkan pihak peserta atau pemegang polis dan merugikan pihak perusahaan asuransi. Untuk itu diperlukan perhitungan nilai manfaat yang lebih adil dan dapat saling menguntungkan kedua belah pihak.

Pada dasarnya tidak ada cara untuk mencegah terhentinya pembayaran premi yang dilakukan oleh pemegang polis sebelum terjadinya kematian atau hingga akhir periode premi. Sebelum premi dan tabungan dapat ditentukan, ada prinsip yang harus diperhatikan yaitu peserta yang membatalkan kontrak akan menerima sejumlah nilai dimana struktur perhitungan manfaat, premi, dan tabungan yang dibentuk menggunakan model *single decrement* disesuaikan dalam konteks *multiple decrement*.

Contohnya di Amerika, jumlah minimal manfaat pembatalan diatur oleh undang-undang asuransi. Hal ini merupakan cara pengurangan jumlah tertentu dari minimal tabungan premi yang resmi. Di Jepang petunjuk tentang jumlah minimal manfaat pembatalan dilakukan oleh pejabat yang berkompeten. Perusahaan asuransi membuat rumus perhitungan nilai manfaat berdasarkan petunjuk pejabat tersebut untuk mendapatkan persetujuan dari pihak yang berwenang. Cara ini juga merupakan pengurangan tabungan premi. Sehingga tidak merugikan kedua belah pihak.

Dalam perhitungannya, tabungan yang ada dikurangi dengan jumlah tertentu yang disebut biaya pembatalan, alasan pengurangan ini adalah untuk penundaan biaya penutupan polis baru. Biaya penutupan polis baru sebenarnya sebenarnya lebih besar daripada pemasukan premi. Sehingga perusahaan asuransi pada awal tahun polis akan mengalami kerugian. Kekurangan biaya penutupan polis baru ini akan tertutup secara bertahap dari sisa yang terkumpul sampai berakhirnya masa pembayaran premi. Maka jika pemegang polis melakukan pembatalan kontrak, dari tabungannya akan dipotong sejumlah waktu untuk menutup biaya penutupan pola baru yang dibebankan kepada pemegang polis.

Misalkan *cash value* dari manfaat pembatalan dinotasikan dengan ${}_kCV$, ${}_kV$ adalah tabungan, dan ${}_kSC$ adalah *surrender charge*, dimana k adalah waktu setelah polis diterbitkan, definisikan

$$ {}_kCV = {}_kV - {}_kSC \ ; \ k = 1, 2, \ldots . \tag{2.40} $$

Secara umum, *cash value* untuk manfaat asuransi sebesar 1 unit didefinisikan sebagai berikut

$$ \begin{aligned} {}_kCV &= A(k) - P^a \ a(k) \\ &= ({}_kV + P \ a(k)) - P^a \ a(k) \\ &= {}_kV - (P^a - P) \ a(k) \ ; \ k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.41} $$

dimana $A(k)$ dan $a(k)$ merupakan simbol dari APV asuransi jiwa dan anuitas pada waktu k. P^a disebut sebagai premi disesuaikan (*adjusted premium*).

Pada dasarnya *cash value* yang didefinisikan pada persamaan (2.40) merupakan nilai manfaat pembatalan yang melibatkan unsur biaya (*gross*). Untuk memperoleh nilai manfaat pembatalan yang tidak melibatkan unsur biaya (*netto*), maka *surrender charge* diasumsikan menjadi 0, yaitu ${}_kSC = 0$. Sehingga dapat diperoleh

$$ {}_kCV = {}_kV \ ; \ k = 1, 2, \ldots . \tag{2.42} $$

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Peluang *Decrement* Absolut

Untuk setiap faktor yang ada dalam model *multiple decrement*, sangat memungkinkan untuk mendefinisikan suatu model *single decrement* yang bergantung pada salah satu faktor tertentu.

Definisi 3.1.1. *Fungsi untuk suatu model single decrement yang terkait didefinisikan sebagai*

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x^{'(j)} &= \exp\left[-\int_0^t \mu_x^{(j)}(s)\ ds\right] \\
{}_tq_x^{'(j)} &= 1 - {}_tp_x^{'(j)}.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Notasi ${}_tq_x^{'(j)}$ dinyatakan sebagai peluang *decrement netto*. Namun dapat juga disebut sebagai tingkat *decrement* independen atau peluang *decrement* absolut. Dalam penentuan nilai ${}_tq_x^{'(j)}$, faktor j tidak dipengaruhi oleh faktor-faktor lainnya. Perlu diketahui bahwa ${}_tq_x^{(j)}$ dan ${}_tq_x^{'(j)}$ adalah dua hal yang berbeda. Karena ${}_tq_x^{(j)}$ merupakan peluang suatu status seorang (x) berakhir oleh faktor j sebelum waktu t, sedangkan ${}_tq_x^{'(j)}$ merupakan peluang absolut suatu status berakhir oleh faktor j tertentu dan tidak dipengaruhi oleh faktor lainnya. Berdasarkan persamaan (2.34) untuk suatu model *multiple decrement* yang menggunakan m faktor, peluang *survival* total adalah

$$\begin{aligned}
{}_tp_x^{(\tau)} &= \exp\left[-\int_o^t [\mu_x^{(1)}(s) + \mu_x^{(2)}(s) + \ldots + \mu_x^{(m)}(s)]\ ds\right] \\
&= e^{-\int_o^t \mu_x^{(1)}(s)ds}\ .\ e^{-\int_o^t \mu_x^{(2)}(s)ds}\ \ldots\ e^{-\int_o^t \mu_x^{(m)}(s)ds} \\
&= {}_tp_x^{'(1)}\ .\ {}_tp_x^{'(2)}\ \ldots\ {}_tp_x^{'(m)} \\
&= \prod_{j=1}^{m} {}_tp_x^{'(j)}. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Perbedaan antara peluang absolut dan peluang *decrement* dapat terlihat berdasarkan persamaan (3.2) di atas, yaitu

$$\begin{aligned}
{}_tp_x^{'(j)} &\geq {}_tp_x^{(\tau)} \\
{}_tp_x^{'(j)}\ \mu_x^{(j)}(t) &\geq {}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_x^{(j)}(t).
\end{aligned}$$

Jika fungsi di atas diintegralkan terhadap t pada interval $(0, 1)$ dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^1 {}_tp_x^{'(j)}\ \mu_x^{(j)}(t)\ dt &\geq \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_x^{(j)}(t)\ dt \\
q_x^{'(j)} &\geq q_x^{(j)}. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

