KETAKSAMAAN SEGITIGA DI RUANG BANACH STRICTLY CEMBUNG (*STRICTLY CONVEX*)

Skripsi

Disusun untuk Melengkapi Syarat-syarat

Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains

SARKUMANTO MOHAMAD PRIAGUS

3125041586

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA

2011

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

KETAKSAMAAN SEGITIGA DI RUANG BANACH STRICTLY CEMBUNG

Nama : Sarkumanto Mohamad Priagus

No. Registrasi : 3125041586

		Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab				
Dekan	:	Dra. Marheni, M.Sc		
		NIP. 19500606 197412 2 001	....	....
Wakil Penanggung Jawab				
Pembantu Dekan I	:	Dr. rer. nat. Apriliana Laily Fitri, MS, M.Ed		
		NIP. 19600408 199003 2 002	....	....
Ketua	:	Drs. Mulyono, M.Kom		
		NIP. 19660517 199403 1 003	....	....
Sekretaris	:	Dra. Widyanti Rahayu, M.Si		
		NIP. 19661103 200112 2 001	....	....
Penguji	:	Prof. Dr. Suyono, M.Si		
		NIP. 19671218 199303 1 005	....	....
Pembimbing I	:	Drs. Makmuri, M.Si		
		NIP. 19640715 198903 1 006	....	....
Pembimbing II	:	Yudi Mahatma, M.Si		
		NIP. 19761020 200812 1 001	....	....

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal: 29 Juli 2011

PERSEMBAHANKU

Belajar adalah perjuangan, sekolah adalah perjuangan, kuliah adalah perjuangan, menyelesaikan skripsi adalah perjuangan. Semua itu adalah perjuangan menuntut ilmu. Karena menuntut ilmu adalah perjuangan. Menuntut ilmu adalah kewajiban untuk tiap-tiap muslimin dan muslimah.

يَرْفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ مِنكُمْ وَٱلَّذِينَ أُوتُوا۟ ٱلْعِلْمَ دَرَجَٰتٍ

"*...Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat.* "
(QS. Al Mujaadilah: 11)

Skripsi ini kupersembahkan untuk kedua orang tuaku tercinta:
Bapak Soetanto (Alm) dan Ibu Tarmini
beserta adikku tercinta: Anindra Aji Jatmiko "nda"

ABSTRACT

Sarkumanto Mohamad Priagus, 3125041586. Triangle Inequality in Strictly Convex Banach Space. Thesis. Faculty of Mathematics and Natural Science, State University of Jakarta. 2011.

There a discussion about mulberry. There two kinds mulberry, that is mulberry scalar and mulberry vector. Mulberry scalar is mulberry has value or big, for example long, wide, volume, time, and pressure, while mulberry vector is mulberry has value and also direction, for example energy, speed, and impulse. According to geometric, vector describable by line with direction, where is long of line show long (value) vector and the arrow direction shows vector direction. vector has long that symbolized with $||.||$. Vector can form vector space, normed space, and Banach space. In Banach space, there are triangle inequality. In triangle inequality got similarity in strictly convex Banach space. In this thesis be discussed triangle inequality in strictly convex Banach space.

Keywords : Banach Space, Normed Space, Vektor Space, Metric Space, Strictly Convex.

ABSTRAK

Sarkumanto Mohamad Priagus, 3125041586. Ketaksamaan Segitiga di Ruang Banach Strictly Cembung. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. 2011.

Ada suatu pembahasan tentang besaran. Ada dua macam besaran, yaitu besaran skalar dan besaran vektor. Besaran skalar adalah besaran yang memiliki nilai atau besar saja, misalnya panjang, luas, volum, waktu, dan tekanan, sedangkan besaran vektor adalah besaran yang memiliki nilai dan juga arah, misalnya gaya, kecepatan, dan impuls. Secara geometrik, vektor dapat dilukiskan dengan ruas garis berarah, dimana panjang ruas garis itu menunjukkan besar (nilai) vektor dan arah panahnya menunjukkan arah vektor. Vektor mempunyai panjang yang dilambangkan dengan $||.||$. Vektor dapat membentuk ruang vektor, ruang norma, dan ruang Banach. Di dalam ruang Banach ada ketaksamaan segitiga. Di dalam ketaksamaan segitiga tersebut didapat persamaan dalam ruang Banach strictly cembung (*strictly convex*). Pada skripsi ini akan dibahas ketaksamaan segitiga di ruang Banach strictly cembung (*strictly convex*).

Kata kunci : Ruang Banach, Ruang Norma, Ruang Vektor, Ruang Metrik, *Strictly Convex*.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, Tuhan yang Maha Menguasai Ilmu manusia, karena dengan ijin, rahmat, dan hidayah-Nya skripsi yang berjudul "Ketaksamaan Segitiga di Ruang Banach Strictly Cembung (*Strictly Convex*)" ini dapat penulis selesaikan dengan baik. Sholawat serta salam penulis sampaikan kepada manusia pilihan Allah yang teramat cerdas dan sempurna budi pekertinya, Nabi Muhammad SAW, beserta keluarga, sahabat, dan umatnya.

Terselesaikannya skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak yang telah banyak memberikan arahan, bantuan pemikiran, doa, semangat dan lain sebagainya. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan banyak terima kasih kepada :

1. Bapak Drs. Makmuri, M.Si sebagai Dosen Pembimbing I, yang telah memberikan pengarahan, bimbingan, serta saran-saran dan dukungannya hingga terselesaikannya skripsi ini.

2. Bapak Yudi Mahatma, M.Si sebagai Dosen Pembimbing II, yang telah memberikan pengarahan, bimbingan, serta saran-saran dan dukungannya hingga terselesaikannya skripsi ini.

3. Ibu Dra. Ellis Salsabila, M.Si, sebagai Dosen Pembimbing Akademis.

4. Ibu Dra. Pinta Deniyanti Sampoerno, M.Si, sebagai Ketua Jurusan Matematika.

5. Ibu Ir. Fariani Hermin, M.T, sebagai Ketua Program Studi Matematika.

6. Ibu Ratna Widyati, S.Si, M.Kom, sebagai Sekretaris Jurusan Matematika.

7. Seluruh Bapak/Ibu dosen jurusan Matematika yang telah memberikan informasi yang penulis butuhkan dalam menyelesaikan skripsi.

8. Kedua orang tuaku tercinta: Bapak Drs. Soetanto (Alm) dan Ibu Ir. Tarmini, Adikku tercinta Anindra Aji Jatmiko "nda" serta semua keluarga tercinta yang selalu memberikan doa, dorongan semangat, motivasi, kesabaran, nasehat, serta bantuan secara moril maupun materil.

9. Temanku di Math'02, yaitu: kak Dewi Asri yang telah memberikan ide "Ruang Banach". Teman-temanku di Math'03, yaitu: Arif, Heris. Teman-temanku di Math'04, yaitu: Ade, Dedi, Idos, Agus, Dina, Andreas, Dzaky, Benyuha, Eka, Lingga, Jamallullail, Martina, Iin, Adi, Tedy, Christian, Rahmat, Akbar. Teman-temanku di Math'05, yaitu: Purwono, Budi, Mahendra, Nurman, Sjamsul, Valdano, Dwinita, Titin, Santi, Eliza, Christina. Teman-temanku di Math'06, yaitu: Munir, Reza, Fahriyah, Nur Fadilah, Apri, Hendra, serta teman-teman math 2002, 2003, 2004, 2005, 2006 lainnya. Semoga persahabatan kita selalu terjalin selamanya.

10. Semua pihak yang tidak bisa penulis tulis satu persatu. Terima kasih atas dukungan dan motivasinya.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan karena sesungguhnya kesempurnaan hanya milik Allah SWT. Oleh karena itu, kritik serta saran yang membangun sangat penulis harapkan untuk kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat, terutama bagi penulis sendiri serta bagi yang membacanya.

Jakarta, Juli 2011

Sarkumanto Mohamad Priagus

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Di dalam bidang fisika ada pembahasan tentang besaran. Dikenal dua macam besaran, yaitu besaran skalar dan besaran vektor. Besaran skalar adalah besaran yang memiliki nilai atau besar saja, misalnya panjang, luas, volum, waktu, dan tekanan, sedangkan besaran vektor adalah besaran yang memiliki nilai dan juga arah, misalnya gaya, kecepatan, dan impuls. Secara geometrik, vektor dapat dilukiskan dengan ruas garis berarah, dimana panjang ruas garis itu menunjukkan besar (nilai) vektor dan arah panahnya menunjukkan arah vektor.

Vektor sering dilambangkan dengan huruf tebal, misalnya $\mathbf{x}$ atau bisa juga dilambangkan dengan memberikan tanda panah di atas sebuah huruf misalnya $\vec{x}$. Untuk menyatakan panjang atau norma suatu vektor, digunakan notasi $|\mathbf{x}|$, $|\vec{x}|$, atau $||\mathbf{x}||$. Vektor-vektor di dalam $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ dapat diperkenalkan secara geometris sebagai segmen-segmen garis terarah atau panah-panah di dalam $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$. Vektor di $\mathbb{R}^2$ dilambangkan dengan pasangan bilangan, misal vektor $\mathbf{a}$ di $\mathbb{R}^2$ maka $\mathbf{a}=(a_1, a_2)$, sedangkan untuk vektor $\mathbf{a}$ di $\mathbb{R}^3$ dilambangkan dengan tripel bilangan maka $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$.

Pemikiran menggunakan pasangan bilangan untuk meletakkan titik-titik di dalam bidang dan tripel bilangan untuk meletakkan titik-titik di dalam ruang mula-mula diungkapkan secara jelas pada pertengahan abad ke-17. Pada akhir abad ke-19 para ahli matematika dan para ahli fisika mulai menyadari bahwa tidak perlu berhenti dengan tripel. Setelah terbentuk vektor di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$, para ahli mulai bereksperimen di $\mathbb{R}^4$ yang dikenal dengan kuadrupel bilangan (a_1, a_2, a_3, a_4) dan juga vektor di $\mathbb{R}^5$ yang dikenal dengan nama kuintupel bilangan $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Walaupun dalam gambaran geometrik tidak melebihi $\mathbb{R}^3$, tetapi dengan bekerja dari sifat analitik atau sifat numerik dari titik dan vektor, dan bukan bekerja dari sifat geometris, vektor dapat melebihi $\mathbb{R}^3$. Pembahasan yang melebihi $\mathbb{R}^3$ dikenal dengan ruang Euclidis. Di dalam ruang Euclidis ruang-ruang yang ada dapat berdimensi sampai dengan n atau $\mathbb{R}^n$.

Suatu vektor dengan norma vektor tersebut membentuk suatu ruang yang dikenal dengan nama ruang norma (Normed Space). Salah satu pembahasan yang menarik mengenai vektor, norma, dan ruang Euclidis adalah ruang Banach. Ruang Banach didefinisikan sebagai ruang linier terukur. Ruang Banach disebut juga sebagai norma ruang vektor lengkap. Suatu vektor di $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, sampai di $\mathbb{R}^n$ juga merupakan ruang Banach. Pembahasan mengenai ruang Banach telah dikembangkan oleh beberapa peneliti, misalnya ketaksamaan segitiga dalam ruang Banach yang telah dikembangkan oleh Mitani dan Saito dalam jurnalnya yang berjudul On Sharp Triangle Inequality in Banach Spaces II pada tahun 2010. Dalam skripsi ini akan dibahas kembali ketaksamaan segitiga dalam ruang Banach *strictly convex*.

1.2 Perumusan Masalah

Dalam skripsi ini perumusan masalah yang akan dibahas adalah bagaimana bentuk ketaksamaan segitiga di ruang Banach *strictly convex*?

