Analisis Penentuan Portofolio Optimal pada *Quadratic Programming* dengan Menggunakan Metode *Wolfe*

Skripsi

Disusun untuk melengkapi syarat-syarat

guna memperoleh gelar Sarjana Matematika

RIDHA HASTI PUTRI

3125153116

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA

2021

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

Analisis Penentuan Portofolio Optimal pada *Quadratic Programming* dengan Menggunakan Metode *Wolfe*

Nama : Ridha Hasti Putri

No. Registrasi : 3125153116

	Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab			
Dekan	: Dr. Muktiningsih, M.Si. NIP. 19640511 198903 2 001	....	13-1-2022
Wakil Penanggung Jawab			
Wakil Dekan I	: Dr. Esmar Budi, S.Si., MT. NIP. 19720728 199903 1 002	....	12-1-2022
Ketua	: Ir. Fariani Hermin Indiyah, MT. NIP. 19600211 198703 2 001	....	7-1-2022
Sekretaris	: Ibnu Hadi, M.Si. NIP. 19810718 200801 1 017	....	10-1-2022
Penguji	: Dr. Yudi Mahatma, M.Si. NIP. 19761020 200812 1 001	....	7-1-2022
Pembimbing I	: Drs. Sudarwanto, M.Si, DEA. NIP. 19650325 199303 1 003	....	11-1-2022
Pembimbing II	: Dr. Eti Dwi Wiraningsih, S.Pd, M.Si. NIP. 19810203 200604 2 001	....	10-1-2022

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal: 17 Desember 2021

ABSTRACT

RIDHA HASTI PUTRI, 3125153116. Optimum Portfolio Analysis of Qudratic Programming with Wolfe Method . Thesis. Faculty of Mathematics and Natural Science Jakarta State University. 2021.

Stocks are one of investment that have great demand. The formation of a stock portfolio is something that should be done to increase the return value and minimize the risk. The formation of a stock portfolio requires the Markowitz's theory. The Markowitz theory deals with the return, expected return and variances that prossessed from weekly stock closing price data. In this case, the data taken are two samples of stocks that have the best expected return value which included in the INFOBANK15 index, namely Bank Pan Indonesia (PNBN) and Bank Central Asia Tbk (BBCA) for the period January 1, 2019 to December 31, 2019. Furthermore, the value of return, expected return and the variance obtained will be formed into a quadratic programming problem using optimum portfolio theory. Quadratic programming in the form of an objective function and a constraint function is then adjusted to the Karush Kuhn Tucker's condition. So, new conditions can be formed by adding artificial variable and then resolved using the Wolfe's method. The final result obtained is in the form of a decimal which is a percentage share of the invested, i.e. 23,57% for Bank Pan Indonesia (PNBN) and 76,4% for Bank Central Asia Tbk (BBCA) with an expected value of return on investment for one year is 52%.

Keywords *: Markowitz's theory, Stock portfolio, Optimum portfolio, Quadratic Programming, Karush Kuhn Tucker's condition, Wolfe's method.*

ABSTRAK

RIDHA HASTI PUTRI, 3125153116. Analisis Penentuan Portofolio Optimal pada *Quadratic Programming* dengan Menggunakan Metode *Wolfe*. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. 2021.

Saham merupakan salah satu investasi yang banyak diminati. Pembentukan portofolio saham merupakan sesuatu yang dilakukan untuk meningkatkan nilai *return* serta meminimumkan risiko. Pembentukan portofolio saham membutuhkan teori *Markowitz*. Teori *Markowitz* berkaitan dengan nilai *return*, *expected return* dan varians yang diproses dari dari data harga penutupan saham mingguan. Dalam penelitian ini, data yang diambil merupakan dua sampel saham yang memiliki nilai *expected return* terbaik yang tergabung dalam indeks INFOBANK15, yakni saham Bank Pan Indonesia (PNBN) dan Bank Central Asia Tbk (BBCA) untuk periode 1 Januari 2019 sampai dengan 31 Desember 2019. Selanjutnya, nilai *return*, *expected return* dan varians yang diperoleh dibentuk menjadi permasalahan pemrograman kuadratik menggunakan teori portofolio optimum. Pemrograman kuadratik yang berbentuk fungsi tujuan dan fungsi kendala selanjutnya disesuaikan dengan kondisi *Karush Kuhn Tucker*. Sehingga, dapat dibentuk kondisi baru dengan menambahkan *artificial variable* kemudian diselesaikan dengan menggunakan metode *Wolfe*. Hasil akhir yang didapat berbentuk desimal yang merupakan presentase bagian saham yang diinvestasikan, yakni sebesar 23,57% untuk saham Bank Pan Indonesia (PNBN) dan 76,4% untuk saham bank Bank Central Asia Tbk (BBCA) dengan ekspektasi nilai pengembalian dana investasi selama satu tahun sebesar 52%.

Kata kunci : teori *Markowitz*, portofolio saham, portofolio optimum, program kuadratik, kondisi *Karush Kuhn Tucker*, metode *Wolfe*.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT atas pengetahuan dan kesabaran sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Analisis Penentuan Portofolio Optimal pada *Quadratic Programming* dengan Menggunakan Metode *Wolfe*" yang merupakan salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Program Studi Matematika Universitas Negeri Jakarta.

Skripsi ini berhasil diselesaikan tidak terlepas dari adanya bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin menyampaikan terima kasih terutama kepada:

1. Allah SWT dan Rasulullah SAW atas berkah dan petunjuk dalam hidup ini

2. Bapak Drs. Sudarwanto, M.Si, DEA. selaku Dosen Pembimbing 1 yang telah membimbing serta mengarahkan untuk menyelesaikan skripsi ini.

3. Dr. Eti Dwi Wiraningsih, S.Pd, M.Si. selaku Dosen Pembimbing 2 yang telah membimbing serta mengarahkan untuk menyelesaikan skripsi ini.

4. Ibu Dr. Lukita Ambarwati, S.Pd, M. Si. selaku Koordinator Program Studi Matematika yang telah memberikan segala bantuan untuk menyelesaikan skripsi ini.