3.1.1 Asumsi Distribusi Seragam

Berikut ini akan dijelaskan asumsi yang digunakan dalam model *double decrement* untuk menentukan nilai $q_x^{(j)}$ atau peluang berakhirnya status (x) oleh faktor j. Peluang *decrement* j dan peluang *decrement* total, diasumsikan berdistribusi seragam pada interval $(x, x + 1)$ jika memenuhi persamaan berikut ini

$$\begin{aligned}
{}_tq_x^{(j)} &= t.\ q_x^{(j)} \\
&\text{dan} \\
{}_tq_x^{(\tau)} &= t.\ q_x^{(\tau)}. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Dengan asumsi di atas, dari persamaan (2.37) dapat diperoleh

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_x^{(j)}(t) &= \frac{d}{dt}\ {}_tq_x^{(j)} \\ &= \frac{d}{dt}\ t.\ q_x^{(j)} \\ &= q_x^{(j)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dari persamaan di atas juga dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \mu_x^{(j)}(t) &= \frac{q_x^{(j)}}{{}_tp_x^{(\tau)}} \\ &= \frac{q_x^{(j)}}{1 - {}_tq_x^{(\tau)}} \\ &= \frac{q_x^{(j)}}{1 - t.\ q_x^{(\tau)}} \end{aligned}$$

sehingga berdasarkan persamaan (3.1) diperoleh

$$\begin{aligned} {}_sp_x^{'(j)} &= \exp\left[-\int_0^s \mu_x^{(j)}(t)\ dt\right] \\ &= \exp\left[-\int_0^s \frac{q_x^{(j)}}{1 - t.\ q_x^{(\tau)}}\ dt\right] \\ &= \exp\left[\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}\int_0^s \frac{1}{1 - t.\ q_x^{(\tau)}}\ d(1 - t.\ q_x^{(\tau)})\right] \\ &= \exp\left[\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}\ \ln(1 - s.\ q_x^{(\tau)})\right] \\ &= ({}_sp_x^{(\tau)})^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Pada dasarnya dalam membentuk suatu model *double decrement*, peluang *decrement* $q_x^{(j)}$ dapat ditentukan berdasarkan nilai peluang absolut $q_x^{'(j)}$ untuk $j = 1, 2$, jika nilainya diketahui. Adapun hubungan antara peluang *decrement* absolut dan peluang *survival* absolut berdasarkan persamaan (3.1) dan (3.4) adalah

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{'(j)} &= 1 - {}_tq_x^{'(j)} \\ &= 1 - t.\ q_x^{'(j)} \end{aligned} \tag{3.7}$$

sehingga dari persamaan (3.7) di atas dapat diperoleh

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{'(j)}\ \mu_x^{(j)} &= \frac{d}{dt}(-{}_tp_x^{'(j)}) \\ &= \frac{d}{dt}(t.\ q_x^{'(j)} - 1) \\ &= q_x^{'(j)}\ \frac{d}{dt}(t) \\ &= q_x^{'(j)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Berdasarkan persamaan (3.7), (3.8), dan ruas kanan persamaan (3.3), dapat ditentukan nilai $q_x^{(1)}$ atau peluang status seorang (x) berakhir disebabkan oleh kematian, yaitu

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_x^{(1)}(t)\ dt \\ &= \int_0^1 {}_tp_x^{'(1)}\ {}_tp_x^{'(2)}\ \mu_x^{(1)}(t)\ dt \\ &= \int_0^1 ({}_tp_x^{'(1)}\ \mu_x^{(1)}(t))(1 - t.\ q_x^{'(2)})\ dt \\ &= q_x^{'(1)} \int_0^1 1 - t.\ q_x^{'(2)}\ dt \\ &= q_x^{'(1)} \left[t - \frac{t^2}{2} q_x^{'(2)} \right]_0^1 \\ &= q_x^{'(1)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{'(2)} \right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Kemudian dengan cara yang sama seperti di atas, maka nilai $q_x^{(2)}$ atau peluang status seorang (x) berakhir disebabkan oleh pembatalan adalah

$$\begin{aligned}
q_x^{(2)} &= \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_x^{(2)}(t)\ dt \\
&= \int_0^1 {}_tp_x^{'(1)}\ {}_tp_x^{'(2)}\ \mu_x^{(2)}(t)\ dt \\
&= \int_0^1 ({}_tp_x^{'(2)}\ \mu_x^{(2)}(t))(1 - t.\ q_x^{'(1)})\ dt \\
&= q_x^{'(2)} \int_0^1 1 - t.\ q_x^{'(1)}\ dt \\
&= q_x^{'(2)} \left[t - \frac{t^2}{2} q_x^{'(1)} \right]_0^1 \\
&= q_x^{'(2)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{'(1)} \right).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

3.2 Penentuan *Withdrawal Benefit*

Jika pemegang polis membatalkan suatu kontrak asuransi, maka dia berhak untuk memperoleh sejumlah manfaat yang disebut *withdrawal benefit*. Untuk itu dibutuhkan suatu model perhitungan asuransi yang didalamnya memasukkan unsur pembatalan kontrak sebagai resiko yang harus ditanggung oleh perusahaan.

Aplikasi dari model *double decrement* muncul ketika jumlah pembayaran manfaat bergantung pada faktor *decrement* yang menyebabkan seseorang keluar dari suatu kelompok. Misalkan jumlah manfaat yang dibayarkan pada waktu t karena disebabkan oleh faktor j dinotasikan dengan $b_t^{(j)}$, untuk $j = 1, 2$. Maka $b_t^{(1)}$ adalah manfaat kematian dan $b_t^{(2)}$ adalah manfaat pembatalan. Secara umum *actuarial present value* total dari asuransi jiwa seumur hidup dinotasikan dengan $\bar{A}_x^{(\tau)}$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\bar{A}_x^{(\tau)} &= \sum_{j=1}^{2} \int_0^\infty b_t^{(j)}\ v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_x^{(j)}(t)\ dt \\ &= \int_0^\infty b_t^{(1)}\ v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_x^{(1)}(t)\ dt + \int_0^\infty b_t^{(2)}\ v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_x^{(2)}(t)\ dt \\ &= \bar{A}_x^{(1)} + \bar{A}_x^{(2)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Jumlah manfaat pembatalan $b_t^{(2)}$ yang dihitung dalam model *double decrement* akan diasumsikan menjadi sama dengan *cash value* berdasarkan persamaan (2.42) yang ditentukan sebagai berikut

$$b_t^{(2)} = {}_t\bar{V} \tag{3.12}$$

dimana ${}_t\bar{V}$ merupakan tabungan untuk suatu polis asuransi jiwa yang diperoleh dari persamaan (2.25). Sehingga persamaan (3.11) dapat dituliskan kembali secara khusus untuk asuransi jiwa seumur hidup dengan manfaat kematian sebesar 1 unit, yaitu $b_t^{(1)} = 1$, sebagai berikut

$$\begin{aligned}\bar{A}_x^{(\tau)} &= \bar{A}_x^{(1)} + \bar{A}_x^{(2)} \\ &= \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_x^{(1)}(t)\ dt + \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_x^{(2)}(t).\ {}_t\bar{V}_x\ dt. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Selanjutnya apabila perhitungan anuitas jiwa dilakukan dengan menggunakan model *double decrement*, maka dari persamaan (2.17) peluang hidup ${}_tp_x$ diubah menjadi ${}_tp_x^{(\tau)}$ untuk memperoleh APV dari total anuitas jiwa seumur hidup yang dinotasikan dengan $\bar{a}_x^{(\tau)}$, yaitu

$$\bar{a}_x^{(\tau)} = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ dt. \tag{3.14}$$