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam skripsi ini masalah dibatasi:

1. Ruang Banach dalam ketaksamaan segitiga di ruang Banach *strictly convex* adalah ruang Banach di $\mathbb{R}^n$.
2. Ruang Banach yang dibahas adalah ruang Banach riil.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Mengetahui ketaksamaan segitiga di ruang Banach.
2. Mendapatkan persamaan dari ketaksamaan segitiga di ruang Banach *strictly convex*.

1.5 Manfaat Penulisan

Untuk memberikan pengetahuan mengenai vektor, norma, ilmu hitung vektor, ruang Banach, sifat metrik, sifat-sifat *strictly convex*, dan mengetahui beberapa ketaksamaan yang ada dalam ruang Banach.

1.6 Metode Penelitian

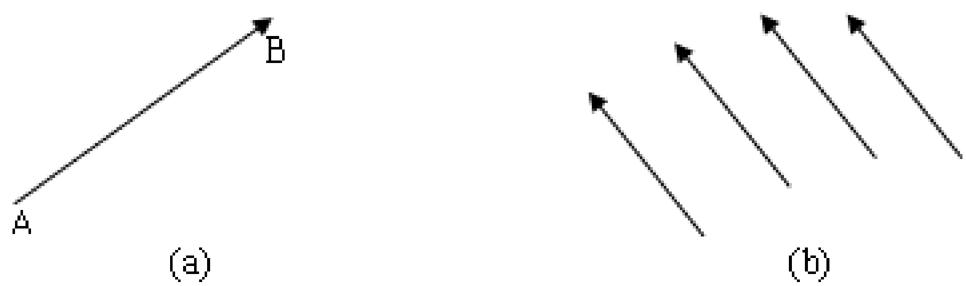
Metode penelitian pada skripsi ini adalah kajian teoritis dalam bidang aljabar linear, analisis riil, topologi, dan analisis fungsional dengan menggunakan pemikiran logis yang didasarkan pada buku-buku mengenai vektor, norma, ruang Euclidis, dan ruang Banach, juga didasarkan pada jurnal-jurnal mengenai ketaksamaan segitiga dalam ruang Banach.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Vektor

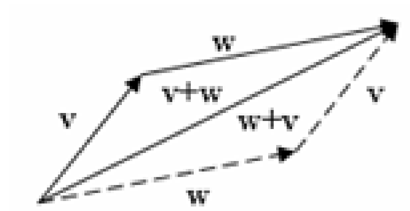
Vektor merupakan sebuah ruas garis berarah yang mempunyai nilai atau besar. Vektor dinyatakan dengan huruf tebal, misalnya **u,v,w**, dan sebagainya. Panjang atau besar vektor biasa disebut dengan norma. Norma dinotasikan dengan $||.||$, misalnya panjang vektor **x** dinyatakan dengan $||x||$, dan sebagainya. Jika titik permulaan suatu vektor **v** adalah A dan titik terminalnya adalah B, maka vektor **v** dapat dituliskan v = $\overrightarrow{AB}$. Vektor-vektor yang mempunyai panjang dan arah yang sama, dinamakan vektor yang ekivalen. Karena vektor hanya akan ditentukan oleh panjang dan arahnya, maka vektor-vektor ekivalen dianggap sama walaupun vektor-vektor tersebut mungkin diletakkan dalam kedudukan yang berbeda-beda. Jika **v** dan **w** ekivalen maka **v = w.**



Gambar 2.1: (a)Vektor $\overrightarrow{AB}$ (b)Vektor-vektor ekivalen

Definisi 2.1.1. (Anton, 1991: 98). *Jika* $\boldsymbol{v}$ *dan* $\boldsymbol{w}$ *adalah dua vektor, maka jumlah* $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ *adalah vektor yang ditentukan sebagai berikut. Tempatkan vektor* $\boldsymbol{w}$

sehingga titik permulaannya berimpit dengan titik terminal dari $\boldsymbol{v}$*. Vektor* $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ *dinyatakan dengan panah dari titik permulaan dari* $\boldsymbol{v}$ *ke titik terminal dari* $\boldsymbol{w}$*.*



Gambar 2.2: Penjumlahan vektor

Di dalam gambar 2.2 telah terbentuk dua jumlah, yakni $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ dan $\mathbf{w} + \mathbf{v}$. Jelas bahwa $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$, dan jumlah tersebut berimpit dengan diagonal dari paralelogram yang ditentukan oleh $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ bila vektor-vektor ini diletakkan sehingga vektor-vektor tersebut mempunyai titik permulaan yang sama. Vektor yang memiliki panjang nol dinamakan vektor nol (*zero vector*) dan dinyatakan dengan $\mathbf{0}$. Vektor $\mathbf{0}$ memiliki sifat $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0}$.

2.1.1 Vektor di $\mathbb{R}^n$

Suatu vektor di ruang yang berdimensi lebih dari 3 tidak dapat digambarkan secara geometrik , tetapi dengan menggunakan sifat analitik, vektor dapat sampai berdimensi n atau $\mathbb{R}^n$. Vektor $\mathbf{x}$=(x_1, x_2, ..., x_n), $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Panjang vektor di $\mathbb{R}^n$ dikenal dengan nama *Euclidean norm* atau Norma Euclidis.

2.2 Ruang Vektor

Diberikan suatu himpunan V dan suatu lapangan F. Elemen dari V disebut vektor dan elemen dari F disebut skalar. Ruang vektor mempunyai dua operasi biner, yaitu + dan . yang masing masing menotasikan operasi penjumlahan dua vektor dan operasi perkalian antara suatu vektor dan skalar.

2.2.1 Field (Lapangan)

Pandang F suatu himpunan, didefinisikan 2 operasi yang disebut penjumlahan (+) dan perkalian (.). F merupakan field apabila memenuhi aksioma:

1. Untuk setiap $\alpha, \beta \in F$ maka $\alpha + \beta \in F$ dan $\alpha\beta \in F$. Dikatakan F tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

2. Untuk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in F$ maka $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

3. Terdapat $0 \in F$ disebut elemen nol, sedemikian sehingga $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$, untuk setiap $\alpha \in F$.

4. Untuk masing-masing $\alpha \in F$, terdapat $-\alpha \in F$, disebut negatif dari α, sedemikian sehingga $(-\alpha) + \alpha = \alpha + (-\alpha) = 0$.

5. Untuk setiap $\alpha, \beta \in F$ maka $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

6. Untuk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in F$ maka $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

7. Untuk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in F$ maka:
   (i) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
   $(ii)(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$.

8. Untuk setiap $\alpha, \beta \in F$ maka $\alpha\beta = \beta\alpha$.

9. Terdapat $1 \in F$, disebut elemen satuan dari F, sedemikian sehingga $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$, untuk setiap $\alpha \in F$.

10. Untuk masing-masing $\alpha \neq 0 \in F$, terdapat α^{-1}, disebut invers (kebalikan dari α), sedemikian sehingga $\alpha^{-1}\alpha = \alpha\alpha^{-1} = 1$.

Anggota-anggota (elemen-elemen) dari suatu field disebut skalar.

Contoh:

1. Himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ merupakan field terhadap operasi penjumlahan dan perkalian hitung biasa.

2. Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$, yaitu himpunan berbentuk x+yi dengan x dan y riil serta $i = \sqrt{-1}$, merupakan field terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

2.2.2 Ruang Vektor atas Suatu Field

Pandang suatu himpunan V dan suatu field F. Didefinisikan operasi penjumlahan terhadap elemen-elemen V dan perkalian elemen-elemen V dengan elemen F (disebut perkalian skalar). Maka V disebut ruang vektor atas field F bila memenuhi:

1. Untuk setiap $\mathbf{u}$,$\mathbf{v} \in V$ maka $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ (tertutup terhadap operasi penjumlahan).

2. Untuk setiap $\mathbf{u}$,$\mathbf{v} \in V$ maka $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

3. Untuk setiap $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$,$\mathbf{w} \in V$ maka $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$.

4. Ada $\mathbf{0} \in V$ sedemikian sehingga $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

5. Ada -$\mathbf{u} \in V$ sedemikian sehingga $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

6. Ada $k \in F$ dan $\mathbf{u} \in V$ maka k$\mathbf{u} \in V$ (tertutup terhadap operasi perkalian skalar).

7. Untuk skalar $1 \in F$ maka 1$\mathbf{u}$=$\mathbf{u}$.

8. Untuk setiap $k \in F$ dan $\mathbf{u}$,$\mathbf{v} \in V$ berlaku k($\mathbf{u}$+$\mathbf{v}$)=k$\mathbf{u}$+k$\mathbf{v}$.

9. Untuk setiap $k, l \in F$ dan **u**$\in V$ berlaku (k+l)u=ku+lu.

10. Untuk setiap $k, l \in F$ dan **u**$\in V$ berlaku (kl)**u**=k(l**u**).

Anggota-anggota dari ruang vektor disebut vektor.
Contoh:

1. Karena $\mathbb{R}$ merupakan field maka $\mathbb{R}^2$ juga suatu ruang vektor atas field $\mathbb{R}$ tersebut.

2. Misal himpunan $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$ bukan merupakan ruang vektor, karena jika diambil sebarang vektor anggota himpunan V, misal **u**=(1,1)$\in V$ dan **v**=(2,0)$\in V$ tetapi **u**+**v**=(3,1) bukan anggota himpunan V menyebabkan aksioma ruang vektor yang pertama tidak terpenuhi.

2.3 Operasi Vektor

Berikut ini beberapa operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada vektor:

Teorema 2.3.1. *Jika* ***u****,* ***v****, dan* ***w*** *adalah vektor-vektor di dalam* $\mathbb{R}^n$ *, sedangkan k dan l adalah skalar, maka hubungan yang berikut akan berlaku.*

1. *Untuk setiap* ***u****,****v*** $\in V$ *maka* $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$ *(tertutup terhadap operasi penjumlahan).*

2. *Untuk setiap* ***u****,****v*** $\in V$ *maka* ***u****+****v****=****v****+****u****.*

3. *Untuk setiap* ***u****,****v****,****w*** $\in V$ *maka* ***u****+(****v****+****w****)=(****u****+****v****)+****w****.*

4. *Ada* ***0*** $\in V$ *sedemikian sehingga* ***u****+****0****=****0****+****u****=****u****.*

5. *Ada -****u*** $\in V$ *sedemikian sehingga* ***u****+(-****u****)=(-****u****)+****u****=****0****.*

6. *Ada* $k \in F$ *dan* $\boldsymbol{u} \in V$ *maka* $k\boldsymbol{u} \in V$ *(tertutup terhadap operasi perkalian skalar).*

7. *Untuk skalar* $1 \in F$ *maka* $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$.

8. *Untuk setiap* $k \in F$ *dan* $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V$ *berlaku* $k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=k\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{v}$.

9. *Untuk setiap* $k, l \in F$ *dan* $\mathbf{u} \in V$ *berlaku* $(k+l)u=ku+lu$.

10. *Untuk setiap* $k, l \in F$ *dan* $\mathbf{u} \in V$ *berlaku* $(kl)\boldsymbol{u}=k(l\boldsymbol{u})$.

atau dengan kata lain $\mathbb{R}^n$ *suatu ruang vektor atas* $\mathbb{R}$.

Bukti.