5. Keluarga penulis, terkhusus kedua orang tua dan adik.

6. Sahabat-sahabat seperjuangan yakni Dewi Tarida Elfryana, Hasna Samiya Rochani, Destriani Natalia Sianipar, Alfredo Cardo dan yang telah berjuang bersama dari awal kuliah sampai saat ini.

7. Seluruh teman-teman di Program Studi Matematika 2015.

8. Tenggleng sebagai pelipur lara dikala mengerjakan skripsi.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa makalah ini masih belum sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun akan sangat berarti. Semoga makalah ini dapat berguna dan memberikan sumbangan yang bermanfaat bagi pembaca sekalian.

Bekasi, 17 Desember 2021

Ridha Hasti Putri

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sifat tidak pernah puas pada manusia memberikan dorongan agar selalu ingin memiliki lebih terhadap hal-hal yang telah ia miliki. Tak terkecuali dalam bidang ekonomi maupun harta (aset). Dalam hal ini, manusia akan terus melalukan aktivitas ekonomi agar dapat memperbanyak jumlah aset mereka. Terdapat berbagai macam cara untuk memperbanyak harta yang telah dimiliki oleh seseorang. Salah satu caranya ialah dengan melakukan investasi. Menurut Sunariyah (2004) dalam buku *Pengantar Pengetahuan Pasar Modal*, kegiatan penanaman modal dalam jangka waktu tertentu pada suatu aset dengan harapan mendapat keuntungan disebut sebagai investasi. Sehingga, dapat dikatakan bahwa investasi merupakan salah satu cara seseorang untuk menyalurkan asetnya dengan mempertimbangkan risiko tertentu agar mendapatkan keuntungan.

Investasi dapat dilakukan pada dua bentuk aset, yakni aset riil dan aset finansial. Investasi pada aset riil merupakan investasi pada aset berwujud yang dapat dilihat dan dirasakan secara langsung, sebagai contoh ialah dengan membuka lahan pertambangan, mendirikan pabrik, membuat perkebunan dan ladang serta pembelian aset produktif dan sebagainya. Aset produktif yang dimaksud merupakan aset-aset yang dapat memberikan keuntungan, seperti *property*, emas, mesin pabrik, dan sebagainya. Sedangkan jenis investasi finansial merupakan investasi yang berkenaan dengan perdagangan di pasar uang maupun pasar modal.

Pasar Uang sendiri sering menjadi tempat bertemunya *investor* dengan *consumer* yang dapat dilakukan secara langsung, tanpa melalui perantara (*broker*) secara individu maupun koorporasi. Pasar uang kerap kali dikatakan sebagai pasar abstrak karena mengadakan transaksi terhadap sesuatu yang tidak berwujud. Beberapa produk yang biasa diperjual-belikan adalah *commercial paper*, surat-surat berharga, sertifikat deposito dan sebagainya. Sedangkan pasar modal merupakan tempat yang menghubungkan *investor* dengan suatu institusi atau perusahaan yang membutuhkan dana melalui perdagangan instrumen jangka panjang. Beberapa bentuk produk yang diperjual-belikan di pasar modal ialah berupa saham, obligasi, *right issue* dan sebagainya, dimana instrumen saham merupakan salah satu yang memiliki tingkat pengembalian cukup tinggi.

Investasi saham adalah investasi pasar modal yang cukup berisiko tetapi dapat memberikan keuntungan cukup tinggi. Investasi ini bersifat dinamis atau tidak stabil dan sangat dipengaruhi oleh gejolak ekonomi yang sedang terjadi. Beberapa faktor yang dapat mempengaruhi investasi saham ialah keadaan ekonomi suatu negara, fluktuasi kurs, kondisi perusahaan (yang sahamnya diperjualbelikan), serta penawaran dan permintaan harga saham di pasar modal. Namun, walaupun memiliki tingkat risiko yang cukup besar, investasi saham tetap menarik minat dan menjadi pilihan para investor.

Investasi saham memiliki banyak risiko dan pengaruh eksternal, sehingga membutuhkan pengetahuan serta kemampuan yang cukup memadai agar bisa bertahan dan memperoleh keuntungan. Sebagian besar investor yang melakukan investasi saham, biasanya tidak akan menginvestasikan modal pada satu jenis saham saja, melainkan pada berbagai macam jenis saham berbeda yang memiliki kriteria tertentu dan diprediksi dapat memberikan keuntungan cukup besar. Gabungan atau kombinasi dari beberapa jenis saham tersebut nantinya akan disebut sebagai portofolio saham. Melakukan pembentukan portofolio saham bertujuan untuk meminimalkan risiko kerugian akibat kemungkinan adanya penurunan harga pada beberapa saham.

Pemilihan portofolio saham harus dilakukan secara optimal agar memperoleh return ekspektasi (*expected return*) yang maksimum dengan tingkat risiko minimum. Salah satu bidang matematika yang dapat memberikan solusi untuk melakukan pemilihan portofolio yang optimal, ialah metode pemrograman kuadratik. Penelitian sebelumnya yang telah membahas mengenai pemilihan portofolio saham dengan menggunakan metode pemrograman kuadratik ialah Nia Christie N. (2014) yang membahas mengenai "*Aplikasi Metode Kuhn-Tucker untuk Menentukan Portofolio Optimal* dan Fablo Silva Dias yang membahas mengenai "*Quadratic Programming Applied to Modern Portofolio Selection*". Berangkat dari hal tersebut, maka penulis ingin untuk membahas lebih detail dengan memberikan contoh serta studi kasus mengenai aplikasi metode *Wolfe* yang merupakan salah satu metode optimasi nonlinear pada model permasalahan pemrograman kuadratik untuk diterapkan sebagai model pemilihan portofolio optimal.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah-masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini, ialah:

1. Bagaimana bentuk penyelesaian pemrograman kuadratik metode *Wolfe*?
2. Bagaimana model matematika portofolio saham optimal?
3. Bagaimana cara memilih portofolio optimal dengan menggunakan metode *Wolfe*?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini akan berfokus pada masalah bentuk model portofolio saham akan terbatas pada model portofolio saham sederhana yang menggunakan *historical prices*.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk:

1. Mengetahui model penyelesaian pemrograman kuadratik dengan metode *Wolfe*.
2. Mendapatkan bentuk model matematika dari suatu portofolio saham agar mendapatkan nilai yang optimal.
3. Memperoleh pilihan portofolio saham yang optimal dengan mengaplikasikan metode *Wolfe*.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini memiliki manfaat bagi:

1. Peneliti lain:
   sebagai tambahan wawasan mengenai pasar modal, khususnya investasi saham terutama pada pengoptimasian portofolio saham dengan menggunakan metode *Wolfe*.
2. Investor pemula:
   sebagai tambahan wawasan sekaligus bahan pertimbangan sebelum membentuk portofolio saham optimal.