Premi *netto* tahunan yang dihitung menggunakan model *double decrement* disebut sebagai premi total, dan dinotasikan dengan $\bar{P}_x^{(\tau)}$. Dari persamaan (3.13) dan (3.14), tingkat premi total didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \bar{P}_x^{(\tau)} &= \frac{\bar{A}_x^{(\tau)}}{\bar{a}_x^{(\tau)}} \\ &= \frac{\displaystyle\int_0^\infty v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \ \mu_x^{(1)}(t) \ dt + \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \ \mu_x^{(2)}(t). \ {}_t\bar{V}_x \ dt}{\displaystyle\int_0^\infty v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \ dt}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Secara umum, jumlah premi total yang dibayarkan setiap tahun oleh seorang (x) dinotasikan dengan $\pi_t^{(\tau)}$. Jika b_t adalah sejumlah manfaat, maka berlaku

$$\pi_t^{(\tau)} = b_t \ \bar{P}_x^{(\tau)}. \tag{3.16}$$

3.3 Premi Dan Tabungan Dalam Model *Double Decrement*

Dalam bagian ini akan dijelaskan tentang struktur premi dan tabungan dalam asuransi jiwa yang perhitungannya berbasis pada model *double decrement*. Premi dan tabungan yang dibentuk menggunakan model *double decrement* tersebut akan dibandingkan dengan premi dan tabungan yang dihasilkan dari model *single decrement*, agar dapat diketahui tingat perubahannya.

Formulasi tabungan yang dibentuk dalam persamaan (2.25) akan mengalami sedikit perubahan yaitu dengan adanya penambahan superscript (1) pada notasi manfaat kematian b_s dan laju kematian $\mu_x(s)$. Ini untuk menunjukkan bahwa tabungan tersebut dibentuk dengan menggunakan model *single decrement*, sehingga diperoleh

$$ {}_t\bar{V} = \frac{\displaystyle\int_t^\infty [b_s^{(1)} \mu_x^{(1)}(s) - \pi_s] \ v^s \ {}_sp_x^{'(1)} \ ds}{v^t \ {}_tp_x^{'(1)}}. \tag{3.17} $$

Pembentukan model awal dilakukan dengan menggunakan turunan dari tabungan dalam asuransi jiwa seumur hidup pada persamaan (3.17) di atas. Model awal yang dibentuk ini merupakan model *single decrement* yang menggunakan satu faktor, yaitu kematian. Misalkan π_t dinotasikan sebagai premi tahunan, $b_t^{(1)}$ sebagai manfaat kematian, dan ${}_t\bar{V}$ sebagai tabungan pada waktu t, maka diperoleh

$$ \frac{d}{dt} \ {}_t\bar{V} = \pi_t - b_t^{(1)} \ \mu_x^{(1)}(t) + [\delta + \mu_x^{(1)}(t)] \ {}_t\bar{V}. \tag{3.18} $$

Dalam model *double decrement* laju kematian dinotasikan dengan $\mu_x^{(1)}(t)$, laju pembatalan dinotasikan dengan $\mu_x^{(2)}(t)$, dan laju *decrement* total adalah $\mu_x^{(\tau)}(t) = \mu_x^{(1)}(t) + \mu_x^{(2)}(t)$. Sifat-sifat berikut ini berlaku secara umum, antara lain

$$ \int_0^\infty \mu_x^{(\tau)}(t) \ dt = \infty $$

sehingga

$$ \lim_{t \to \infty} \ {}_tp_x^{(\tau)} = 0 $$

namun sifat di atas belum tentu berlaku untuk laju *decrement* $\mu_x^{(2)}(t)$ dan peluang *survival* absolut ${}_tp_x^{'(2)}$. Kemudian turunan dari peluang *survival* total $tp_x^{(\tau)}$ adalah

$$ \frac{d}{dt} \ {}_tp_x^{(\tau)} \ = \ -{}_tp_x^{(\tau)} \ \mu_x^{(\tau)}(t) \ = \ -{}_tp_x^{(\tau)}[\mu_x^{(1)}(t) + \mu_x^{(2)}(t)] $$

dan turunan dari $v^t \; {}_tp_x^{(\tau)}$ adalah

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,(v^t \; {}_tp_x^{(\tau)}) &= (-\delta \; v^t).\; {}_tp_x^{(\tau)} + v^t.\;(-{}_tp_x^{(\tau)} \; \mu_x^{(\tau)}(t)) \\ &= -v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \; [\mu_x^{(\tau)}(t) + \delta] \\ &= -v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \; [\mu_x^{(1)}(t) + \mu_x^{(2)}(t) + \delta]. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Asumsikan bahwa penambahan faktor pembatalan ke dalam model perhitungan pada persamaan (3.18) tidak mempengaruhi laju kematian $\mu_x^{(1)}(t)$ dalam model *double decrement*, dimana manfaat pembatalan dinotasikan dengan $b_t^{(2)}$. Dengan kata lain, waktu-hingga-kematian dan waktu-hingga-pembatalan diasumsikan saling bebas. Namun asumsi ini mungkin tidak relevan dalam prakteknya.

Selanjutnya tambahkan faktor *decrement* pembatalan ke dalam model tersebut, dimana notasi laju pembatalan adalah $\mu_x^{(2)}(t)$ dan manfaat pembatalan adalah $b_t^{(2)}$. Kemudian notasi premi π_t dan tabungan ${}_t\bar{V}$ akan diubah dengan menambahkan superscript (τ), sehingga $\pi_t^{(\tau)}$ dinotasikan sebagai premi total dan ${}_t\bar{V}^{(\tau)}$ sebagai tabungan total. Hal ini untuk menunjukkan bahwa premi total dan tabungan total dihitung berdasarkan model *double decrement*. Sehingga dapat diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,{}_t\bar{V}^{(\tau)} &= \pi_t^{(\tau)} - b_t^{(\tau)} \; \mu_x^{(\tau)}(t) + [\mu_x^{(\tau)}(t) + \delta] \; {}_t\bar{V}^{(\tau)} \qquad (3.20) \\ &= \pi_t^{(\tau)} - [b_t^{(1)} \; \mu_x^{(1)}(t) + b_t^{(2)} \; \mu_x^{(2)}(t)] + [\mu_x^{(1)}(t) + \mu_x^{(2)}(t) + \delta] \; {}_t\bar{V}^{(\tau)}. \end{aligned}$$