Misal $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$, dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_n)$

1. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ maka $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n) \in V$$

2. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ maka $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, ..., u_n) + (v_1, v_2, ..., v_n)\\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)\\ &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, ..., v_n + u_n)\\ &= (v_1, v_2, ..., v_n) + (u_1, u_2, ..., u_n)\\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}\end{aligned}$$

3. $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ maka $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (u_1, u_2, ..., u_n) + [(v_1, v_2, ..., v_n) + (w_1, w_2, ..., w_n)]\\ &= (u_1, u_2, ..., u_n) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, ..., v_n + w_n)\\ &= (u_1 + [v_1 + w_1], u_2 + [v_2 + w_2], ..., u_n + [v_n + w_n]\\ &= ([u_1 + v_1] + w_1, [u_2 + v_2] + w_2, ..., [u_n + v_n] + w_n\\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n) + (w_1, w_2, ..., w_n)\\ &= [(u_1, u_2, ..., u_n) + (v_1, v_2, ..., v_n)] + (w_1, w_2, ..., w_n)\end{aligned}$$

$$= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

4. $\exists 0 \in V$ sehingga $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, ..., u_n) + (0, 0, ..., 0) &= (u_1 + 0, u_2 + 0, ..., u_n + 0)\\ &= (0 + u_1, 0 + u_2, ..., 0 + u_n)\\ &= (0, 0, ..., 0) + (u_1, u_2, ..., u_n)\\ &= \mathbf{0} + \mathbf{u}\\ &= (u_1, u_2, ..., u_n)\\ &= \mathbf{u}\end{aligned}$$

5. $\exists - \mathbf{u} \in V$ maka $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, ..., u_n) + (-u_1, -u_2, ..., -u_n) &= (u_1 - u_1, u_2 - u_2, ..., u_n - u_n)\\ &= (-u_1 + u_1, -u_2 + u_2, ..., -u_n + u_n)\\ &= (0, 0, ..., 0)\\ &= (-u_1, -u_2, ..., -u_3) + (u_1, u_2, ..., u_n)\\ &= (-\mathbf{u}) + \mathbf{u}\end{aligned}$$

6. $\exists k \in F$ dan $\mathbf{u} \in V$ maka $k\mathbf{u} \in V$

$$\begin{aligned}k\mathbf{u} &= k(u_1, u_2, ..., u_n)\\ &= (ku_1, ku_2, ..., ku_n) \in V\end{aligned}$$

7. $\exists 1 \in F$ maka $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

$$\begin{aligned}1\mathbf{u} &= 1\ (u_1, u_2, ..., u_n)\\ &= (1u_1, 1u_2, ..., 1u_n)\\ &= (u_1, u_2, ..., u_n)\\ &= \mathbf{u}\end{aligned}$$

8. $\exists k \in F$ dan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ berlaku $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

$$\begin{aligned}k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= k\{[u_1, u_2, ..., u_n] + [v_1, v_2, ..., v_n])\\ &= k(u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)\\ &= (k(u_1 + v_1), k(u_2 + v_2), ..., k(u_n + v_n))\\ &= (ku_1 + kv_1, ku_2 + kv_2, ..., ku_n + kv_n)\end{aligned}$$

$$= (ku_1, ku_2, ..., ku_n) + (kv_1, kv_2, ..., kv_3)$$
$$= k(u_1, u_2, ..., u_n) + k(v_1, v_2, ..., v_n)$$
$$= k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

9. $k, l \in F$ dan $\mathbf{u} \in V$ berlaku $(k+l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$

$$
\begin{aligned}
(k+l)\mathbf{u} &= (k+l)(u_1, u_2, ..., u_n) \\
&= ((k+l)u_1, (k+l)u_2, ..., (k+l)u_n) \\
&= (ku_1 + lu_1, ku_2 + lu_2, ..., ku_n + lu_n) \\
&= (ku_1, ku_2, ..., ku_n) + (lu_1, lu_2, ..., lu_n) \\
&= k(u_1, u_2, ..., u_n) + l(u_1, u_2, ..., u_n) \\
&= k\mathbf{u} + l\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

10. $k, l \in F$ dan $\mathbf{u} \in V$ berlaku $(kl)\mathbf{u} = k(l\mathbf{u})$

$$
\begin{aligned}
(kl)\mathbf{u} &= (kl)(u_1, u_2, ..., u_n) \\
&= (klu_1, klu_2, ..., klu_n) \\
&= k(lu_1, lu_2, ..., lu_n) \\
&= k(l(u_1, u_2, ..., u_n)) \\
&= k(l\mathbf{u})
\end{aligned}
$$

Berdasarkan teorema tersebut terbukti $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang vektor. □

Perkalian titik pada vektor

Definisi 2.3.1. (Anton, 1991: 110). *Jika* $\boldsymbol{u}$ *dan* $\boldsymbol{v}$ *adalah vektor-vektor di dalam* $\mathbb{R}^2$ *atau* $\mathbb{R}^3$ *dan* θ *adalah sudut di antara* $\boldsymbol{u}$ *dan* $\boldsymbol{v}$*, maka perkalian titik (dot product) atau perkalian dalam Euklidis (Euclidean inner product)* $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$ *didefinisikan oleh:*

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \begin{cases} ||\boldsymbol{u}||\ ||\boldsymbol{v}||\ \cos\ \theta, \textit{ jika } \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0} \textit{ dan } \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} \\ \quad 0 \qquad\quad , \textit{ jika } \boldsymbol{u} = 0 \textit{ atau } \boldsymbol{v} = 0 \end{cases}$$

Dari definisi 2.3.1 tersebut dapat diperoleh definisi 2.3.2 berikut

Definisi 2.3.2. (Anton, 1991: 135). *Jika* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ *dan* $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ *adalah sebarang vektor di dalam* R^n*, maka perkalian dalam Euclidis (Euclidean inner product)* $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$ *didefinisikan oleh:*

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n$$

Berikut ini beberapa sifat perkalian titik pada vektor:

Teorema 2.3.2. (Anton, 1991: 135). *Jika* $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$, *dan* $\boldsymbol{w}$ *adalah vektor-vektor di dalam* $\mathbb{R}^n$ *dan* k *adalah sebarang skalar maka:*

(a) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$

(b) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$

(c) $(k\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = k(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$

(d) $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}$. *Selanjutnya,* $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

Bukti.

a. $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{u}$

$= u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n$

$= v_1u_1 + v_2u_2 + ... + v_nu_n$

$= \mathbf{v}.\mathbf{u}$

b. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}).\mathbf{w} = \mathbf{u}.\mathbf{w} + \mathbf{v}.\mathbf{w}$

$= (u_1v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n).(w_1, w_2, ..., w_n)$

$= (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + ... + (u_n + v_n)w_n$

$= (u_1w_1 + v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + ... + u_nw_n + v_nw_n$

$= (u_1w_1 + u_2w_2 + ... + u_nw_n) + (v_1w_1 + v_2w_2 + ... + v_nw_n)$

$\boldsymbol{= \mathbf{u}.\mathbf{w} + \mathbf{v}.\mathbf{w}}$

c. $(k\mathbf{u}).\mathbf{v} = k(\mathbf{u}.\mathbf{v})$

$= (k(u_1, u_2, ..., u_n)).(v_1, v_2, ..., v_n)$

$= (ku_1, ku_2, ..., ku_n).(v_1, v_2, ..., v_n)$

$= ku_1v_1 + ku_2v_2 + ... + ku_nv_n$

$$= k(u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n)$$
$$= k(\mathbf{u}.\mathbf{v})$$

d. $\mathbf{v}.\mathbf{v} \geq 0$.

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$$
$$\mathbf{v}.\mathbf{v} = v_1.v_1 + v_2.v_2 + ... + v_n.v_n$$
$$= v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2 > 0$$
$$\mathbf{v}.\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$\Leftarrow \mathbf{v} = \mathbf{0} = (0, 0, ..., 0), \quad \mathbf{v}.\mathbf{v} = v_1.v_1 + v_2.v_2 + ... + v_n.v_n$$
$$= 0.0 + 0.0 + ... + 0.0$$
$$= \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow \mathbf{v}.\mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$= 0.0 + 0.0 + ...0.0$$
$$= v_1.v_1 + v_2.v_2 + ... + v_n.v_n$$
$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) = (0, 0, ..., 0)$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{0}$$
□

2.3.1 Jarak dua buah titik

Misal dua buah titik di $\mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ maka jarak dari titik x ke titik y lambangkan dengan d.

$$d = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

Demikian juga dengan dua buah titik di $\mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ dan $y = (y_1, y_2, y_3)$, maka jarak dari titik x ke titik y adalah

$$d = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

Berdasarkan perhitungan jarak dua buah titik di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ maka untuk jarak dua buah titik di $\mathbb{R}^n$, misal titik $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ adalah

$$d = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}$$

2.4 Ruang Norma

Misal V merupakan suatu ruang vektor. Maka V dengan operasi vektor di Teorema 2.3.1, maka $||\mathbf{v}||$ adalah suatu norma pada V apabila untuk setiap $\mathbf{v}$,$\mathbf{w}\in V$ dan $k \in \mathbb{R}$, berlaku aksioma di bawah ini:

1. $||\mathbf{v}|| > 0$ dan $||\mathbf{v}||$=0 jika dan hanya jika $\mathbf{v}$=$\mathbf{0}$
2. $||k\mathbf{v}|| = |k|\ ||\mathbf{v}||$
3. $||\mathbf{v} + \mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||$

Suatu ruang vektor V bersama dengan suatu norm disebut norma ruang vektor linier atau disingkat ruang norma. Bilangan riil $||\mathbf{v}||$ disebut norma dari vektor $\mathbf{v}$. Pasangan $(V, ||.||)$ disebut Ruang Norma. (Lipschutz, 1965: 118).

2.4.1 Contoh Ruang Norma

Berikut adalah beberapa contoh ruang norma:

1. Himpunan $\mathbb{R}^m$ adalah suatu ruang vektor linier dengan operasi penjumlahan didefinisikan oleh

$$(a_1, ..., a_m) + (b_1, ..., b_m) = (a_1 + b_1, ..., a_m + b_m)$$

dan perkalian skalar didefinisikan oleh

$$k(a_1, ..., a_m) = (ka_1, ..., ka_m)$$

Fungsi pada R^m didefinisikan oleh

$$||(a_1, ..., a_m)||=\sqrt{a_1^2 + ... + a_m^2} = \sqrt{\sum a_i^2} = \sqrt{\sum |a_i|^2}$$

adalah suatu norma dan disebut norma Euklid pada $\mathbb{R}^m$. Norma Euklid pada $\mathbb{R}^m$ mempengaruhi metrik Euklid pada $\mathbb{R}^m$. Jika p=(a_1, a_2, a_3) adalah suatu titik di $\mathbb{R}^3$, maka $||\mathbf{p}||$ merupakan panjang dari vektor $\mathbf{p}$.

2. Ruang ℓ_p didefinisikan untuk $1 \leq p < \infty$ adalah ruang vektor untuk semua barisan $x = (x_k)$ dengan norma

$$||x|| = (\textstyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

3. Dua fungsi di bawah ini adalah juga norma pada ruang vektor $\mathbb{R}^m$:
   $||(a_1, .., a_m)|| = max(|a_1|, |a_2|, ..., |a_m|)$
   $||(a_1, .., a_m)|| = |a_1| + |a_2| + ... + |a_m|$

4. Kelas C[0,1] dari semua fungsi riil kontinu pada interval I=[0,1] adalah ruang linier karena jumlah dan perkalian skalar dari fungsi kontinu adalah kontinu. Fungsi pada C[0,1] didefinisikan oleh

$$||f|| \;=\; \int\limits_0^1 \; |f(x)| \, dx$$

   adalah suatu norma pada C[0,1].

5. Fungsi pada ruang linier C[0,1] didefinisikan oleh

$$||f|| \;=\; \sup\{\; |f(x)| \;\; : x \in [0,1]\}$$

   juga merupakan suatu norma.

6. Himpunan barisan (a_n) sedemikian sehingga $\sum |a_n|^2 < \infty$ adalah suatu ruang linier. Fungsi pada $\mathbb{R}^\infty$ didefinisikan oleh

$$||(a_n)|| \;=\; \sqrt{\sum |a_n|^2}$$

adalah suatu norma dan disebut norma-ℓ_2 pada $\mathbb{R}^\infty$.