3. Pihak lain:

   sebagai tambahan wawasan dalam bidang matematika ekonomi, khususnya pembentukan portofolio saham.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini memakai metode kajian teori dalam bidang pemrograman (nonlinear) kuadratik dengan menggunakan metode *Wolfe* serta analisis teori portofolio, khususnya portofolio optimal yang bersumber pada jurnal dan buku di bidang matematika ekonomi.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai teori portofolio pada investasi saham serta proses optimasi yang meliputi pemrograman linear maupun nonlinear. Sehingga, lebih lanjut akan dijelaskan mengenai portofolio optimal, pemrograman kuadratik dan metode *Wolfe*.

2.1 Portofolio

Menurut Husnan (2003), portofolio dapat diartikan sebagai sekumpulan investasi. Sehingga secara umum, portofolio merupakan kumpulan aset investasi yang dimiliki perseorangan atau perusahaan. Pembentukan portofolio bertujuan untuk mengoptimalkan keuntungan serta mengurangi risiko kerugian akibat adanya penurunan harga aset dengan cara melakukan diversifikasi atau pengalokasian dana investasi pada beberapa instrumen. Pada kasus investasi saham, melakukan pembentukan portofolio dengan cara diversifikasi merupakan hal yang umum. Sebab ketika terjadi penurunan harga pada salah satu aset saham yang dimiliki maka kerugiannya dapat diminimalisir oleh aset-aset saham lain yang mengalami kenaikan harga.

Teori portofolio *Markowitz* merupakan teori portofolio yang banyak digunakan. Teori ini berfokus untuk meminimumkan nilai risiko melalui diversifikasi menggunakan pendekatan rata-rata (*mean*) dan varian (*variance*), dimana *mean* akan menunjukkan pengukuran tingkat pengembalian (*return*) dan varian akan menunjukkan pengukuran tingkat risiko.

2.1.1 *Return* Portofolio

Pendapatan keuntungan atau *return* maksimum dari sebuah investasi merupakan tujuan setiap investor. Menurut Mamduh M. Hanafi dan Abdul Halim, *return* atau pendapatan saham merupakan perubahan nilai harga saham periode sekarang (t) dengan periode sebelumnya ($t-1$), dimana perubahan harga saham berbanding lurus dengan *return* saham yang dihasilkan.

Return terbagi menjadi dua jenis yaitu realisasi pengembalian (*realized return*) dan ekspektasi pengembalian (*expected return*). *Realized return* sendiri adalah *return* yang telah terjadi dan dihitung berdasarkan data historis. Nilai *Realized return* biasa dipakai sebagai dasar pengukuran kinerja perusahaan, serta sebagai dasar penentuan *expected return* dan risiko di masa mendatang. Sedangkan *expected return* merupakan nilai *return* yang diharapkan terjadi di masa mendatang dan bersifat tidak pasti (belum terjadi).

Return dan *expected return* saham biasa dihitung berdasarkan data historis harga penutupannya dengan bentuk sebagai berikut:

$$R_i = \frac{P_{i(t+1)} - P_{i(t)}}{P_{i(t)}} \tag{2.1}$$

dan

$$E(R_i) = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_{i(t)}}{n} \tag{2.2}$$

dimana:

R_i	:	*Return* saham i
$P_{i(t)}$	:	Harga penutupan saham i pada periode t (sebelumnya)
$P_{i(t+1)}$	:	Harga penutupan saham i pada periode t+1 (sekarang)
$E(R_i)$	:	*Expected return* saham i
$R_{i(t)}$	:	*Return* saham i pada periode t

n : Banyaknya periode return

i : Index saham

t : Periode saham

Maka, *return* dan *expected return* portofolio biasa dihitung berdasarkan data historis harga penutupannya dengan bentuk sebagai berikut:

$$R_p = \sum_{i=1}^{m} x_i.R_i \tag{2.3}$$

dan

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{m} E[x_i.R_i] = x_i.E(R_i) \tag{2.4}$$

dimana:

R_p : *Realized return* portofolio

$E(R_p)$: *Expected return* portofolio

x_i : Nilai proporsi dari aset/saham i

m : Banyak saham

i : Index saham, $i \in \mathbb{N}$ (i=1,2,...,n)

Contoh 2.1.1. Data dari sebuah portofolio saham ditunjukkan pada tabel di bawah ini:

Tabel 2.1: Tabel saham perusahaan A, B dan C

Saham Perusahaan	*Expected return*	Nilai Investasi
A	20%	150.000
B	25%	100.000
C	40%	250.000

Maka *expected return* dari portofolio tersebut:

$$\begin{aligned} E(R_p) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i.E(R_i)) \\ &= (x_A.E(R_A))(x_B.E(R_B)) + (x_C.E(R_C)) \\ &= \tfrac{150.000}{500.000}.0,2 + \tfrac{100.000}{500.000}.0,25 + \tfrac{250.000}{500.000}.0,4 \\ &= 0,31 \end{aligned}$$

2.1.2 Risiko Portofolio

Risiko adalah akibat atau konsekuensi yang mungkin terjadi akibat sebuah proses yang sedang berlangsung maupun kejadian yang akan datang. Risiko cukup erat kaitannya dengan ketidakpastian. Ketidakpastian yang mengarah pada keuntungan biasa disebut dengan peluang (*opportunity*), sedangkan yang sifatnya dapat menimbulkan kerugian dikenal dengan risiko (*risk*).