Kemudian apabila kedua ruas dalam persamaan (3.20) diintegralkan, maka akan diperoleh formulasi tabungan total untuk suatu asuransi jiwa yang bentuknya hampir sama dengan tabungan pada persamaan (3.17), yaitu

$$ {}_t\bar{V}^{(\tau)} = \frac{\displaystyle\int_t^{\infty} [b_s^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)}(s) - \pi_s^{(\tau)}] \; v^s \; {}_s p_x^{(\tau)} \; ds}{v^t \; {}_t p_x^{(\tau)}}. $$

Untuk membandingkan tabungan total dengan tabungan yang dibentuk menggunakan model *single decrement*, hal yang pertama harus dilakukan adalah menghitung turunan terhadap t dari perkalian antara faktor $v^t \; {}_t p_x^{(\tau)}$ dan tabungan total ${}_t\bar{V}^{(\tau)}$ sebagai berikut

$$ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(v^t \; {}_t p_x^{(\tau)} . \; {}_t\bar{V}^{(\tau)}\right) &= -v^t \; {}_t p_x^{(\tau)} \; (\mu_x^{(\tau)}(t) + \delta). \; {}_t\bar{V}^{(\tau)} + v^t \; {}_t p_x(\tau). \; \frac{d}{dt} \; {}_t\bar{V}^{(\tau)} \\ &= -v^t \; {}_t p_x^{(\tau)} \; (\mu_x^{(\tau)}(t) + \delta). \; {}_t\bar{V}^{(\tau)} + v^t \; {}_t p_x(\tau). \Big[\pi_t^{(\tau)} - b_t^{(\tau)} \; \mu_x^{(\tau)}(t) \\ &\quad + (\mu_x^{(\tau)}(t) + \delta) \; {}_t\bar{V}^{(\tau)}\Big] \\ &= v^t \; {}_t p_x^{(\tau)} \Big[- (\mu_x^{(\tau)}(t) + \delta) {}_t\bar{V}^{(\tau)} + (\mu_x^{(\tau)}(t) + \delta) {}_t\bar{V}^{(\tau)} + \pi_t^{(\tau)} \\ &\quad - b_t^{(\tau)} \; \mu_x^{(\tau)}(t)\Big] \\ &= v^t \; {}_t p_x^{(\tau)} \left[\pi_t^{(\tau)} - b_t^{(\tau)} \; \mu_x^{(\tau)}(t)\right] \\ &= v^t \; {}_t p_x^{(\tau)} \left[\pi_t^{(\tau)} - b_t^{(1)} \; \mu_x^{1)}(t) - b_t^{(2)} \; \mu_x^{(2)}(t)\right]. \end{aligned} \tag{3.21} $$

Selanjutnya dengan cara yang sama seperti di atas, turunan dari perkalian antara faktor $v^t \; {}_t p_x^{(\tau)}$ dengan tabungan ${}_t\bar{V}$ yang dibentuk dalam persamaan (3.17), sehingga diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\ (v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}.\ {}_t\bar{V}) &= -v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ (\mu_x^{(\tau)}(t)+\delta).\ {}_t\bar{V} + v^t\ {}_tp_x(\tau).\ \frac{d}{dt}\ {}_t\bar{V}\\
&= -v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ (\mu_x^{(\tau)}(t)+\delta).\ {}_t\bar{V} + v^t\ {}_tp_x(\tau).\Big[\pi_t - b_t^{(1)}\ \mu_x^{(1)}(t)\\
&\quad + (\mu_x^{(1)}(t)+\delta)\ {}_t\bar{V}\Big]\\
&= v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ \Big[-(\mu_x^{(\tau)}(t)+\delta)_t\bar{V} + (\mu_x^{(1)}(t)+\delta)_t\bar{V} + \pi_t - b_t^{(1)}\ \mu_x^{(1)}(t)\Big]\\
&= v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\Big[\pi_t - b_t^{(1)}\ \mu_x^{1)}(t) - (\mu_x^{(1)}(t)+\mu_x^{(2)}(t)+\delta)_t\bar{V}\\
&\quad + (\mu_x^{(1)}(t)+\delta)_t\bar{V}\Big]\\
&= v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\Big[\pi_t - b_t^{(1)}\ \mu_x^{1)}(t) - \mu_x^{(2)}(t)\ {}_t\bar{V} - (\mu_x^{(1)}(t)+\delta)_t\bar{V}\\
&\quad + (\mu_x^{(1)}(t)+\delta)_t\bar{V}\Big]\\
&= v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ \Big[\pi_t - b_t^{(1)}\ \mu_x^{1)}(t) - \mu_x^{(2)}(t)\ {}_t\bar{V}\Big]. \qquad (3.22)\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.12), maka akan diasumsikan bahwa nilai manfaat pembatalan adalah sama dengan tabungan yaitu, $b_t^{(2)} = {}_t\bar{V}$. Sehingga persamaan (3.21) dapat dapat dituliskan kembali menjadi

$$\frac{d}{dt}\ (v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}.\ {}_t\bar{V}^{(\tau)}) = v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ \Big[\pi_t^{(\tau)} - b_t^{(1)}\ \mu_x^{1)}(t) - {}_t\bar{V}\ \mu_x^{(2)}(t)\Big] \qquad (3.23)$$

kemudian persamaan (3.23) dikurangi dengan persamaan (3.22) sehingga hasil yang diperoleh adalah

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\ (v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}.\ {}_t\bar{V}^{(\tau)}) - \frac{d}{dt}\ (v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}.\ {}_t\bar{V}) &= v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ \pi_t^{(\tau)} - v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ \pi_t\\
\frac{d}{dt}\Big[v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}({}_t\bar{V}^{(\tau)} - {}_t\bar{V})\Big] &= v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\Big[\pi_t^{(\tau)} - \pi_t\Big]. \qquad (3.24)\end{aligned}$$

Selanjutnya kedua ruas dalam persamaan (3.24) di atas diintegralkan dari $t = 0$ hingga $t = \infty$, yaitu

$$\int_0^\infty d\Big[v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}({}_t\bar{V}^{(\tau)} - {}_t\bar{V})\Big] = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\Big[\pi_t^{(\tau)} - \pi_t\Big]dt$$
$$v^t\ {}_tp_x\ ({}_t\bar{V}^{(\tau)} - {}_t\bar{V})\Big|_0^\infty = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\Big[\pi_t^{(\tau)} - \pi_t\Big]dt$$

diketahui untuk $t = 0$ berlaku ${}_0\bar{V} = 0$ dan ${}_0\bar{V}^{(\tau)} = 0$, maka diperoleh

$$0 = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\Big[\pi_t^{(\tau)} - \pi_t\Big]dt$$
$$\int_0^\infty v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ \pi_t^{(\tau)}\ dt = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ \pi_t\ dt$$
$$\pi_t^{(\tau)}\ \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ dt = \pi_t\ \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ dt$$
$$\pi_t^{(\tau)} = \pi_t. \tag{3.25}$$