7. Norma satuan, misal diberikan suatu vektor $\mathbf{v}$ tak nol, maka $\frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}$ adalah suatu vektor dengan norma 1, karena $||\frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}|| = \frac{1}{||\mathbf{v}||}||\mathbf{v}|| = 1$.

2.5 Ruang Metrik

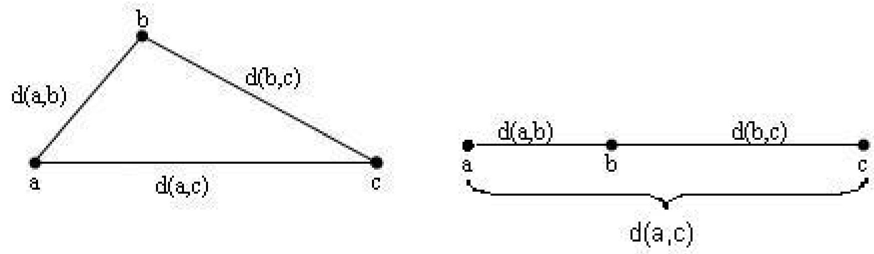
Definisi 2.5.1. (Gozali, 2010: 1). *Ruang metrik adalah suatu himpunan tak kosong X yang disertai fungsi $d : X \times X \to R$ (disebut metrik di X), sehingga untuk semua $a, b, c \in X$ berlaku:*
1. $d(a, b) \geq 0$ dengan d(a,b)=0 jika dan hanya jika a=b. (Positif Definit)
2. d(a,b)=d(b,a) (simetri)
3. d(a,c)$\leq$d(a,b)+d(b,c) (Ketaksamaan Segitiga)
Bilangan riil d(a,b) disebut metrik dari a ke b. Ruang metrik sering dinyatakan sebagai (X,d).

Aksioma yang pertama menyatakan bahwa jarak dari suatu titik ke titik lainnya adalah tidak pernah negatif, dan bahwa jarak suatu titik ke dirinya sendiri adalah nol.

Aksioma yang kedua menyatakan bahwa jarak dari titik a ke titik b adalah sama dengan jarak dari titik b ke titik a, dapat dikatakan jarak diantara a dan b.

Aksioma yang ketiga disebut ketaksamaan segitiga karena jika a,b,c adalah titik di ruang-2, maka jarak a ke c akan kurang dari jarak a ke b ditambah jarak b ke c, atau jarak a ke c sama dengan jarak a ke b ditambah jarak b ke c, jika a,b,c adalah titik-titik yang segaris.

Jika a,b,c tidak segaris maka d(a,c)<d(a,b)+d(b,c), tetapi jika a,b,c segaris maka d(a,c)=d(a,b)+d(b,c).



Gambar 2.3: Ketaksamaan Segitiga

Aksioma yang keempat menyatakan bahwa jarak a ke b sama dengan nol jika dan hanya jika a adalah b.

2.5.1 Beberapa contoh metrik

Berikut ini beberapa contoh metrik:

1. Fungsi d yang didefinisikan oleh d(a,b)=$|a - b|$, dimana a dan b bilangan riil, adalah suatu metrik dan disebut metrik biasa pada garis bilangan riil R. Fungsi d yang didefinisikan oleh

$$\text{d(p,q)}=\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

   apabila p=(a_1, a_2) dan q=(b_1, b_2) adalah titik-titik dibidang $\mathbb{R}^2$, adalah suatu metrik dan disebut metrik biasa pada $\mathbb{R}^2$.

2. Misal C[0,1] dinotasikan sebagai fungsi kontinu dari unit selang tutup [0,1]. Suatu metrik didefinisikan dalam kelas C[0,1] sebagai berikut:

$$d(f, g) \;=\; \int_0^1 |f(x) - g(x)| \; dx$$

3. Misal C[0,1] dinotasikan sebagai koleksi dari fungsi kontinu di [0,1]. Metrik lainnya didefinisikan di [0,1] sebagai berikut:

$$d^*(f, g) \;=\; \sup \{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$$

dimana d*(f,g) adalah jarak vertikal terjauh antara fungsi f(x) dengan fungsi g(x).

4. Misal p=(a_1, a_2) dan q=(b_1, b_2) merupakan sebarang titik-titik di bidang R^2. Fungsi d_1 dan d_2 didefinisikan oleh:
   d_1(p,q)=max($|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|$)
   d_2(p,q)=$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$
   adalah metrik-metrik yang berbeda di R^2

2.5.2 Barisan Cauchy

Definisi 2.5.2.1. *Misal (X, d) suatu ruang metrik. Suatu barisan $(a_n : n \in \mathbb{N})$ adalah suatu barisan Cauchy jika dan hanya jika $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga*

$$n, m > n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon.$$

Karenanya, dalam kasus X adalah ruang norma, (a_n) adalah barisan Cauchy jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n, m > n_0 \Rightarrow ||a_n - a_m|| < \epsilon$.
Contoh:

1. Misal $(a_n : n \in \mathbb{N})$ merupakan barisan Cauchy dari bilangan bulat. Maka bentuk barisannya harus

$$(a_1, a_2, ..., a_{n_0}, b, b, b, ...)$$

   Barisan ini konstan sesudah suku ke-n_0. karena jika dipilih $\epsilon = \frac{1}{2}$, maka

$$a_n, a_m \in \mathbb{Z} \text{ dan } |a_n - a_m| < \tfrac{1}{2} \text{ mengakibatkan } a_n = a_m.$$

2. Akan ditunjukkan bahwa setiap barisan konvergen adalah barisan Cauchy. Misal $a_n \to b$ dan misal $\epsilon > 0$. Maka ada $n_0 \in \mathbb{N}$ yang cukup besar sedemikian sehingga

$$n > n_0 \text{ maka } |a_n - b| < \tfrac{1}{2}\epsilon \text{ dan } m > n_0 \text{ maka } |a_m - b| < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

   Akibatnya, $n, m > n_0$ maka

$$|a_n - a_m| = |a_n - b + b - a_m| \leq |a_n - b| + |b - a_m| < \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

   Karenanya (a_n) adalah barisan Cauchy.

3. Misal (a_n) suatu barisan konvergen di ruang metrik, sebut $a_n \to p$. Maka (a_n) adalah barisan Cauchy, karena untuk setiap $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n > n_0 \Rightarrow d(a_n, p) < \frac{1}{2}\epsilon$
   sehingga, dengan ketaksamaan segitiga,
   $n, m > n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) \leq d(a_n, p) + d(a_m, p) < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$.
   Dengan kata lain, (a_n) adalah barisan Cauchy.
   Dinyatakan hasil dari contoh tersebut sebagai proposisi.

   Proposisi 2.5.2.1. (Lipschutz, 1965: 51). *Setiap barisan konvergen di suatu ruang metrik adalah Barisan Cauchy, tetapi barisan Cauchy belum tentu merupakan barisan yang konvergen.*

4. Misal X=(0,1) dengan metrik biasa. Maka $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$ adalah suatu barisan di X yang Cauchy tetapi tidak konvergen di X.
   karena barisan $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$ konvergen ke 0, tetapi X=(0,1) sehingga 0 bukan anggota X. Jadi barisan $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$ tidak konvergen ke suatu titik di X.

2.5.3 Kelengkapan

Definisi 2.5.3.1. *(X,d) ruang metrik, $A \in X$, A disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy di A konvergen ke suatu titik di A.*

Contoh:

1. Himpunan $\mathbb{Z}$=(...,-2,-1,0,1,2,...) dari bilangan bulat adalah lengkap. Barisan Cauchy $(a_n : n \in N)$ dari titik di $\mathbb{Z}$ adalah dari bentuk

$$(a_1, a_2, ..., a_{n_0}, b, b, b, ...)$$

   yang konvergen ke titik $b \in \mathbb{Z}$.

2. Himpunan $\mathbb{Q}$ dari bilangan rasional adalah tidak lengkap. Dapat dipilih suatu barisan dari bilangan rasional, seperti (1,1.4,1.41,1.412,...) yang konvergen ke bilangan riil $\sqrt{2}$, tetapi tidak rasional, dan bukan merupakan anggota $\mathbb{Q}$.

2.5.4 Ruang Metrik Lengkap

Definisi 2.5.4.1. *Suatu ruang metrik (X,d) adalah lengkap jika barisan Cauchy (a_n) di X konvergen ke suatu titik $p \in X$.*

Contoh:

1. Bilangan riil $\mathbb{R}$ dengan metrik biasa adalah lengkap.

2. Selang buka X=(0,1) dengan metrik umum adalah tidak lengkap karena barisan $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$ di X adalah Cauchy tetapi tidak konvergen ke suatu titik di X.

2.5.5 Ruang Hilbert

Himpunan dari semua barisan riil tak terbatas

$$(a_1, a_2, ...) \text{ sedemikian hingga } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

dinotasikan dengan $\mathbb{R}^\infty$.

Contoh : Perhatikan barisan

$$p = (1, 1, 1, ...) \text{ dan } q = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right)$$

karena $1^2 + 1^2 + ...$ tidak konvergen, maka p bukan merupakan titik di $\mathbb{R}^\infty$. Di sisi lain, barisan $1^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4})^2 + ...$ konvergen, maka q adalah suatu titik di $\mathbb{R}^\infty$. Sekarang misal $p = (a_n)$ dan $q = (b_n)$ berada di $\mathbb{R}^\infty$. Maka fungsi d didefinisikan oleh:

$$d(p, q) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2}$$

adalah suatu metrik dan disebut metrik-ℓ_2 pada $\mathbb{R}^\infty$. Diasumsikan metrik ini pada $\mathbb{R}^\infty$. Ruang metrik terdiri atas $\mathbb{R}^\infty$ dengan metrik-ℓ_2 disebut Ruang Hilbert atau ruang-ℓ_2 dan dinotasikan dengan $\mathbf{H}$.

Misal $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...) = (a_n)$ dan $q = (1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, ...) = (b_n)$, masing-masing adalah suatu titik di $\mathbb{R}^\infty$. Pasangan $(\mathbb{R}^\infty, d) = \mathbf{H}$ adalah ruang Hilbert.

2.6 *Convex*

Definisi 2.6.1. (Rudin, 1965: 31). *Suatu interval (a,b) merupakan himpunan bilangan riil x sedemikian sehingga $a < x < b$. Sedangkan interval [a,b] merupakan himpunan bilangan riil x sedemikian sehingga $a \leq x \leq b$. Ada juga interval* *setengah buka [a,b) dan(a,b] yang merupakan himpunan bilangan riil* $a \leq x < b$ *dan* $a < x \leq b$.

Jika $a_i < b_i$ *untuk i=1,...,k , himpunan semua titik* $x=(x_1, ..., x_n)$ *di* R^k *dimana koordinatnya memenuhi ketaksamaan* $a_i \leq x_i \leq b_i$ $(1 \leq i \leq k)$ *disebut sel-k. Sel-1 adalah interval, sel-2 adalah persegi panjang, dan seterusnya.*

Jika $x \in R^k$ *dan* $r > 0$, *bola buka atau tutup* B *dengan pusat* x *dan radius* r *adalah didefinisikan sebagai himpunan semua* $y \in R^k$ *sedemikian sehingga* $|y - x| < r$ *atau* $|y - x| \leq r$.