Pada tahun 2007, Jones menyatakan bahwa risiko merupakan selisih atau penyimpangan antara tingkat pengembalian (*actual return*) (R_p) dengan ekspektasi pengembalian (*expected return*) ($E(R_p)$). Hal tersebut sesuai dengan isi dari *Journal of Finance* volume 46 yang ditulis oleh Harry M. Markowitz (1991) dengan judul "*Foundations of Portfolio Theory*", dimana risiko dapat dituliskan menjadi:

$$Risiko = E(Min\{0, (R_P - E(R_p))^2\}) \tag{2.5}$$

Menurut Husnan (2003) ukuran penyebaran distribusi dapat dipakai untuk mengetahui ukuran risiko dengan mengukur seberapa jauh kemungkinan nilai yang diperoleh akan menyimpang dari nilai yang diharapkan. Dengan demikian, risiko portofolio akan dipengaruhi oleh rata-rata tertimbang atas masing-masing risiko aset individual, nilai kekuatan serta arah hubungan linier antar aset (varians dan kovarians) yang membentuk portofolio tersebut. Jika jumlah aset ditambah, maka varians akan semakin kecil dan nilainya akan menjadi nol bila jumlah aset pembentuk portofolio berjumlah tak terhingga.

Varians saham dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}[R_{i(t)} - E(R_i)]^2}{n-1} \tag{2.6}$$

dengan kovarian saham:

$$\sigma_{i,j} = \frac{\sum_{t=1}^{n}[R_{i(t)} - E(R_i)].[R_{j(t)} - E(R_j)]}{n-1} \tag{2.7}$$

dimana:

σ_i^2	:	Nilai varians saham i
$\sigma_{i,j}$	:	Nilai kovarian saham i dan j
R_{jt}	:	*Return* saham j pada periode t
$E(R_j)$	:	*Expected return* saham j

Maka, varians portofolio dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\sigma_p^2 = E[R_p - E(R_p)]^2 \tag{2.8}$$

dimana σ_p^2 merupakan Varians portofolio.

Berikut merupakan contoh risiko portofolio untuk 2 aset:

$$\begin{aligned}
var(R_p) = \sigma_p^2 &= E[R_p - E(R_p)]^2 \\
&= E[(x_1.R_{p1} + x_2.R_{p2}) - (x_1.E(R_{p1}) + x_2.E(R_{p2})]^2 \\
&= E[x_1.R_{p1} - x_1.E(R_{p1}) + x_2.R_{p2} - x_2.E(R_{p2}]^2 \\
&= E[(x_1.(R_{p1} - .E(R_{p1}))) + (x_2.(R_{p2} - E(R_{p2})))]^2 \\
&= E[x_1^2.[R_{p1} - .E(R_{p1})]^2 + x_2^2.R[_{p2} - E(R_{p2})]^2 \\
&\quad +2x_1x_2(R_{p1} - .E(R_{p1}))(R_{p2} - E(R_{p2}))] \\
&= x_1^2.(E[R_{p1} - .E(R_{p1})]^2) + x_2^2.(E[R_{p2} - E(R_{p2})]^2) \\
&\quad +2x_1x_2E(R_{p1} - E(R_{p1}))E(R_{p2} - E(R_{p2}) \\
&= x_1^2.\sigma_{p1}^2 + x_2^2.\sigma_{p2}^2 + 2x_1x_2\sigma_{p1}\sigma_{p2} \\
&= x_1^2.\sigma_{p1}^2 + x_2^2.\sigma_{p2}^2 + 2x_1x_2\sigma_{p1,p2}
\end{aligned}$$

Nilai varians (σ_p^2) atau standar deviasi (akar dari varians) dapat mengukur seberapa besar risiko nilai setiap aset/saham menyimpang dari ekspektasinya. Sedangkan Kovarian / $cov(R_{p1}, R_{p2})$ akan menunjukkan hubungan antar aset $p1$ dan $p2$. Nilai kovarian yang positif akan menunjukkan bahwa kedua aset tersebut bergerak ke arah yang sama. Sebagai contoh, jika kovarian antara aset $p1$ dan $p2$ menunjukkan nilai yang positif, maka apabila nilai aset $p1$ meningkat, nilai aset $p2$ juga akan meningkat dan sebaliknya jika nilai aset $p1$

menurun, maka nilai aset $p2$ juga menurun. Sedangkan nilai kovarian yang negatif menunjukkan bahwa nilai kedua aset akan bergerak kearah yang berlawanan. Sebagai contoh, jika nilai aset $p1$ meningkat, maka nilai aset $p2$ menurun, dan sebaliknya. Lalu apabila kovarian bernilai nol, hal ini menunjukkan bahwa kedua aset tidak saling berhubungan dan berpengaruh.

Berikut merupakan rumus untuk kovarian portofolio $p1$ dan $p2$:

$$\sigma_{p1,p2} = [R_{p1} - E(R_{p1})].[R_{p2} - E(R_{p2})].x_i \tag{2.9}$$

atau

Untuk portofolio yang memiliki lebih dari 2 aset (n>2), maka variansnya:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= [x_1^2.\sigma_{p1}^2 + x_2^2.\sigma_{p2}^2 + x_3^2.\sigma_{p3}^2 + ... + x_m^2.\sigma_{pm}^2] + \\
&\quad [2x_1x_2\sigma_{p1,p2} + 2x_1x_3\sigma_{p1,p3} + 2x_2x_3\sigma_{p2,p3} + ... + 2x_{m-1}x_m\sigma_{pm-1,pm}] \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^m x_i^2.\sigma_{pi}^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_ix_j\sigma_{pi,pj} \qquad (i \neq j) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^m x_ix_i.\sigma_{pi}\sigma_{pi} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_ix_j\sigma_{pi,pj} \qquad (i \neq j) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^m x_ix_i.\sigma_{pi,pi} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_ix_j\sigma_{pi,pj} \qquad (i \neq j) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_ix_j\sigma_{pi,pj}
\end{aligned}$$

Contoh 2.1.2. Data dari sebuah portofolio saham ditunjukkan pada tabel di bawah ini:

Tabel 2.2: Tabel probabilitas saham X dan Y

Probabilitas	Saham X	Saham Y
0.2	20%	15%
0.1	10%	20%
0.5	40%	30%
0.2	25%	10%

Maka:

$E(R_x) = 0,2.0,2 + 0,1.0,1 + 0,5.0,4 + 0,2.0,25 = 0,3$

$E(R_y) = 0,2.0,15 + 0,1.0,2 + 0,5.0,3 + 0,2.0,1 = 0,22$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
\sigma_x^2 &= ([0,2 - 0,3]^2.0,2) + ([0,1 - 0,3]^2.0,1) + ([0,4 - 0,3]^2.0,5) \\
&\quad +([0,25 - 0,3]^2.0,2) = 0,0115 \\
\sigma_x^2 &= ([0,15 - 0,22]^2.0,2) + ([0,2 - 0,22]^2.0,1) + ([0,35 - 0,22]^2.0,5) \\
&\quad +([0,1 - 0,22]^2.0.2) = 0,00635
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\sigma_{x,y} &= ([0,2 - 0,3][0,15 - 0,22].0,2) + ([0,1 - 0,3][0,2 - 0,22].0,1) \\
&\quad +([0,4 - 0,3][0,35 - 0,22].0,5) + ([0,25 - 0,3][0,1 - 0,22].0,2) \\
&= 0,0065.
\end{aligned}$$

2.1.3 Portofolio Optimal

Investor yang melakukan investasi pasti menginginkan keuntungan (*return* maksimal). Sehingga pemilihan dan pembentukkan portofolio harus dilakukan secara optimal. Sebuah portofolio akan dapat dikatakan optimal ketika memiliki kombinasi nilai *expected return* dan risiko yang terbaik. Maka dari itu untuk menentukan portofolio optimal harus dihitung nilai *expected return* dari tiap asset/saham individual dan dilanjutkan dengan menghitung risiko (dengan menggunakan nilai varians dan kovarians) dari asset/saham yang ada dalam portofolio. Portofolio optimal dapat dibentuk dalam suatu fungsi dan kendala sebagai berikut:

- Apabila mengacu pada model *Markowitz*, maka portofolio optimal dapat dibentuk dengan memilih tingkat *expected return* kemudian meminimumkan risikonya.

$$\text{Meminimumkan} \quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i x_j \sigma_{pi,pj}$$

dengan kendala:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i E(R_i) \leq E(R_p)$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i \leq 1$$
$$x \geq 0$$

dengan asumsi tidak ada biaya transaksi, tidak ada pinjaman berisiko, menggunakan satu periode waktu dan pemilihan hanya didasarkan pada nilai *expected return* dan risiko dari portofolio saja. Hal tersebut akan mengacu pada asumsi dimana investor memiliki nilai utility yang sama dan tetap sehingga tidak ada pinjaman berisiko.

- Apabila mengacu pada model Frederick S. (2001) yang menyatakan bahwa portofolio optimal merupakan portofolio yang bertujuan untuk memaksimumkan *expected return* dengan tingkat risiko tertentu, maka:

$$\begin{aligned} \text{Memaksimumkan} \quad & E(R_p) - \alpha\sigma_p^2 \\ = \quad & \sum_{i=i}^{m} x_i E(R_i) - \alpha \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i x_j \sigma_{pi,pj} \end{aligned}$$

dengan kendala:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \leq 1$$
$$x \geq 0$$

dengan nilai α sebagai suatu parameter konstanta tak negatif yang dapat menunjukkan tingkat ukuran risiko yang diinginkan investor terhadap jumlah *expected return* nya. Nilai α berkisar antara $0 \leq \alpha \leq 1$ yang artinya apabila $\alpha = 0$ maka risiko diabaikan dan apabila α bernilai besar maka risiko akan sangat diperhatikan dan diminimalkan.

2.2 Optimasi

Optimasi merupakan suatu proses untuk mencari nilai optimal dari suatu permasalahan. Optimasi sendiri umumnya memiliki tujuan untuk mencari nilai maksimum atau minimum dari suatu fungsi dengan memperhatikan kendala-kendala yang ada. Berikut merupakan definisi dan teorema yang berkaitan dengan nilai maksimum dan nilai minimum:

Definisi 2.2.1. Misal S adalah domain dari f yang memuat a, maka:

1. $f(a)$ nilai maksimum jika $f(a) \geq f(x) \forall x \in S$
2. $f(a)$ nilai minimum jika $f(a) \leq f(x) \forall x \in S$
3. $f(a)$ nilai ekstrim jika $f(a)$ nilai maksimum atau nilai minimum
4. Fungsi yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan disebut fungsi tujuan

2.2.1 Fungsi Konveks dan Konkaf

Definisi 2.2.2. Misalkan f terdefinisi pada interval I (terbuka, tertutup, atau tidak satupun), maka:

1. f naik pada I jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I , $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
2. f turun pada I jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I , $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
3. f monoton murni pada I jika f naik atau turun pada I.

Definisi 2.2.3. Misalkan f terdiferensial untuk semua $x \in R$, f dikatakan cekung keatas atau konveks jika $f'(x)$ naik untuk semua $x \in R$ dan f dikatakan cekung kebawah atau konkaf jika $f'(x)$ turun untuk semua $x \in R$

f'' merupakan turunan pertama dari f' dan turunan kedua dari f. Sehingga, jika f" positif maka f' naik dan jika f" negatif maka f' turun. Penjelasan dapat dilihat berdasarkan dari definisi berikut

Teorema 2.2.1. Misalkan f terdiferensial dua kali untuk semua $x \in R$

1. *Jika* $f''(x) > 0$ *, maka* f *cekung keatas atau konveks untuk semua* $x \in R$

2. *Jika* $f''(x) < 0$*, maka* f *cekung kebawah atau konkaf untuk semua* $x \in R$

Turunan parsial kedua dari suatu fungsi f dapat digunakan untuk menguji konveksitas suatu fungsi. Pada contoh kasus fungsi dua variabel, maka nilai (x_1, x_2) harus memenuhi syarat sebagai berikut:

Tabel 2.3: Uji konveksitas untuk fungsi dua variabel

Kuantitas	Konveks	Konveks Ketat	Konkaf	Konkaf Ketat
$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0
$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0
$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2 x_2^2}$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0

2.2.2 Sifat Definit Matriks

Salah satu syarat optimasi orde dua (kuadratik) adalah dengan mencari titik kritis pada turunan parsial kedua $f(x)$.