Jika hasil yang diperoleh pada persamaan (3.25) di atas disubstitusikan kembali ke dalam persamaan (3.24), maka akan diperoleh

$$\frac{d}{dt}\left[v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}({}_t\bar{V}^{(\tau)} - {}_t\bar{V})\right] = v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ (0)$$
$$\frac{d}{dt}\left[v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}({}_t\bar{V}^{(\tau)} - {}_t\bar{V})\right] = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left[v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}.\ {}_t\bar{V}^{(\tau)}\right] = \frac{d}{dt}\left[v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}.\ {}_t\bar{V}\right]$$
$$\int_0^\infty d\left[v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}.\ {}_t\bar{V}^{(\tau)}\right] = \int_0^\infty d\left[v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}.\ {}_t\bar{V}\right]$$
$${}_t\bar{V}^{(\tau)}\Big|_0^\infty = {}_t\bar{V}\Big|_0^\infty$$

dengan kondisi awal $t = 0$ dimana ${}_0\bar{V}^{(\tau)} = 0$ dan ${}_0\bar{V} = 0$, maka diperoleh

$${}_0\bar{V}^{(\tau)} = {}_0\bar{V}$$

sehingga akan berlaku persamaan sebagai berikut

$${}_t\bar{V}^{(\tau)} = {}_t\bar{V}\ \ ;\ \text{untuk } t \geq 0. \tag{3.26}$$

Dengan demikian dapat dikatakan bahwa struktur fungsi premi total $\pi_t^{(\tau)}$ dan tabungan total ${}_t\bar{V}^{(\tau)}$ yang dibentuk menggunakan model *double decrement* sama dengan fungsi premi π_t dan tabungan ${}_t\bar{V}$ yang dibentuk menggunakan model *single decrement*. Hasil tersebut dapat diperoleh dengan asumsi-asumsi tertentu yang digunakan. Pembuktian yang tertulis di atas juga sesuai dengan yang pernah dibuktikan oleh Schuettte dan Nesbitt (1988).

3.4 Perhitungan Asuransi Jiwa Berbasis Model *Double Decrement*

Misalkan usia maksimum seseorang dalam perhitungan asuransi jiwa seumur hidup adalah $\omega = 70$ tahun. Nilai laju kematian $\mu_x^{(1)}$ dapat diperoleh dengan mendefinisikan hukum kematian Gompertz sebagai berikut

$$\mu_x^{(1)} = B\ c^x\ ;\ 0 \leq x \leq 100$$

dimana $B = 0,0001$ dan $c = 1,087$ (Dickson, 2009). Sehingga dapat ditentukan peluang absolut (x) akan hidup hingga usia $x + t$ yaitu

$$\begin{aligned}
{}_tp_x^{\prime(1)} &= \exp\left[-\int_x^{x+t} \mu_y^{(1)}\ dy\right] \\
&= \exp\left[-\int_x^{x+t} Bc^y\ dy\right] \\
&= \exp\left[-\left(\frac{B}{\ln c}\ e^{y\ln c}\Big|_x^{x+t}\right)\right] \\
&= \exp\left[-\left(\frac{B}{\ln c}\ c^{x+t} - \frac{B}{\ln c}\ c^x\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{B}{\ln c}(c^x - c^{x+t})\right] \\
&= \exp\left[\frac{B}{\ln c}\ c^x(1 - c^t)\right].
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Nilai laju pembatalan $\mu_x^{(2)}$ dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut

$$\mu_x^{(2)} = \frac{1}{(100-t)^2} \; ; \; t \geq 0$$

dimana laju pembatalan di atas berlaku untuk semua usia x. Sehingga dapat ditentukan peluang absolut (x) akan tetap melanjutkan kontrak hingga usia $x+t$ yaitu

$$\begin{aligned}
{}_tp_x^{\prime(2)} &= \exp\left[-\int_x^{x+t} \mu_y^{(2)} \; dy\right] \\
&= \exp\left[-\int_x^{x+t} \frac{1}{(100-y)^2} \; dy\right] \\
&= \exp\left[-\left(\frac{1}{100-y}\Big|_x^{x+t}\right)\right] \\
&= \exp\left[-\left(\frac{1}{100-(x+t)} - \frac{1}{100-x}\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{1}{100-x} - \frac{1}{100-x-t}\right] \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.27) dan (3.28) dapat ditentukan peluang *survival* total ${}_tp_x^{(\tau)}$, yaitu sebagai berikut

$$\begin{aligned}
{}_tp_x^{(\tau)} &= {}_tp_x^{\prime(1)} . \; {}_tp_x^{\prime(2)} \\
&= \exp\left[\frac{B}{\ln c} \; c^x(1-c^t)\right] . \exp\left[\frac{1}{100-x} - \frac{1}{100-x-t}\right]. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Kemudian dapat ditentukan juga laju *decrement* total $\mu_x^{(\tau)}(t)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mu_x^{(\tau)}(t) &= \mu_x^{(1)}(t) + \mu_x^{(2)}(t) \\
&= Bc^{(x+t)} + \frac{1}{(100-t)^2}. \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

3.4.1 Contoh Kasus

Berikut ini akan ditunjukkan bagaimana cara menghitung premi total tahunan menggunakan model *double decrement* dengan mengasumsikan nilai manfaat pembatalan adalah sama dengan nilai tabungan. Kemudian premi total tersebut akan dibandingkan premi tahunan yang dihitung menggunakan model *single decrement*, sehingga dapat diketahui tingkat perubahan yang terjadi.

Soal:

Suatu polis asuransi jiwa seumur hidup diterbitkan untuk seseorang berusia 40 tahun dengan manfaat kematian sebesar \$100.000. Perhitungan asuransi dilakukan dengan menggunakan model *double decrement* dimana *decrement* (1) adalah kematian, dan *decrement* (2) adalah pembatalan. Jika diketahui tingkat suku bunga per tahun adalah 6%, maka hitunglah:

1. Premi tahunan yang harus dibayarkan?
2. Tabungan yang terbentuk?

Catatan:

Gunakan asumsi-asumsi yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya. Jika suku bunga $i = 0,06$ maka laju pembungaan $\delta = \ln 1,06 = 0,058$. Usia orang tersebut pada saat ini adalah 40 tahun, maka perhitungan dilakukan dengan menggunakan jangka waktu 30 tahun. Lakukan perhitungan dengan menggunakan bantuan program *Maple* agar prosesnya lebih mudah dan hasinya lebih akurat.

Solusi:

Model *Single Decrement* - Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menghitung *Actuarial present value* dari asuransi jiwa, premi, dan tabungan dengan menggunakan basis model *single decrement*. Faktor *decrement* yang digunakan hanyalah kematian (1).