Suatu himpunan $E \subset R^k$ *dikatakan convex jika* $\forall x, y \in E$ *dan* $0 < \lambda < 1$ *berlaku*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in E$$

Sebagai contoh, bola adalah *convex* karena jika $|y - x| < r, |z - x| < r$ dan $0 < \lambda < 1$ maka

$$\begin{aligned} |\lambda y + (1 - \lambda)z - x| &= |\lambda(y - x) + (1 - \lambda)(z - x)| \\ &\leq \lambda\, |y - x| + (1 - \lambda)\, |z - x| \\ &< \lambda r + (1 - \lambda) r \\ &= r\,. \end{aligned}$$

2.7 Ruang Banach

Definisi 2.7.1. (Morrison, 2001: 18). *Suatu ruang norma* $(X, ||.||)$ *adalah suatu ruang Banach apabila ruang metrik* (X, d) *yang diperoleh dari* $(X, ||.||)$ *merupakan suatu ruang metrik lengkap.*

2.7.1 Contoh Ruang Banach

Berikut ini contoh ruang Banach:

1. Sistem bilangan riil, $\mathbb{R}$, dengan struktur garis dan norma didefinisikan sebagai "nilai mutlak" adalah suatu ruang Banach. Demikian juga, bilangan kompleks $\mathbb{C}$, bersama dengan nilai mutlak untuk suatu norma, mendasari suatu ruang Banach kompleks. Kata "kompleks", merupakan skalar dari ruang Banach, maksudnya untuk menunjukkan ruang Banach yang skalarnya adalah bilangan kompleks disebut ruang Banach kompleks, tetapi bila hanya disebut ruang Banach berarti ruang Banach tersebut adalah Banach riil.

2. Jika $n \in \mathbb{N}$, maka ruang-n Euclidis, $\mathbb{R}^n$, dengan operator linier umum dari penambahan vektor dan perkalian skalar bersama dengan norma Euclidis untuk $\mathbf{x}$=$(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ didefinisikan oleh

$$||\mathbf{x}|| = ||(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)|| \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

adalah suatu ruang Banach yang kadang-kadang dinotasikan dengan simbol l_2^n atau norma$-\ell_2$.

3. Ruang C([0,1]) dari fungsi kontinu bernilai riil pada interval [0,1] dengan operator linier umum dari operasi penambahan dan perkalian skalar adalah ruang Banach yang didapat dengan norma: $||f||_\infty \equiv sup\{|f(t)| : 0 \leq t \leq 1$ untuk $f \in C([0,1])\}$. (Supremum ada ketika setiap fungsi kontinu didefinisikan pada himpunan kompak, seperti [0,1], dan terbatas, sehingga $||f||_\infty < \infty$ untuk setiap f). Untuk membuktikan norma tersebut di atas, pertama perhatikan bahwa sifat (i) dan (ii) dari norma tersebut siap dibuktikan untuk $||.||_\infty$. Untuk menetapkan sifat (iii), misal f_1 dan f_2 ada di

C([0,1]) dan amati bahwa untuk setiap $t \in [0,1]$,

$$|(f_1 + f_2)(t)| \ = \ |f_1(t) + f_2(t)| \ \leq \ |f_1(t)| + |f_2(t)|.$$

Sekarang dari definisi norma, terdapat $|f_1(t)| \leq ||f_1||_\infty$ dan $|f_2(t)| \leq ||f_2||_\infty$, jadi untuk setiap t, $|(f_1 + f_2)(t)| \leq ||f_1||_\infty + ||f_2||_\infty$. Maka

$$||f_1 + f_2||_\infty = \sup\{|(f_1 + f_2)(t) : 0 \leq t \leq 1\} \leq \ ||f_1||_\infty + ||f_2||_\infty$$

dan sifat (iii) terbentuk. Akhirnya untuk menunjukkan bahwa C([0,1]) adalah suatu ruang Banach, harus ditunjukkan bahwa barisan Cauchy di C([0,1]) konvergen di C([0,1]). Misal $f_n \in C([0,1])$ untuk $n \in \mathbb{N}$, dan andaikan bahwa $||f_n - f_m||_\infty \to 0$ apabila $n, m \to \infty$. Pertama dikonstruksi fungsi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dimana barisan $(f_n)_n$ konvergen ke fungsi ini, dan menunjukkan bahwa fungsi ini di C([0,1]). Diamati bahwa karena (f_n) adalah barisan Cauchy, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada suatu bilangan asli N_ε sedemikian sehingga $|f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ untuk semua $n, m \geq N_\varepsilon$ dan semua $t \in [0,1]$. Khususnya, untuk setiap nilai $t \in [0,1], (f_n(t))$ adalah barisan Cauchy dari bilangan riil dan karenanya konvergen. Sekarang definisikan untuk setiap $t \in [0,1], f(t) := lim_n f_n(t)$ dan amati bahwa untuk semua $t \in [0,1], |f(t) - f_m(t)| = |lim_n f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon/3$ kapanpun $n, m \geq N_\varepsilon$ jadi untuk $m \geq N_\varepsilon$

$$||f - f_m||_\infty = \ \sup\{|f(t) - f_m(t)| : 0 \leq t \leq 1\} \ \leq \ \varepsilon/3.$$

Dengan demikian (f_m) konvergen ke f. Hanya perlu ditunjukkan kekontinuan dari f. Jadi, menggunakan N_ε seperti sebelumnya, untuk $n = N_\varepsilon$, karena dimiliki kekontinuan dari setiap f_n yang diberikan $t \in [0,1]$ maka ada lingkungan U_t dari t sedemikian sehingga jika $s \in U_t$ maka $|f_n(t) - f_n(s)| \leq \epsilon/3$.

Dari sini didapatkan bahwa jika $s \in U_t$ maka

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &\leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(s)| + |f_n(s) - f(s)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi f adalah kontinu di t (untuk setiap t di [0,1]).

4. Misal $1 \leq p < \infty$ merupakan bilangan riil dan dinotasikan dengan ℓ_p koleksi dari semua barisan riil $(x_n)_n$ sedemikian sehingga $\sum_n |x_n|^p < \infty$. Ditunjukkan disini bahwa ℓ_p dengan fungsional $||(x_n)||_p = (\sum_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ adalah ruang Banach.

   Jika p=1, fakta bahwa ℓ_1 adalah ruang norma, sedangkan kasus $p > 1$ melibatkan beberapa ketaksamaan klasik.

   Lemma 2.7.1.1. (Morrison, 2001: 29). *Misal* $0 < \alpha < 1$ *dan* $a, b \geq 0$, *maka* $a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b$.

   Bukti. Jika a=0 atau b=0 maka ketaksamaan tersebut benar. Jika a=b maka akan didapatkan kesamaan. Kemudian Diasumsikan $a, b > 0$ dengan $a < b$. Berdasarkan teorema nilai rata-rata:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \;\; untuk \;\; suatu \;\; c \in (a, b)$$

   Jadi ada bilangan riil ε sedemikian sehingga $a < \varepsilon < b$ dan memenuhi $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\varepsilon)$

   Misal f(x)=$x^{1-\alpha}$. Perhatikan bahwa

   $f(a) = a^{1-\alpha}$

   $f(b) = b^{1-\alpha}$

$f(\varepsilon) = \varepsilon^{1-\alpha}$ dan $f'(\varepsilon) = (1-\alpha)\varepsilon^{-\alpha}$

Didapatkan $\frac{b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}}{b-a} = (1-\alpha)\varepsilon^{-\alpha} < (1-\alpha)a^{-\alpha}$ karena $a < \varepsilon$.

Kemudian kalikan keduanya dengan $(b-a)a^{\alpha}$, didapatkan

$$a^{\alpha}(b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) < (1-\alpha)(b-a)$$
$$\mathrm{a}^{\alpha}b^{1-\alpha} - a < b - a - \alpha b + \alpha a$$
$$\mathrm{a}^{\alpha}b^{1-\alpha} < \alpha a + (1-\alpha)b$$

□

Ketaksamaan Holder.

Teorema 2.7.1.1. (Morrison, 2001: 29). *Misal* $x = (x_n) \in \ell_p$ *dan* $y = (y_n) \in \ell_q$, *dimana* $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ *dan* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *maka*

$$\sum_n |x_n y_n| \leq (\sum_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_n |y_n|^q)^{\frac{1}{q}} = ||(x_n)_n||_p ||(y_n)_n||_q.$$

Bukti. Misal $p, q \in \mathbb{R}$ dengan $1 < p < \infty$ dimana $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Karena $p > 1$ maka $0 < \frac{1}{p} < 1$, Perhatikan bahwa

$0 < \frac{1}{p} < 1$

$0 < 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p} < 1$

didapatkan $q > 1$.

Misalkan $A > 0$ dan $B > 0$. Maka $A^p > 0$ dan $B^q > 0$ dan dengan mengganti $\alpha = \frac{1}{p}, 1 - \alpha = \frac{1}{q}, a = A^p$, dan $b = B^q$ dari lemma 2.7.1 diperoleh

$$(A^p)^{\frac{1}{p}} (B^q)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} A^p + \frac{1}{q} B^q$$
$$\mathrm{AB} \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

Sekarang apabila $A = \frac{|x_k|}{(\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}}$ dan $B = \frac{|y_k|}{(\sum_{k=1}^n |y_k|^p)^{\frac{1}{p}}}$ maka didapatkan

$$\frac{|x_n|}{(\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}} \frac{|y_n|}{(\sum_{k=1}^n |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\sum_{k=1}^n |x_k|^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{\sum_{k=1}^n |y_k|^q}$$

Dengan menjumlahkan indeks k dari 1 sampai n maka

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}|x_n y_n|}{(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\frac{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p}{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p} + \frac{1}{q}\frac{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q}{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q}$$

$$\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

maka terbukti

$$\sum_n |x_n y_n| \leq \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_n |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

Ketaksamaan Minkowski.

Teorema 2.7.1.2. (Morrison, 2001: 30). *Jika* $(x_n)_n, (y_n)_n \in \ell_p$ *dengan* $p > 1$, *maka*

$$\left(\sum_n |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_n |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Bukti. Misal $x_1, x_2, ..., x_n$ dan $y_1, y_2, ..., y_n$ adalah bilangan-bilangan positif dengan $p, q > 1$ dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{q+p}{pq} = 1$ maka $\frac{q+p}{q} = p$ atau $1 + \frac{p}{q} = p$. Jadi untuk k=1,2,...,n maka

$$(x_k+y_k)^p = (x_k+y_k)^{1+\frac{p}{q}} = (x_k+y_k)(x_k+y_k)^{\frac{p}{q}} = x_k(x_k+y_k)^{\frac{p}{q}} + y_k(x_k+y_k)^{\frac{p}{q}}$$

Dengan menjumlahkan indeks k dari 1 sampai n maka diperoleh

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^p = \sum_{k=1}^{n} x_k(x_k + y_k)^{\frac{p}{q}} + \sum_{k=1}^{n} y_k(x_k + y_k)^{\frac{p}{q}}$$

menurut ketaksamaan Holder,

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k(x_k+y_k)^{\frac{p}{q}} &\leq (\textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{\frac{1}{p}}(\textstyle\sum_{k=1}^{n}((x_k+y_k)^{\frac{p}{q}})^q)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{\frac{1}{p}}(\textstyle\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{n} y_k(x_k+y_k)^{\frac{p}{q}} &\leq (\textstyle\sum_{k=1}^{n} y_k^p)^{\frac{1}{p}}(\textstyle\sum_{k=1}^{n}((x_k+y_k)^{\frac{p}{q}})^q)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\textstyle\sum_{k=1}^{n} y_k^p)^{\frac{1}{p}}(\textstyle\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

sehingga

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p \leq (\textstyle\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p)^{\frac{1}{q}}((\textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{\frac{1}{p}} + (\textstyle\sum_{k=1}^{n} y_k^p)^{\frac{1}{p}})$$

atau

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p}{(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p)^{\frac{1}{q}}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

karena $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ maka didapatkan

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

terbukti

$$\left(\sum_{n}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\square$

diperoleh $||(x_n)||_p = (\sum_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ memenuhi sifat ruang norma.