Definisi 2.2.4. Suatu matriks M berorde n x n disebut simetri jika $M = M^T$

Definisi 2.2.5. Misal terdapat suatu fungsi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sehingga

$$f\left(x_1, x_2\right) = m_{11}x_1^2 + 2m_{12}x_1x_2 + m_{22}x_2^2$$

disebut fungsi kuadratik di $\mathbb{R}^2$ maka terdapat matriks simetri M sedemikian sehingga

$$f\left(x_1, x_2\right) = x^T M x$$

dimana x merupakan vektor dengan komponen x_1 dan x_2.

Contoh 2.2.1. Misal terdapat fungsi $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2$

Maka, fungsi tersebut dapat dibentuk menjadi

$$f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Pada tahun 1995 dalam buku yang berjudul *Optimal Control*, Lewis menyatakan bahwa terdapat syarat dalam optimasi yang membutuhkan sifat kedefinitan matriks. Sehingga untuk setiap M matriks persegi nxn, maka berlaku:

1. M Definit Positif $\Leftrightarrow x^TMx > 0 \quad \forall x \ \in \mathbb{R}^n$
2. M Definit Negatif $\Leftrightarrow x^TMx < 0 \quad \forall x \ \in \mathbb{R}^n$
3. M Semi Definit Positif $\Leftrightarrow x^TMx \geq 0 \quad \forall x \ \in \mathbb{R}^n$
4. M Semi Definit Negatif $\Leftrightarrow x^TMx \leq 0 \quad \forall x \ \in \mathbb{R}^n$

Contoh 2.2.2. Terdapat fungsi $f(x) = 7x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$

Maka, dengan pendekatan pertama akan mendapatkan:

$$x^TMx = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dengan pendekatan kedua yakni melalui pendekatan nilai determinan matriks, akan didapat:

$$|M| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

Sehingga, terlihat jelas bahwa M definit positif.

Matriks *Hessian*

Matriks *Hessian* dikembangkan pada abad ke-19 oleh Ludwig Otto Hesse. Matriks *Hessian* merupakan sebuah matriks kuadrat yang elemen-elemennya merupakan turunan parsial kedua dari sebuah fungsi. Misal terdapat sebuah fungsi $f(x)$ yang setiap variabelnya kontinu, memiliki turunan parsial pertama kontinu dan memiliki turunan parsial kedua, sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Maka, matriks $H(x)$ akan memiliki dimensi n x n, dimana determinan *Hessian* diturunkan dari matriks simetri yang elemen-elemennya merupakan turunan kedua parsial. Sehingga, elemen diagonal utamanya (*principal diagonal*) merupakan turunan kedua parsial langsung dari fungsi $f(x)$ terhadap x, sedangkan elemen-elemen diluar diagonal utamanya merupakan hasil dari turunan kedua silang.

Teorema 2.2.2. Untuk setiap matriks *Hessian* ($H(x)$), maka

1. Jika $H(x)$ definit positif, maka x merupakan suatu minimum relatif dari $f(x)$
2. Jika $H(x)$ definit negatif, maka x merupakan suatu maksimum relatif dari $f(x)$
3. Jika $H(x)$ indefinit, maka x merupakan suatu titik pelana dari $f(x)$

Teorema 2.2.3. Untuk setiap matriks *Hessian* ($H(x)$), maka berlaku

- Jika $H(x)$ bersifat semi definit positif $\forall x \in \mathbb{R}$ maka f merupakan fungsi cembung (konveks)
- Jika $H(x)$ bersifat definit positif $\forall x \in \mathbb{R}$ maka f merupakan fungsi cembung kuat
- Jika $H(x)$ bersifat semi definit negatif $\forall x \in \mathbb{R}$ maka f merupakan fungsi cekung (konkaf)
- Jika $H(x)$ bersifat definit negatif $\forall x \in \mathbb{R}$ maka f merupakan fungsi cekung kuat

Hessian Terbatas

Matriks *Hessian* terbatas merupakan matriks yang berisikan turunan parsial kedua dari fungsi *Lagrange* terhadap x_i dibatasi oleh turunan parsial pertama dari fungsi kendala.

Definisi 2.2.6. Misal terdapat fungsi tujuan $f(x_1, x_2)$ dengan kendala $g(x_1, x_2) = b$ dimana b adalah konstanta dan λ adalah variabel lagrange, sehingga dapat ditulis:

$$L = L(\lambda, x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - \lambda[g(x_1, x_2) - b]$$

Jika x_2 dijaga agar tetap konstan dengan dimisalkan $x_2 = x_{2_0}$, maka $f(x_1, x_{2_0})$ adalah fungsi satu variabel x_1. Turunan $x_1 = x_{1_0}$ disebut turunan parsial f terhadap x_1 di (x_{1_0}, x_{2_0}) dan dinyatakan oleh $f_(x_{1_0}, x_{2_0})$

Sehingga untuk syarat orde pertama pada L dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial_\lambda} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial_{x_1}} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial_{x_2}} = 0$$

Selanjutnya untuk syarat orde kedua ialah :

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial_{x_1}} & \frac{\partial g}{\partial_{x_2}} \\ \frac{\partial g}{\partial_{x_1}} & \frac{\partial^2 L}{\partial_{x_1^2}} & \frac{\partial^2 L}{\partial_{x_1 x_2}} \\ \frac{\partial g}{\partial_{x_2}} & \frac{\partial^2 L}{\partial_{x_1 x_2}} & \frac{\partial^2 L}{\partial_{x_2^2}} \end{vmatrix} \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$$

Determinan *Hessian* terbatas biasa dinotasikan dengan $|\bar{H}|$ dimana garis di atas H melambangkan batas. Untuk nilai $|\bar{H}|$ yang positif maka $f(x_1, x_2)$ merupakan suatu maksimum relatif. Sedangkan untuk nilai $|\bar{H}|$ yang negatif maka $f(x_1, x_2)$ merupakan suatu minimum relatif.