Actuarial present value dari asuransi jiwa seumur hidup adalah

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \int_0^\omega v^t \ {}_tp_x^{\prime(1)} \ \mu_x^{(1)}(t) \ dt \\
\bar{A}_{40} &= \int_0^{30} e^{-\delta t}. \ e^{\frac{B}{\ln c}. \ c^{40}(1-c^t)}. \ Bc^{(40+t)} \ dt \\
&= \int_0^{30} \exp\left[-\delta t + \frac{B}{\ln c}. \ c^{40}(1-c^t)\right]. \ Bc^{(40+t)} \ dt \\
&\approx 0,1107218235.
\end{aligned}$$

Premi tunggal *netto* adalah $\$100.000 \times 0,1107218235 = \$11.072,18$.

Actuarial present value dari anuitas jiwa adalah

$$\begin{aligned}
\bar{a}_x &= \int_0^\omega v^t \ {}_tp_x^{\prime(1)} \ dt \\
\bar{a}_{40} &= \int_0^{30} e^{-\delta t}. \ e^{\frac{B}{\ln c} \ c^{40}(1-c^t)} \ dt \\
&= \int_0^{30} \exp\left[-\delta t + \frac{B}{\ln c} \ c^{40}(1-c^t)\right] \ dt \\
&\approx 13,25909461.
\end{aligned}$$

Tingkat premi tahunan untuk asuransi jiwa adalah

$$
\begin{aligned}
\bar{P}_x &= \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \\
\bar{P}_{40} &= \frac{\bar{A}_{40}}{\bar{a}_{40}} \\
&= \frac{0,1107218235}{13,25909461} \\
&\approx 0,008350632283.
\end{aligned}
$$

Premi yang harus dibayarkan per tahun adalah

$$
\begin{aligned}
\pi_t &= \$100.000 \times \bar{P}_{40} \\
&= \$100.000 \times 0,008350632283 \\
&= \$835,06.
\end{aligned}
$$

Tabungan yang dibentuk selama jangka waktu 30 tahun yang dinotasikan dengan ${}_t\bar{V}_x$ dapat diperoleh menggunakan persamaan ${}_t\bar{V}_x = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}_x.\ \bar{a}_{x+t}$, dengan mensubstitusikan $t = 0$ hingga $t = 30$. Hasil yang akan diperoleh adalah sebagai berikut

Tabel Perhitungan Tabungan *(Reserves)*

Year	Reserves	
t	tVx	\$100000 . tVx
1	0,00558672090	558,67
2	0,01126359800	1126,36
3	0,01701674030	1701,67
4	0,02282988350	2282,99
5	0,02868410750	2868,41
6	0,03455751775	3455,75
7	0,04042488780	4042,49
8	0,04625725287	4625,73
9	0,05202144957	5202,14
10	0,05767959145	5767,96
11	0,06318846731	6318,85
12	0,06849885163	6849,89
13	0,07355470561	7355,47
14	0,07829225236	7829,23
15	0,08263889740	8263,89
16	0,08651196452	8651,20
17	0,08981720678	8981,72
18	0,09244704487	9244,70
19	0,09427847114	9427,85
20	0,09517054410	9517,05
21	0,09496137678	9496,14
22	0,09346449813	9346,45
23	0,09046443501	9046,44
24	0,08571131635	8571,13
25	0,07891425044	7891,43
26	0,06973314966	6973,31
27	0,05776858383	5776,86
28	0,04254911209	4254,91
29	0,02351537569	2351,54
30	0	0

Model *Double Decrement* - Langkah selanjutnya adalah menghitung seluruh *Actuarial present value* total dari asuransi jiwa seumur hidup, dan premi total dengan menggunakan basis model *double decrement*. Faktor *decrement* yang digunakan adalah kematian (1) dan pembatalan (2). Tingkat manfaat pembatalan yang digunakan setiap tahun adalah sama dengan tingkat tabungan yang terdapat pada tabel di atas.

Actuarial present value total dari asuransi jiwa seumur hidup adalah

$$\bar{A}_x^{(\tau)} = \bar{A}_x^{(1)} + \bar{A}_x^{(2)}$$

dimana

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x^{(1)} &= \int_0^{\omega} v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \ \mu_x^{(1)}(t) \ dt \\
\bar{A}_{40}^{(1)} &= \int_0^{30} e^{-\delta t}. \ e^{\frac{B}{\ln c} \ c^{40}(1-c^t)+\frac{1}{100-40}-\frac{1}{100-40-t}}. \ Bc^{40+t}t \ dt \\
&= \int_0^{30} \exp\left[-\delta t + \frac{B}{\ln c} \ c^{40}(1-c^t) + \frac{1}{60} - \frac{1}{60-t}\right]. \ Bc^{40+t} \ dt \\
&\approx 0,1099555639.
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x^{(2)} &= \int_0^{\omega} v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \ \mu_x^{(2)}(t) \ {}_t\bar{V}_x \ dt \\
\bar{A}_{40}^{(2)} &= \int_0^{30} e^{-\delta t}. \ e^{\frac{B}{\ln c} \ c^{40}(1-c^t)+\frac{1}{100-40}-\frac{1}{100-40-t}}. \ \frac{1}{(100-t)^2}. \ {}_t\bar{V}_x \ dt \\
&= \int_0^{30} \exp\left[-\delta t + \frac{B}{\ln c} \ c^{40}(1-c^t) + \frac{1}{60} - \frac{1}{60-t}\right]. \ \frac{1}{(100-t)^2}. \ {}_t\bar{V}_x \ dt \\
&\approx 0,002098012786926.
\end{aligned}$$

sehingga

$$A_{40}^{(\tau)} = 0,1099555639 + 0,002098012786926 \approx 0,1120535767.$$

Premi tunggal *netto* adalah $\$100.000 \times 0,1120535767 = \$11.205,36$.