Selanjutkan akan ditunjukkan bahwa ℓ_p lengkap.

Misal (x_n) adalah suatu barisan Cauchy di ℓ_p dengan

$x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, ...)$

artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in N$ sedemikian sehingga

$\|x_m - x_n\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{m,k} - x_{n,k}|^p < \varepsilon^p, \ \forall m, n \geqslant n_0 .... *$

akibatnya diperoleh

$|x_{m,k} - x_{n,k}| < \varepsilon, \ \forall m, n \geqslant n_0$

ini menunjukkan bahwa untuk setiap k, barisan $(x_{1,k}, x_{2,k}, ...)$

adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ $a$dalah lengkap, maka barisan ini

konvergen ,tulis

$x_k = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n,k}, \quad k = 1, 2, ...$

Misalkan x $= (x_n)$, selanjutnya akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n)

konvergen ke x.

Dari $*$ untuk m $\to \infty$ diperoleh

$\|x - x_n\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{n,k}|^p \leqslant \varepsilon^p \ \forall n \geqslant n_0 .... **$

Perhatikan bahwa $**$ menyatakan

$\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} (|x_k - x_{n,k}|)^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$

Dari sini diperoleh bahwa barisan (x_n) $k$onvergen

ke x di ℓ_p maka ℓ_p lengkap.

Terbukti bahwa $(\ell_p, ||.||)$ adalah ruang Banach. $\square$

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Bentuk Ketaksamaan *Strictly Convex*

Definisi 3.1.1. *Misal E adalah suatu ruang Banach. Dikatakan bahwa E adalah strictly convex jika x dan y tidak segaris, maka:*

$$||x+y|| < ||x|| + ||y||$$

Sebagai contoh ℓ_p adalah *strictly convex*, sedangkan ruang c_0 dan ℓ_1 adalah tidak *strictly convex*.

Contoh dari ℓ_p dengan $\ell_2 = \{(x_n)_n | x_n \in \mathbb{R}\}$, misal

$x = (x_1, x_2, .., x_n) \in \ell_2$ maka $||x|| = (\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2)^{\frac{1}{2}}$ dan
$y = (y_1, y_2, .., y_n) \in \ell_2$ maka $||y|| = (\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$
$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ maka $||x+y|| = (\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$,
dengan ketaksamaan Minkowski dan p=2 diperoleh
$(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$
karena x dan y tidak segaris maka
$||x+y|| < ||x|| + ||y||$, sehingga ℓ_2 *strictly convex.*

Ruang c_0, dengan $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}} = \{(x_n)_n | x_n \in \mathbb{R}\}$, misal
$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in c_0$ dengan $\|x\|_{c_0} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|$
$y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in c_0$ dengan $\|y\|_{c_0} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |y(n)|$ kemudian
$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in c_0$ dengan $\|x+y\|_{c_0} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x(n) + y(n)|$
sehingga $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x(n) + y(n)| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| + \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |y(n)|$

diperoleh $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

tidak *strictly convex* menurut definisi 3.1.1

Ruang ℓ_1 dengan $\ell_1 = \{(x_n)_n | x_n \in \mathbb{R}\}$, misal

$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \ell_1$ dengan $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ dan

$y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \ell_1$ dengan $\|y\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|$

kemudian

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in \ell_1$ dengan $\|x+y\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i + y_i|$

sehingga

$\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| + \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|$

diperoleh $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, tidak *strictly convex* menurut definisi 3.1.1

Proposisi 3.1.1. *Ruang E adalah strictly convex jika dan hanya jika, untuk semua $x, y \in E$, $x \neq y$, x dan y tidak segaris, dan jika $||x|| = ||y|| = 1$, maka*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$$

Bukti.

Dari proposisi 3.1.1, $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$

$\|x+y\| < \|x\| + \|y\| = 1 + 1 = 2$

$\left|\frac{1}{2}\right| \ \|x+y\| < \left|\frac{1}{2}\right| 2$

$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < \left|\frac{2}{2}\right|$

$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < |1|$

Diperoleh $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$ □

Proposisi 3.1.2. *Ruang E adalah strictly convex jika dan hanya jika, untuk setiap p, $1 < p < +\infty$ untuk semua $x, y \in E, x \neq y$, x dan y tidak segaris, diperoleh*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p < \frac{1}{2} \left(\|x\|^p + \|y\|^p \right)$$

Bukti.

Dari proposisi 3.1.1, $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$

$\left|\frac{1}{2}\right| \|x+y\| < \left|\frac{1}{2}\right| (\|x\| + \|y\|)$

$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < \frac{(\|x\|+\|y\|)}{2}$

$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p < \left(\frac{(\|x\|+\|y\|)}{2}\right)^p < \frac{(\|x\|^p+\|y\|^p)}{2} < \frac{1}{}\ 2\left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)$

Sehingga $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p < \frac{1}{2}\left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)$ □

3.2 Ketaksamaan Segitiga di Ruang Banach

Teorema 3.2.1. *Untuk semua elemen taknol $x_1, x_2, ..., x_n$ di ruang Banach X, berlaku ketaksamaan*

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \min_{1\le j\le n} \|x_j\| \le \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \le \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \max_{1\le j\le n} \|x_j\| \tag{3.2}$$

Bukti.

Akan dibuktikan ketaksamaan (3.1). Ambil $x_1, x_2, ..., x_n$ di Ruang Banach X sebarang, jika $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n||$, ketaksamaan pertama akan menjadi persamaan, jika $||x_i|| \neq ||x_j||$ dengan i,j=1,2,...,n maka untuk ketaksamaan (3.1) misal $\|x_{j0}\| = \min\{\|x_j\| : 1 \le j \le n\}$ dan $J_0 = \{j : \|x_j\| = \|x_{j0}\|, 1 \le j \le n\}$.

Maka diperoleh

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| = \left\|\sum_{j\in J_0} \frac{x_\mathrm{j}}{\|x_j\|} + \sum_{j\in J_0^c} \frac{x_\mathrm{j}}{\|x_j\|}\right\|$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_\mathrm{j}}{\|x_{j0}\|} - \sum_{j\in J_0^c} \frac{x_\mathrm{j}}{\|x_{j0}\|} + \sum_{j\in J_0^c} \frac{x_\mathrm{j}}{\|x_j\|}\right\|$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_{j0}\|} - \sum_{j\in J_0^c} \left(\frac{1}{\|x_{j0}\|} - \frac{1}{\|x_j\|} \right) x_j \right\|$$

$$\geq \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_{j0}\|} \right\| - \sum_{j\in J_0^c} \left(\frac{1}{\|x_{j0}\|} - \frac{1}{\|x_j\|} \right) \|x_j\| \tag{3.3}$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_{j0}\|} \right\| - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\|x_{j0}\|} - \frac{1}{\|x_j\|} \right) \|x_j\|$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_{j0}\|} \right\| - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\|x_j\|}{\|x_{j0}\|} - n \right)$$

sehingga

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\|x_j\|}{\|x_{j0}\|} \geq \frac{\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|}{\|x_{j0}\|} + \left(n - \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_j\|} \right\| \right)$$

karenanya diperoleh

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \geq \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| + \left(n - \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_j\|} \right\| \right) \|x_{j0}\|,$$

atau ketaksamaan (3.1)

Selanjutnya akan dibuktikan ketaksamaan (3.2). Ambil $x_1, x_2, ..., x_n$ di Ruang Banach X sebarang, jika $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n||$, ketaksamaan kedua akan menjadi persamaan, jika $||x_i|| \neq ||x_j||$ dengan i,j=1,2,...,n maka untuk ketaksamaan (3.2) misal $\|x_{j1}\| = \max\{\|x_j\| : 1 \leq j \leq n\}$ dan
$\mathrm{J}_1 = \{j : \|x_j\| = \|x_{j1}\|, 1 \leq j \leq n\}$. Maka diperoleh

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| = \left\| \sum_{j\in J_1} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_j\|} + \sum_{j\in J_1^c} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_j\|} \right\|$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_{j1}\|} - \sum_{j \in J_1^c} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_{j1}\|} + \sum_{j \in J_1^c} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_j\|} \right\|$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_{j1}\|} + \sum_{j \in J_1^c} \left(\frac{1}{\|x_j\|} - \frac{1}{\|x_{j1}\|} \right) x_j \right\|$$

$$\leq \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_{j1}\|} \right\| + \sum_{j \in J_1^c} \left(\frac{1}{\|x_j\|} - \frac{1}{\|x_{j1}\|} \right) \|x_j\| \tag{3.4}$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_{j1}\|} \right\| + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\|x_j\|} - \frac{1}{\|x_{j1}\|} \right) \|x_j\|$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_{j1}\|} \right\| + n - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\|x_j\|}{\|x_{j1}\|} \right)$$

dan karenanya

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| + \left(n - \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_j\|} \right\| \right) \|x_{j1}\|.$$

atau ketaksamaan (3.2) □

Teorema 3.2.2. *Untuk semua elemen taknol $x_1, x_2, ..., x_n$ di suatu ruang Banach X dengan $||x_1|| > ||x_2|| > ... > ||x_n||, n \geq 2$, berlaku ketaksamaan*

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| + \sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\| \sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) (\|x_k\| - \|x_{k+1}\|) \leq \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \tag{3.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| - \sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\| \sum_{j=n-(k-1)}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) (\|x_{n-k}\| - \|x_{n-(k-1)}\|) \tag{3.6}$$

dimana $x_0 = x_{n+1} = 0$.

Bukti.

Berdasarkan teorema 3.2.1, Ketaksamaan (3.5) dan (3.6) benar untuk kasus $n = 2$. Oleh karena itu misal $n \geq 3$. Pertama akan dibuktikan (3.5) dengan induksi. Asumsikan bahwa (3.5) benar untuk semua $n-1$ elemen di X. Misal $x_1, x_2, ..., x_n$ merupakan suatu n elemen di X dengan $||x_1|| > ||x_2|| > ...$
$> ||x_n|| > 0$. Misal

u$_j = (\|x_j\| - \|x_n\|) \frac{x_j}{\|x_j\|}$, untuk semua bilangan positif j dengan $1 \leq j \leq n$. Maka

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \|x_n\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} + \sum_{j=1}^{n-1} u_j \tag{3.7}$$

dan $||u_1|| > ||u_2|| > ... > ||u_{n-1}|| > 0$. Dengan asumsi,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n-1} u_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n-1} \|u_j\| - \sum_{j=2}^{n-1} \left(k - \left\| \sum_{j=1}^{k} \frac{u_j}{\|u_j\|} \right\| \right) (\|u_k\| - \|u_{k+1}\|) \tag{3.8}$$

benar, dimana $u_n = 0$. Karena $||u_k|| - ||u_{k+1}|| = ||x_k|| - ||x_{k+1}||$, dari (3.7) dan (3.8), diperoleh

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| = \left\| \|x_n\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} + \sum_{j=1}^{n-1} u_j \right\|$$

$$\leq \|x_n\| \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{n-1} u_j \right\|$$

$$\leq \|x_n\| \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| + \sum_{j=1}^{n-1} \|u_j\| - \sum_{k=2}^{n-1} \left(k - \left\| \sum_{j=1}^{k} \frac{u_j}{\|u_j\|} \right\| \right) (\|u_k\| - \|u_{k+1}\|)$$

$$= \|x_n\| \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| + \sum_{j=1}^{n-1} (\|x_j\| - \|x_n\|) - \sum_{k=2}^{n-1} \left(k - \left\| \sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) (\|x_k\| - \|x_{k+1}\|)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| - \sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\| \sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) (\|x_k\| - \|x_{k+1}\|)$$

dan didapat (3.5). Maka (3.5) benar untuk semua elemen terbatas di X. Kemudian akan ditunjukkan ketaksamaan (3.6). Misal

$$v_j = (\|x_1\| - \|x_{n-j+1}\|) \frac{x_{n-j+1}}{\|x_{n-j+1}\|}, \;\; 1 \leq j \leq n-1.$$