Contoh 2.2.3. Terdapat sebuah permasalahan optimasi

$$f(x) = x_1x_2 + 2x_1$$

dengan kendala:

$$4x_1 + 2x_2 = 60$$

Maka

$$L(x, \lambda) = x_1x_2 + 2x_1 - \lambda(4x_1 + 2x_2 - 60)$$

Sehingga

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial_{x_1}} & \frac{\partial g}{\partial_{x_2}} \\ \frac{\partial g}{\partial_{x_1}} & \frac{\partial^2 L}{\partial_{x_1^2}} & \frac{\partial^2 L}{\partial_{x_1 x_2}} \\ \frac{\partial g}{\partial_{x_2}} & \frac{\partial^2 L}{\partial_{x_1 x_2}} & \frac{\partial^2 L}{\partial_{x_2^2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16$$

karena $|\bar{H}| = 16 > 0$ (positif), maka $f(x)$ merupakan suatu permasalahan maksimum relatif.

2.3 Program Linear

Program linear merupakan metode penyelesaian matematis untuk masalah optimasi yang bertujuan untuk mencari nilai optimal melalui cara memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan yang berbentuk linear terhadap fungsi-fungsi kendalanya.

Terdapat empat unsur utama dalam model pemrograman linear, yakni:

1. Variabel keputusan

   Variabel keputusan merupakan variabel yang berpengaruh pada keoptimalan hasil.

2. Fungsi tujuan

   Fungsi tujuan merupakan fungsi linear yang menjadi tujuan keoptimalan.

3. Fungsi kendala

   Fungsi kendala merupakan fungsi yang membatasi setiap nilai dari variabel keputusan.

4. Variabel *slack*

   Variabel *slack* merupakan variabel tambahan yang mengubah bentuk kendala yang belum standar (pertidaksamaan) menjadi bentuk standar (persamaan).

Pada tahun 2009, Ruminta mengatakan bahwa program linear merupakan permasalahan optimasi yang memenuhi:

1. Fungsi tujuan berbentuk fungsi linear dari variabel keputusan.

2. Nilai variabel keputusan harus memenuhi pembatasan-pembatasan. Setiap pembatasan harus berbentuk persamaan atau ketidaksamaan linear.

3. Setiap variabel keputusan harus dibatasi yaitu non negatif.

Bentuk umum permasalah pemrograman linear ialah:

Fungsi tujuan:

Maksimum atau Minimum

$$f(x) = c_i x_i = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots c_n x_n \qquad i = 1, 2, \dots n$$

dengan kendala:

$$\begin{aligned} g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)(\geq, =, \leq)b_j & \qquad j = 1, 2, \dots m \\ x_i \geq 0 & \qquad i = 1, 2, \dots n \end{aligned}$$

dimana x_i merupakan variabel keputusan dan c_i merupakan koefisien fungsi tujuan. Sedangkan g_j merupakan fungsi kendala dengan b_j merupakan konstanta nilai batasan dari jumlah variabel keputusan. Sedangkan pertidaksamaan $x_i \geq 0$ menunjukkan batasan non-negatif.

Contoh 2.3.1. Fungsi tujuan:

$$\text{Maksimum } Z = f(x) = 2x_1 + 4x_2$$

dengan kendala:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Program linear dapat diselesaikan dengan berbagai macam cara, seperti subtitusi eliminasi, metode grafik dan juga metode simpleks. Metode subtitusi eliminasi dan metode grafik biasa dipakai dalam penyelesaian kasus permasalahan proglam linear yang sederhana dengan jumlah variabel keputusan sedikit. Sedangkan metode simpleks dapat menyelesaikan permasalahan program linear dengan variabel keputusan yang lebih banyak dan kendala yang lebih kompleks. Metode simpleks adalah sebuah metode pengembangan aljabar yang akan berfokus pada pengoptimalan variabel keputusan yang dilakukan dengan cara mengiterasi setiap tabel.

2.3.1 Metode Simpleks

Pada tahun 2008, Eddy Herjanto menyatakan bahwa metode simpleks adalah metode sistematis yang dimulai dari suatu penyelesaian dasar yang *feasible* ke penyelesaian dasar lainnya dan dilakukan secara berulang-ulang (iteratif), sehingga tercapai suatu penyelesaian optimal.

Langkah-langkah pengerjaan proses metode simpleks:

1. **Mengubah bentuk fungsi kendala menjadi persamaan (bentuk kanonik) dengan menambahkan variabel *slack***

   Kendala yang masih berbentuk pertidaksamaan harus diubah menjadi persamaan (bentuk kanonik) dengan menambahkan variabel *slack*, variabel *surplus* atau variabel buatan (*artificial variable*).

   Bentuk-bentuk batasan dalam metode simpleks:

   - Untuk ($\leq$) dapat dikonversikan menjadi bentuk persamaan dengan menambahkan variabel *slack*.
   - Untuk ($\geq$) dapat dikonversikan menjadi bentuk persamaan dengan mengurangi variabel *surplus* dan kemudian menambahkan variabel buatan (*artificial variable*) ke dalamnya.
   - Untuk ($=$) diselesaikan dengan menambahkan variabel buatan (*artificial variable*) ke dalamnya.

2. **Menyusun persamaan-persamaan ke dalam tabel simpleks**

Tabel 2.4: Tabel simpleks

	c_i	c_1	c_2	$\ldots$	c_n		
c_j^*	v_j^*/v_i	v_1	v_2	$\ldots$	v_n	b_j	r_j
c_1^*	v_1^*	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	b_1	r_1
c_2^*	v_2^*	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	b_2	r_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_m^*	v_m^*	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	b_m	r_m
	z_i	z_1	z_2	$\ldots$	z_n		
	$z_i - c_i$	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\ldots$	$z_n - c_n$		

v_i : Variabel keputusan

v_j^* : Variabel basis

c_i : Koefisien dari variabel keputusan (x_i)

c_j^* : Koefisien dari variabel basis (x_j^*)

a_{ij} : Koefisien teknis (koefisien kendala)

b_j : Kuantitas

z_i : $\sum_{i=1}^{m} c_j^* a_{ij}$ (jumlah total hasil kali baris c_j^* dengan kolom a_{ij})

$z_i - c_i$: Selisih antara z_i dan c_i

r_j : Rasio (Hasil bagi nilai b_i dengan variabel basis).