Actuarial present value total dari anuitas jiwa adalah

$$\begin{aligned}
\bar{a}_x^{(\tau)} &= \int_0^{\omega} v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \ dt \\
\bar{a}_{40}^{(\tau)} &= \int_0^{30} e^{-\delta t}. \ e^{\frac{B}{\ln c} \ c^{40}(1-c^t)+\frac{1}{100-40}-\frac{1}{100-40-t}} \ dt \\
&= \int_0^{30} \exp\left[-\delta t + \frac{B}{\ln c} \ c^{40}(1-c^t) + \frac{1}{60} - \frac{1}{60-t}\right] \ dt \\
&\approx 13,20609494.
\end{aligned}$$

Tingkat premi tahunan total untuk asuransi jiwa adalah

$$\begin{aligned}
\bar{P}_x^{(\tau)} &= \frac{\bar{A}_x^{(\tau)}}{\bar{a}_x^{(\tau)}} \\
\bar{P}_{40}^{(\tau)} &= \frac{\bar{A}_{40}^{(\tau)}}{\bar{a}_{40}^{(\tau)}} \\
&= \frac{0,1120535767}{13,20609494} \\
&\approx 0,008484989485.
\end{aligned}$$

Premi total yang harus dibayarkan per tahun adalah

$$\begin{aligned}\pi_t^{(\tau)} &= \$100.000 \times \bar{P}_{40}^{(\tau)} \\ &= \$100.000 \times 0,008484989485 \\ &= \$848,85.\end{aligned}$$

Setelah dibandingkan ternyata premi $\pi_t = \$835,06$ lebih kecil daripada premi total $\pi_t^{(\tau)} = \$848,85$. Bowers (1997) telah menerangkan bahwa $\pi_t^{(\tau)} = \pi_t$ memang hanya berlaku dalam kajian teoritis dan hampir tidak ada dalam aplikasi nyata. Namun berdasarkan hasil yang diperoleh, setidaknya dapat dikatakan bahwa adanya penambahan manfaat pembatalan dalam perhitungan premi berbasis model *double decrement* tidak memberikan dampak yang signifikan terhadap perhitungan premi menggunakan basis model *single decrement*.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Peluang *survival* total atau peluang status seorang (x) akan bertahan hingga t tahun dapat diperoleh dari perkalian antara peluang absolut (x) bertahan hidup dan peluang absolut (x) tetap melanjutkan kontrak hingga t tahun yaitu

   $$ {}_tp_x^{(\tau)} = {}_tp_x^{\prime(1)} \cdot {}_tp_x^{\prime(2)}. $$

   Hubungan antara peluang *survival* total dengan laju *decrement* adalah

   $$ {}_tp_x^{(\tau)} = \exp\left[-\int_0^t \mu_x^{(1)}(s) + \mu_x^{(2)}(s)ds \right] $$

2. Peluang *decrement* total atau peluang status seorang (x) akan berakhir sebelum mencapai t tahun adalah

   $$ {}_tq_x^{(\tau)} = 1 - {}_tp_x^{(\tau)} $$

3. *Actuarial present value* dari asuransi jiwa seumur hidup berbasis model *double decrement* adalah sebagai berikut

   $$ \bar{A}_x^{(\tau)} = \int_0^\infty b_t^{(1)}\ v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_x^{(1)}(t)\ dt + \int_0^\infty b_t^{(2)}\ v^t\ {}_tp_x^{(\tau)}\ \mu_x^{(2)}(t)\ dt. $$

4. Manfaat pembatalan dalam model *double decrement* diasumsikan menjadi sama dengan tabungan yang dibentuk menggunakan model *single decrement*, yaitu $b_t^{(2)} = {}_t\bar{V}_x$ sehingga *Actuarial present value* dari asuransi jiwa seumur hidup dengan manfaat kematian $b_t^{(1)} = 1$ adalah

$$\bar{A}_x^{(\tau)} = \int_0^\infty v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \; \mu_x^{(1)}(t) \; dt + \int_0^\infty v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \; \mu_x^{(2)}(t). \; {}_t\bar{V}_x \; dt.$$

5. Adanya manfaat pembatalan dalam perhitungan premi berbasis model *double decrement* tidak memberikan dampak yang signifikan terhadap perhitungan premi berbasis model *single decrement*.

6. Tingkat premi tahunan untuk asuransi jiwa seumur hidup berbasis model *double decrement* adalah

$$\bar{P}_x^{(\tau)} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \; \mu_x^{(1)}(t) \; dt + \int_0^\infty v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \; \mu_x^{(2)}(t). \; {}_t\bar{V}_x \; dt}{\displaystyle\int_0^\infty v^t \; {}_tp_x^{(\tau)} \; dt}.$$

4.2 Saran

Adapun saran yang ditujukan kepada penulis-penulis berikutnya yang tertarik untuk membahas lebih dalam tentang model *multiple decrement* antara lain:

1. Untuk pembahasan selanjutnya dapat dibahas tentang *withdrawal benefit* dalam asuransi jiwa dimana pembayaran manfaatnya dilakukan pada akhir tahun setelah terjadi kematian, yang disebut sebagai kasus diskrit.

2. Untuk pembahasan berikutnya dapat dibahas tentang asuransi dana pensiun yang menggunakan empat faktor *decrement* yaitu kematian, cacat, pensiun, dan pembatalan.

DAFTAR PUSTAKA

Arjun K. Gupta dan Tamas Varga. 2002. *An Introduction To Actuarial mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

David C. M. Dickson, dkk. 2009. *Actuarial Mathematics For Life Contingent Risks*. Cambridge University Press.

Donald R. Schuette dan Cecil J. Nesbitt. 1988. *Withdrawal Benefit Equal To Reserve: Non-Neutrality In The Discrete Case*. Actuarial Research Clearing House, Vol. 2, Hlm. 179-190.

Edwin J. Purcell, dkk. 2004. *Kalkulus, Jilid I dan II (Terjemahan)*, Edisi ke-8. Penerbit Erlangga, Jakarta.

Jacques F. Carriere. 1998. *Withdrawal Benefit Under a Dependent Double Decrement Model*. ASTIN Bulletin, Vol. 28, Hlm. 49-57.

Newton L. Bowers, Jr., dkk. 1997. *Actuarial Mathematics*, 2nd Edition. The Society of Actuaries.

S. David Promislow. 1991. *Select And Ultimate Models In Multiple Decrement Theory*. Transcations Of Society Of Actuaries, Vol. 43, Hlm. 281-302.

Takashi Futami. 1993. *Matematika Asuransi Jiwa, Bagian I dan II (Terjemahan)*. The Research Institute Of Life Insurance Welfare, Japan.

William S. Bicknell dan Cecil J. Nesbitt. 1956. *Premiums And Reserves In Multiple Decrement Theory*. Transcations Of Society Of Actuaries, Vol. 8, Hlm. 344-377.