Kemudian

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \|x_1\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} - \sum_{j=1}^{n-1} v_j$$

dan $||v_1|| > ... > ||v_{n-1}|| > 0$. Mengaplikasikan ketaksamaan (3.5) ke $v_1, ..., v_{n-1}$,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| \geq \|x_1\| \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| - \left\| \sum_{j=1}^{n-1} v_j \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\geq \|x_1\| \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| - \sum_{j=1}^{n-1} \|v_j\| + \sum_{k=2}^{n-1} \left(k - \left\| \sum_{j=1}^{k} \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\| \right) (\|v_k\| - \|v_{k+1}\|) \\
&= \|x_1\| \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| - \sum_{j=1}^{n-1} (\|x_1\| - \|x_{n-j+1}\|) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n-1} \left(k - \left\| \sum_{j=1}^{k} \frac{x_{n-j+1}}{\|x_{n-j+1}\|} \right\| \right) (\|x_{n-k}\| - \|x_{n-k+1}\|) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| + \sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\| \sum_{j=n-(k-1)}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) (\|x_{n-k}\| - \|x_{n-k+1}\|) \,,
\end{aligned}$$

dimana $v_n = 0$. Maka diperoleh (3.6). $\square$

3.3 Persamaan di dalam Ruang Banach *Strictly Convex*

Lemma 3.3.1. *Misal X merupakan suatu ruang Banach strictly convex. Misal $x_1, x_2, ..., x_n$ merupakan elemen taknol di X. Maka yang berikut ini adalah ekivalen.*

(i) $\left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right\| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \|x_j\|$ *dengan suatu bilangan positif* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

(ii) $\left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right\| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \|x_j\|$ *dengan beberapa bilangan positif* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

(iii) $\frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{x_2}{\|x_2\|} = ... = \frac{x_n}{\|x_n\|}$.

Bukti.

Akan dibuktikan implikasi (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Asumsikan bahwa $\left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right\| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \|x_j\|$ dengan beberapa bilangan positif $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Maka untuk suatu $1 < k \leq n$

$$\begin{aligned}
\|\alpha_1 x_1 + \alpha_k x_k\| &\geq \left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right\| - \left\|\sum_{j\neq 1,k} \alpha_j x_j\right\| \\
&\geq \left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right\| - \sum_{j\neq 1,k} \alpha_j \|x_j\| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \|x_j\| - \sum_{j\neq 1,k} \alpha_j \|x_j\| \\
&= \alpha_1 \|x_1\| + \alpha_k \|x_k\|,
\end{aligned}$$

dimana $\|\alpha_1 x_1 + \alpha_k x_k\| = \alpha_1 \|x_1\| + \alpha_k \|x_k\|$. Karena X sebagai *strictly convex*, diperoleh $\frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{x_2}{\|x_2\|} = ... = \frac{x_n}{\|x_n\|}$. Kemudian asumsikan (iii) $\Rightarrow$ (i) dan misal

$$\frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{x_2}{\|x_2\|} = ... = \frac{x_n}{\|x_n\|} = y.$$

Maka untuk suatu bilangan positif $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ diperoleh

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \|x_j\| y\right\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \|x_j\|\right) \|y\| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \|x_j\|,$$

atau (i). Maka implikasi (i) $\Rightarrow$ (ii). □

Catatan 3.3.1. Misal $x_1, x_2, .., x_n$ merupakan elemen tak kosong di ruang Banach X.

Jika $\frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{x_2}{\|x_2\|} = ... = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, maka diperoleh

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\|} = \frac{x_1}{\|x_1\|}. \tag{3.9}$$

Tentu saja, karena $\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \frac{x_j}{\|x_j\|}$, diperoleh $\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$

dan karenanya (3.10). Oleh karena itu, jika X adalah *strictly convex* dan jika

$\left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right\| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \|x_j\|$ dengan beberapa bilangan positif $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, diperoleh

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j}{\left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right\|} = \frac{x_1}{\|x_1\|}. \tag{3.10}$$

Teorema 3.3.1. *Misal X merupakan ruang Banach strictly convex dan* $x_1, x_2, ...,$ x_n *elemen taknol di X.* $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n||$ *atau* $\frac{x_1}{||x_1||} = \frac{x_2}{||x_2||} = ... = \frac{x_n}{||x_n||}$ *jika dan hanya jika*

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \min_{1\leq j\leq n} \|x_j\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \tag{3.11}$$

Bukti.

(i) $\Rightarrow$

Pertama diketahui bahwa $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n|| = ||x_{j0}||$

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| &= \left\|\sum_{j\in J_0} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_j\|} + \sum_{j\in J_0^c} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_j\|}\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_{j0}\|} - \sum_{j\in J_0^c} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_{j0}\|} + \sum_{j\in J_0^c} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_j\|}\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_{\mathrm{j}}}{\|x_{j0}\|}\right\| = \frac{1}{\|x_{j0}\|}\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\|
\end{aligned}$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| \|x_{j0}\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\|$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| \|x_{j0}\| = 0$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| \|x_{j0}\| + n\|x_{j0}\| = n\|x_{j0}\|$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + n\|x_{j0}\| - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| \|x_{j0}\| = \|x_{j0}\| + \|x_{j0}\| + ... + \|x_{j0}\|$$

karena $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n|| = ||x_{j0}||$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \|x_{j0}\| = \|x_1\| + \|x_2\| + ... + \|x_n\|$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \|x_{j0}\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

diperoleh persamaan (3.11) dengan $\|x_{j0}\| = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \|x_j\|$

Kedua diketahui bahwa $\frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{x_2}{\|x_2\|} = ... = \frac{x_n}{\|x_n\|} = \frac{x_{j0}}{\|x_{j0}\|} = y$ sehingga

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| &= \left\|\frac{x_1}{\|x_1\|} + \frac{x_2}{\|x_2\|} + ... + \frac{x_n}{\|x_n\|}\right\| \\
&= \left\|\frac{x_{j0}}{\|x_{j0}\|} + \frac{x_{j0}}{\|x_{j0}\|} + ... + \frac{x_{j0}}{\|x_{j0}\|}\right\| \\
&= \left\|\frac{x_{j0} + x_{j0} + ... + x_{j0}}{\|x_{j0}\|}\right\| \\
&= \left\|\frac{n\, x_{j0}}{\|x_{j0}\|}\right\| = n \left\|\frac{x_{j0}}{\|x_{j0}\|}\right\| = n
\end{aligned}$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \|x_j\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + (n - n) \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \|x_j\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

Perhatikan dari Lemma 3.3.1

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|\, y\right\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|\right) \|y\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

$\square$

(ii) $\Leftarrow$

Dengan kontraposisi

Jika $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n||$ dan $\frac{x_1}{||x_1||} = \frac{x_2}{||x_2||} = ... = \frac{x_n}{||x_n||}$ tidak terpenuhi, maka seperti yang sudah dibuktikan di teorema 3.2.1 pada ketaksamaan (3.1) yaitu

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \min_{1\le j\le n} \|x_j\| < \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

Sehingga persamaan (3.11) tidak terpenuhi. □

Teorema 3.3.2. *Misal X merupakan ruang Banach strictly convex dan $x_1, x_2, ...,$ x_n elemen taknol di X. $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n||$ atau $\frac{x_1}{||x_1||} = \frac{x_2}{||x_2||} = ... = \frac{x_n}{||x_n||}$ jika dan hanya jika*

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \max_{1\le j\le n} \|x_j\| \tag{3.12}$$

Bukti.

(i) $\Rightarrow$

Pertama diketahui bahwa $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n|| = ||x_{j1}||$

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| &= \left\|\sum_{j\in J_1} \frac{x_j}{\|x_j\|} + \sum_{j\in J_1^c} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| \\ &= \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_{j1}\|} - \sum_{j\in J_1^c} \frac{x_j}{\|x_{j1}\|} + \sum_{j\in J_1^c} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| \\ &= \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_{j1}\|}\right\| = \frac{1}{\|x_{j1}\|} \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\|\end{aligned}$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| \|x_{j1}\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\|$$

$$0 = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| - \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \|x_{j1}\|$$

$$n\,\|x_{j1}\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| - \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \|x_{j1}\| + n\,\|x_{j1}\|$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| + n\,\|x_{j1}\| - \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \|x_{j1}\|$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| + \left(n - \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) \|x_{j1}\|$$

$$\|x_{j1}\| + \|x_{j1}\| + ... + \|x_{j1}\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| + \left(n - \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) \|x_{j1}\|$$

karena $\|x_1\| = \|x_2\| = ... = \|x_n\| = \|x_{j1}\|$ diperoleh

$$\|x_1\| + \|x_2\| + ... + \|x_n\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| + \left(n - \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) \|x_{j1}\|$$

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| + \left(n - \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) \|x_{j1}\|$$

diperoleh persamaan (3.12) dengan $\|x_{j1}\| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \|x_j\|$

Kedua diketahui bahwa $\frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{x_2}{\|x_2\|} = ... = \frac{x_n}{\|x_n\|} = \frac{x_{j1}}{\|x_{j1}\|} = y$ sehingga

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| = \left\| \frac{x_1}{\|x_1\|} + \frac{x_2}{\|x_2\|} + ... + \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\|$$

$$= \left\| \frac{x_{j1}}{\|x_{j1}\|} + \frac{x_{j1}}{\|x_{j1}\|} + ... + \frac{x_{j1}}{\|x_{j1}\|} \right\|$$

$$= \left\| \frac{x_{j1} + x_{j1} + ... + x_{j1}}{\|x_{j1}\|} \right\|$$

$$= \left\| \frac{n\,x_{j1}}{\|x_{j1}\|} \right\| = n \left\| \frac{x_{j1}}{\|x_{j1}\|} \right\| = n$$

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|x_j\|$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + (n-n) \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|x_j\|$$

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\|$$

Perhatikan dari Lemma 3.3.1

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|\right) \|y\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \, y\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\|$$

$\square$

(ii) $\Leftarrow$

Dengan kontraposisi

Jika $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n||$ dan $\frac{x_1}{||x_1||} = \frac{x_2}{||x_2||} = ... = \frac{x_n}{||x_n||}$ tidak terpenuhi, maka seperti yang sudah dibuktikan di teorema 3.2.1 pada ketaksamaan (3.2) yaitu

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| < \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \max_{1\leq j\leq n} \|x_j\|$$

Sehingga persamaan (3.12) tidak terpenuhi. $\square$

Teorema 3.3.3. *Untuk semua elemen taknol $x_1, x_2, ..., x_n$ di suatu ruang Banach X dengan $n \geq 2$, $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n||$ atau $\frac{x_1}{||x_1||} = \frac{x_2}{||x_2||} = ... = \frac{x_n}{||x_n||}$ jika dan hanya jika*

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\|\sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) (\|x_k\| - \|x_{k+1}\|) = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \qquad (3.13)$$

Bukti.