LAMPIRAN

Dalam melakukan perhitungan dengan menggunakan program *Maple*, definisikan terlebih dahulu fungsi-fungsi yang akan digunakan dengan memasukkan input di bawah ini

```
delta:=0.058;
B:=0.0001;
c:=1.087;
v:=t->exp(-delta*t);
p1:=t->exp((B/ln(c))*(c^ 40)*(1-c^ t));
m1:=t->B*c^ (40+t);
p2:=t->exp(1/(100-40)-1/(100-40-t));
m2:=t->1/(100-t)^ 2;
pt:=t->exp((B*c^ 40/ln(c))*c^ (1-c^ 40)+(1/(100-40))-(1/(100-40-t)));
```

Untuk menghitung APV asuransi jiwa seumur hidup berbasis model *single decrement*, masukkan input berikut ini

```
Int(v(t)*p1(t)*m1(t),t=0..30)=evalf(int(v(t)*p1(t)*m1(t),t=0..30));
```

Output yang dihasilkan adalah

$$\int_0^{30} 0.0001\, e^{(-0.058\ t)}\, e^{(0.03372121436-0.03372121436\ 1.087^t)}\, 1.087^{(40+t)}\, dt = 0.1107218235$$

Untuk menghitung anuitas jiwa dari asuransi di atas masukkan input berikut ini

```
evalf(int(v(t)*p1(t),t=0..30));
```

Output yang dihasilkan adalah

$$13.25909461$$

Untuk mengitung tingkat premi tahunan masukkan input berikut ini

```
evalf( int( v(t)* p1(t)* m1(t), t=0..30)) / evalf( int( v(t)* p1(t),
t=0..30));
```

Output yang dihasilkan adalah

$$0.008350632283$$

Untuk menghitung tabungan dari asuransi jiwa seumur hidup, misalnya tabungan pada tahun pertama yaitu ${}_1\bar{V}_x$, harus dihitung terlebih dahulu nilai $\bar{A}_{x+1}$ dan $\bar{a}_{x+1}$.

Input untuk memperoleh nilai $\bar{A}_{x+1}$ adalah

```
Int( (exp( -delta*t ))* (exp( ( B/ ln(c))* (c^ 41)* ( 1 - c^ t) ) )*
(B * c^ (41+t)), t=0..29 ) = evalf( int( (exp( -delta*t ) )* (exp( (B/
ln(c) )* (c^ 41)* (1 - c^ t)))* (B* c^ (41+t)), t=0..29) );
```

Input untuk memperoleh $\bar{a}_{x+1}$ adalah

```
evalf( int( (exp( -delta*t ) )* (exp ( (B/ ln(c) )* (c^ 41 )* ( 1 - c
^ t))), t=0..29) );
```

Sehingga nilai ${}_1\bar{V}_x$ dapat diperoleh dengan memasukkan input berikut ini

```
(evalf ( int( (exp( -delta*t ) )* ( exp( ( B/ ln(c) )* ( c^ 41 )* (1
- c ^ t)))* ( B*c^ (41+t) ), t=0..29))) - (0.008350632283* ( evalf (
int ( ( exp ( -delta*t ) )* (exp( ( B/ ln(c) )* (c^ 41 )* (1 - c^ t))
), t = 0 ..  29 ) ) ) );
```

Output yang dihasilkan adalah

$$0.0055867209$$

Untuk menghitung APV dari asuransi jiwa seumur hidup berbasis model *double decrement* $\bar{A}_x^{(\tau)} = \bar{A}_x^{(1)} + \bar{A}_x^{(2)}$, harus dihitung terlebih dahulu masing-masing nilai $\bar{A}_x^{(1)}$ dan $\bar{A}_x^{(2)}$. Untuk menghitung $\bar{A}_x^{(1)}$ masukkan input berikut ini

```
Int(v(t)*pt(t)*m1(t),t=0..30)=evalf(int(v(t)*pt(t)*m1(t),t=0..30));
```

Output yang dihasilkan adalah

$$\int_0^{30} 0.0001\ e^{(-0.058\ t)}\ e^{\left(0.05038788103 - \frac{1}{60-t} - 0.03372121436\ 1.087^t\right)}\ 1.087^{(40+t)}\ dt$$
$$= 0.1099555639$$

Untuk menghitung $\bar{A}_x^{(2)}$, dalam hal ini perhitungan dilakukan secara berulang sesuai dengan tingkat tabungan yang terkait. Sebagai contoh untuk tahun pertama masukkan input berikut ini

```
Int(v(t)*pt(t)*m2(t),t=0..1)=evalf(int(v(t)*pt(t)*m2(t),t=0..1));
```

Output yang dihasilkan adalah

$$\int_0^{30} \frac{e^{(-0.058\ t)}\ e^{\left(0.05038788103 - \frac{1}{60-t} - 0.03372121436\ 1.087^t\right)}}{(100-t)^2}\ dt = 0.00009797253555.$$

Kemudian hasil tersebut dikalikan dengan tabungan tahun pertama yaitu

```
0.00009797253555* 0.0055867209;
```

sehingga output yang diperoleh adalah

$$0.000009324099515.$$

Cara di atas diulangi kembali dengan mengubah $t = 0..1$ hingga $t = 0..30$, dan hasilnya dikalikan satu per satu sesuai dengan tabungan pada tahun yang terkait. Kemudian semuanya dijumlahkan sehingga diperoleh $\bar{A}_x^{(2)} = 0.002098012786926$. Akhirnya didapat nilai $\bar{A}_x^{(\tau)}$ yaitu

```
0.1099555639 + 0.002098012786926;
```

$$0.1120535767$$

Untuk menghitung total anuitas jiwa masukkan input berikut ini

```
evalf(int(v(t)*pt(t),t=0..30));
```

Output yang dihasilkan adalah

$$13.20609494.$$

Untuk menghitung tingkat premi tahunan total masukkan input berikut ini

```
0.1120535767 / evalf( int( v(t)* pt(t), t = 0..30 ) );
```

Output yang dihasilkan adalah

$$0.008484989485.$$

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama	:	Saeful Azhar
No. Registrasi	:	3125061698
Jurusan	:	Matematika
Program Studi	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi yang saya buat ini dengan judul "Penentuan *Withdrawal Benefit* Dalam Asuransi Jiwa Berbasis Model *Double Decrement*" adalah:

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi atau karya tulis yang pernah dibuat oleh orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya, dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, Agustus 2011

Saeful Azhar

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Saeful Azhar. Dilahirkan di Jakarta pada tanggal 24 September 1988. Anak ketiga dari empat bersaudara, dari pasangan Bapak Drs. H. Achmad Harun, M.Si. dan Ibu Hj. Rohilah.

Riwayat Pendidikan. Pendidikan formal pertama yang ditempuh oleh penulis adalah bersekolah di SDN Pejuang 7 Bekasi, lulus tahun 2000. Setelah itu penulis masuk ke SMPN 19 Bekasi, lulus tahun 2003. Kemudian melanjutkan sekolahnya ke MAN 8 Cakung Jakarta Timur, dan lulus tahun 2006. Pada tahun yang sama penulis memulai masa perkuliahannya di Universitas Negeri Jakarta, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Matematika. Akhirnya penulis berhasil menyelesaikan studi dan dinyatakan lulus pada tahun 2011, kemudian memperoleh gelar Sarjana Sains.

Riwayat Pekejaan. Sejak masih duduk di bangku kuliah, penulis aktif bekerja dalam bidang pendidikan dengan menjadi pengajar matematika di lembaga-lembaga bimbingan belajar di kawasan DKI Jakarta sejak tahun 2010.

Bagi para pembaca yang ingin berkomunikasi dengan penulis, dapat menghubungi melalui email di `sayfool.math@gmail.com`.