(i) $\Rightarrow$

Pertama diketahui bahwa $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n|| = x$ berlaku

$$\sum_{k=2}^{n}\left(k - \left\|\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)(\|x_k\| - \|x_{k+1}\|) = \left(2 - \left\|\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)(\|x_2\| - \|x_3\|) + ...$$

$$+ \left((n-1) - \left\|\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)(\|x_{n-1}\| - \|x_n\|)$$

$$+ \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)(\|x_n\| - \|x_{n+1}\|)$$

$$= \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)\|x_n\|$$

sehingga

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + n\|x_n\| - \|x_n\|\left\|\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| = \sum_{j=1}^{n}\|x_j\|$$

karena $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n|| = x$ maka

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| = \left\|\frac{x_1}{x} + \frac{x_2}{x} + ... + \frac{x_n}{x}\right\| = \left\|\frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)}{x}\right\|$$

$$= \frac{1}{x}\|x_1 + x_2 + ... + x_n\| = \frac{1}{x}\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\|$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + n\|x_n\| - x\frac{1}{x}\sum_{j=1}^{n}\|x_j\| = n\|x_n\|$$

$$= \|x_n\| + \|x_n\| + ... + \|x_n\|$$

$$= \|x_1\| + \|x_2\| + ... + \|x_n\|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

Kedua diketahui bahwa $\frac{x_1}{||x_1||} = \frac{x_2}{||x_2||} = ... = \frac{x_n}{||x_n||}$

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| + \sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\| \sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) (\|x_k\| - \|x_{k+1}\|) = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

$$\sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\| \sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) (\|x_k\| - \|x_{k+1}\|) = 0 \Leftrightarrow$$

$\frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{x_2}{\|x_2\|} = ... = \frac{x_n}{\|x_n\|} = y$

diperoleh

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| + 0 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

Perhatikan dari Lemma 3.3.1

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \, y \right\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \right) \|y\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

$\square$

(ii) $\Leftarrow$

Dengan kontraposisi

Jika $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n||$ dan $\frac{x_1}{||x_1||} = \frac{x_2}{||x_2||} = ... = \frac{x_n}{||x_n||}$ tidak terpenuhi, maka seperti yang sudah dibuktikan di teorema 3.2.2 pada ketaksamaan (3.5) yaitu

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| + \sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\| \sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) (\|x_k\| - \|x_{k+1}\|) < \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

Sehingga persamaan (3.13) tidak terpenuhi. $\square$

Teorema 3.3.4. *Untuk semua elemen taknol* $x_1, x_2, ..., x_n$ *di suatu ruang Banach* X *dengan* $n \geq 2$, $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n||$ *atau* $\frac{x_1}{||x_1||} = \frac{x_2}{||x_2||} = ... = \frac{x_n}{||x_n||}$ *jika dan hanya jika*

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| - \sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\| \sum_{j=n-(k-1)}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) \left(\|x_{n-k}\| - \left\|x_{n-(k-1)}\right\| \right) \tag{3.14}$$

Bukti.

(i) $\Rightarrow$

Pertama diketahui bahwa $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n|| = x$ berlaku

$$\sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\| \sum_{j=n-(k-1)}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) \left(\|x_{n-k}\| - \left\|x_{n-(k-1)}\right\| \right) =$$

$$\left(2 - \left\| \sum_{j=n-(2-1)}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) \left(\|x_{n-2}\| - \|x_{n-1}\| \right) + ...$$

$$+ \left((n-1) - \left\| \sum_{j=n-((n-1)-1)}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) \left(\left\|x_{n-(n-1)}\right\| - \left\|x_{n-(n-1)+1}\right\| \right)$$

$$+ \left(n - \left\| \sum_{j=n-(n-1)}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) \left(\|x_{n-n}\| - \|x_{n-n+1}\| \right)$$

$$= \left(n - \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) \left(- \|x_1\| \right)$$

diperoleh

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| - \sum_{k=2}^{n}\left(k - \left\|\sum_{j=n-(k-1)}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)\left(\|x_{n-k}\| - \left\|x_{n-(k-1)}\right\|\right)$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)\|x_1\|$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + n\|x_1\| - \|x_1\|\left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + n\|x_1\| - y\left\|\frac{x_1}{y} + \frac{x_2}{y} + ... + \frac{x_n}{y}\right\|$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + n\|x_1\| - y\left\|\frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)}{y}\right\|$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + n\|x_1\| - y\frac{1}{y}\|x_1 + x_2 + ... + x_n\|$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + n\|x_1\| - y\frac{1}{y}\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\|$$

$$= n\|x_1\| = \|x_1\| + \|x_1\| + ... \|x_1\|$$

$$= \|x_1\| + \|x_2\| + ... \|x_n\|$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\|x_j\|$$

Kedua diketahui bahwa $\frac{x_1}{||x_1||} = \frac{x_2}{||x_2||} = ... = \frac{x_n}{||x_n||}$

$$\sum_{j=1}^{n}\|x_j\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| - \sum_{k=2}^{n}\left(k - \left\|\sum_{j=n-(k-1)}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)\left(\|x_{n-k}\| - \left\|x_{n-(k-1)}\right\|\right)$$

$$\sum_{k=2}^{n}\left(k - \left\|\sum_{j=n-(k-1)}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)\left(\|x_{n-k}\| - \left\|x_{n-(k-1)}\right\|\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{x_2}{\|x_2\|} = ... = \frac{x_n}{\|x_n\|} = y$$

Jadi

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|$$

Perhatikan dari Lemma 3.3.1

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \right) \|y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \, y \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|$$

□

(ii) $\Leftarrow$

Dengan kontraposisi

Jika $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n||$ dan $\frac{x_1}{||x_1||} = \frac{x_2}{||x_2||} = ... = \frac{x_n}{||x_n||}$ tidak terpenuhi, maka seperti yang sudah dibuktikan di teorema 3.2.2 pada ketaksamaan (3.6) yaitu

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| < \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| - \sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\| \sum_{j=n-(k-1)}^{k} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) \left(\|x_{n-k}\| - \left\| x_{n-(k-1)} \right\| \right)$$

Sehingga persamaan (3.14) tidak terpenuhi. □

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Beberapa kesimpulan yang dapat diambil dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Ruang Banach adalah ruang norma yang lengkap, artinya setiap barisan Cauchy di suatu ruang Banach konvergen ke suatu titik di ruang Banach tersebut.

2. Di dalam ruang Banach juga terdapat ketaksamaan segitiga, dengan syarat-syarat tertentu diperoleh persamaan dari ketaksamaan segitiga tersebut di ruang Banach *strictly convex.* Ada dua ketaksamaan segitiga yang dibahas di ruang Banach. Dua ketaksamaan segitiga tersebut:

   Ketaksamaan segitiga yang pertama yaitu: untuk semua elemen taknol $x_1, x_2, ..., x_n$ di ruang Banach X, berlaku ketaksamaan

   $$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \min_{1\leq j\leq n} \|x_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

   $$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \leq \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \max_{1\leq j\leq n} \|x_j\|$$

   dan

   ketaksamaan segitiga yang kedua yaitu: untuk semua elemen taknol $x_1, x_2, ...,$ x_n di suatu ruang Banach X dengan $||x_1|| > ||x_2|| > ... > ||x_n||, n \geq 2$, berlaku ketaksamaan

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \sum_{k=2}^{n}\left(k - \left\|\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)(\|x_k\| - \|x_{k+1}\|) \leq \sum_{j=1}^{n}\|x_j\|$$

$$\sum_{j=1}^{n}\|x_j\| \leq \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| - \sum_{k=2}^{n}\left(k - \left\|\sum_{j=n-(k-1)}^{k}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)\left(\|x_{n-k}\| - \left\|x_{n-(k-1)}\right\|\right)$$

Kemudian diperoleh persamaan dari ketaksamaan segitiga di ruang Banach *strictly convex*:

Persamaan yang diperoleh dari ketaksamaan segitiga yang pertama, yaitu: misal X merupakan ruang Banach *strictly convex* dan $x_1, x_2, ..., x_n$ elemen taknol di X. $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n||$ atau $\frac{x_1}{||x_1||} = \frac{x_2}{||x_2||} = ... = \frac{x_n}{||x_n||}$ jika dan hanya jika

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)\min_{1\leq j\leq n}\|x_j\| = \sum_{j=1}^{n}\|x_j\|$$

$$\sum_{j=1}^{n}\|x_j\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)\max_{1\leq j\leq n}\|x_j\|$$

dan

persamaan yang diperoleh dari ketaksamaan segitiga yang kedua, yaitu: untuk semua elemen taknol $x_1, x_2, ..., x_n$ di suatu ruang Banach X dengan n≥ 2, $||x_1|| = ||x_2|| = ... = ||x_n||$ atau $\frac{x_1}{||x_1||} = \frac{x_2}{||x_2||} = ... = \frac{x_n}{||x_n||}$ jika dan hanya jika

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \sum_{k=2}^{n}\left(k - \left\|\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)(\|x_k\| - \|x_{k+1}\|) = \sum_{j=1}^{n}\|x_j\|$$

$$\sum_{j=1}^{n}\|x_j\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| - \sum_{k=2}^{n}\left(k - \left\|\sum_{j=n-(k-1)}^{n}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)\left(\|x_{n-k}\| - \left\|x_{n-(k-1)}\right\|\right)$$

4.2 Saran

Penulis menyarankan kepada pembaca yang tertarik untuk:

1. Membahas ruang Banach dengan skalar bilangan kompleks ($\mathbb{C}$).
2. Membahas hal-hal yang berkaitan dengan ruang Banach, misalnya operator di ruang Banach, Teorema Hahn-Banach, Teorema Banach-Steinhaus, Teorema Krein-Milman, Ruang Hilbert, Ruang Banach Revlexive, Ruang Banach Separable, Ruang Banach ℓ_p dan c_0, Ruang Banach L_p, dan geometri di ruang Banach.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard, *Aljabar Linier Elementer*, Erlangga, Bandung, Edisi Ketiga, 1991.

Beauzamy, Bernard, *Introduction to Banach Spaces and Their Geometry*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982.

Gozali, Sumanang Muhtar, *Pengantar Analisis Fungsional*, Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung, 2010.

K.-I. Mitani dan K.-S. Saito, On Sharp Triangle Inequalities in Banach Spaces II, *Hindawi Publishing Company Journal of Inequalities and Applications*, Vol 2010, 2010.

Lipschutz, Seymour, *Theory and Problems of General Topology*, Schaum Publishing Company, New York, 1965.

M. Kato, K.-S. Saito, and T. Tamura, Sharp triangle inequality and its reverse in Banach spaces, *Mathematical Inequalities Applications*, vol. 10, no. 2, pp. 451460, 2007.

Morrison, Terry J, *An Introduction to Banach Spaces Theory*, John Wiley Sons, Inc, Toronto, 2001.

Rudin, Walter, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw Hill, Tokyo, Third Edition, 1976.

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama	:	Sarkumanto Mohamad Priagus
No. Registrasi	:	3125041586
Jurusan	:	Matematika
Program Studi	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul "**Ketaksamaan Segitiga di Ruang Banach Strictly Cembung (*Strictly Convex*)**" adalah :

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, 29 Juli 2011

Yang membuat pernyataan

Sarkumanto Mohamad Priagus

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Sarkumanto Mohamad Priagus. Lahir di Purwokerto pada tanggal 10 Juni 1985. Anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Soetanto (Alm) dan Ibu Tarmini.

Riwayat Pendidikan. Pendidikan formal yang pernah ditempuh adalah Pada tahun 1991 masuk sekolah dasar di SD Negeri Kenari 03 Pagi, lulus pada tahun 1997, yang selanjutnya melanjutkan ke sekolah menengah pertama di SLTP Negeri 1 Jakarta, namun pada tahun 1998 pindah ke SLTP Islam An-nur Bekasi dan lulus pada tahun 2001. Berikutnya melanjutkan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 10 Bekasi dan lulus pada tahun 2004, yang kemudian di tahun yang sama melanjutkan pendidikannya di Perguruan Tinggi Negeri di Universitas Negeri Jakarta Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan jurusan dan program studi Matematika.

Bagi pembaca yang ingin menghubungi penulis silakan email ke:
sarkumanto@yahoo.co.id.