3. **Menyelesaikan tabel simpleks**

   Langkah-langkah penyelesaian pengerjaan tabel simpleks:

   (a) **Mengecek nilai optimal**

   Pada kasus memaksimumkan, tabel simpleks dinyatakan telah optimal jika $z_i - c_i \geq 0$ untuk semua nilai i. Sedangkan untuk kasus meminimumkan, tabel simpleks dinyatakan telah optimal jika $z_i - c_i \leq 0$. Jika tabel belum optimal, maka akan dilakukan perbaikan tabel (iterasi).

(b) **Menentukan variabel kunci**

Untuk menentukan variabel kunci, maka perlu ditentukan kolom kunci dan baris kunci terlebih dahulu. Penentuan kolom kunci ialah dengan melihat nilai $z_i - c_i$ sedangkan penentuan baris kunci ialah dengan melihat nilai rasio.

- Pada kasus memaksimumkan, penentuan kolom kunci ialah dengan memilih nilai x_{ij} yang memiliki $z_i - c_i < 0$ paling kecil karena jika diambil $z_i - c_i > 0$ maka nilai fungsi tujuan akan menjauhi nilai optimal. Sedangkan penentuan baris kunci ialah dengan memilih nilai rasio (positif) yang terkecil.
- Pada kasus meminimumkan, penentuan kolom kunci ialah dengan memilih nilai x_{ij} yang memiliki $z_i - c_i > 0$ paling besar karena jika diambil $z_i - c_i < 0$ maka nilai fungsi tujuan akan menjauhi nilai optimal. Sedangkan penentuan baris kunci ialah dengan memilih nilai rasio (positif) yang terkecil.

Perpotongan nilai antara kolom kunci dan baris kunci selanjutnya akan dijadikan sebagai nilai variabel kunci.

(c) **Menyusun tabel simpleks baru**

Untuk menyusun tabel simpleks yang baru, maka harus mencari koefisien elemen basis dari tabel simpleks sebelumnya. Koefisien elemen basis merupakan nilai dari variabel kunci yang telah ditentukan sebelumnya. Sehingga koefisien baris pivot baru dapat dicari dengan menggunakan rumus $\frac{a_{rj}}{a_{rk}}$, dimana a_{rj} merupakan nilai variabel baris yang akan diubah dan a_{rk} merupakan nilai variabel kunci. Sedangkan untuk menghitung nilai baris baru lainnya dilakukan dengan menggunakan rumus $a_{ij} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} a_{ik}$.

Iterasi tabel dilakukan hingga mencapai kondisi optimal. Kemudian subtitusikan nilai variabel keputusan optimal untuk mendapatkan nilai fungsi optimal.

Contoh 2.3.2. Terdapat suatu permasalahan:

$$\text{Maksimum } f(x_1, x_2) = 5x_1 + 7x_2$$

dengan kendala:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 17$$
$$4x_1 + 5x_2 \leq 32$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Selanjutnya bentuk fungsi kendala akan diubah ke dalam bentuk kanonik dengan menambahkan variabel *slack* s_1 dan s_2, sebagai berikut:

$$3x_1 + 2x_2 + s_1 = 17$$
$$4x_1 + 5x_2 + s_2 = 32$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Sehingga bentuk tabel simpleksnya ialah sebagai berikut:

Tabel 2.5: Tabel simpleks awal

	c_i	5	7	0	0		
c_j^*	v_j^*/v_i	x_1	x_2	s_1	s_2	b_j	r_j
0	s_1^*	3	2	1	0	17	17/2
0	s_2^*	4	**5**	0	1	32	**32/5**
	z_i	0	0	0	0		
	$z_i - c_i$	-5	**-7**	0	0		

Dari tabel di atas kolom x_2 akan dipilih menjadi kolom kunci karena memiliki nilai $z_i - c_i$ terkecil, dan baris s_2^* akan terpilih sebagai baris kunci karena memiliki nilai ratio terkecil. Sehingga mengakibatkan perpotongan antara kolom x_2 dan baris s_2^* yakni angka 2 menjadi variabel kunci. Selanjutkan akan dilakukan iterasi sehingga didapatkan tabel baru sebagai berikut:

Tabel 2.6: Tabel simpleks hasil iterasi pertam

	c_i	5	7	0	0	
c_j^*	v_j^*/v_i	x_1	x_2	s_1	s_2	b_j
0	s_1^*	7/5	0	1	-2/5	21/5
7	x_2	4/5	1	0	1/5	32/5
	z_i	28/5	7	0	0	
	$z_i - c_i$	3/5	0	0	7/5	

Dari tabel simpleks iterasi pertama terlihat bahwa seluruh $z_i - c_i \geq 0$, dengan demikian maka kondisi optimal telah tercapai, dimana $x_1 = 0$, $x_2 = 32/5 = 6,4$. Sehingga, didapatkan nilai maksimum $f(x) = 7(32/5) = 224/5 = 44,8$

2.3.2 Metode Simpleks Dua Fase

Metode simpleks dua fase merupakan salah satu metode yang dapat menyelesaikan permasalahan pemrograman linear dengan menggunakan iterasi tabel yang dilakukan dalam dua fase dimana variabel basis awal terdiri dari variabel buatan. Fase pertama pada metode simpleks dua fase bertujuan untuk menghilangkan variabel buatan dengan cara membuat fungsi tujuan buatan yang merupakan jumlah dari variabel-variabel buatan yang kemudian diminimalkan dengan tabel simpleks. Pada kasus memaksimumkan, maka koefisien fungsi tujuan akan diberi nilai negatif (-1) sedangkan pada kasus meminimumkan, maka koefisien fungsi tujuan akan diberi nilai positif (+1).

Fase pertama pada metode simpleks dua fase akan berakhir apabila fungsi tujuan (buatan) memiliki nilai yang optimal (sesuai dengan aturan pada metode simpleks). Sehingga, proses dapat dilanjutkan ke fase kedua. Pada fase dua, tabel awal yang dipakai untuk mengoptimalkan fungsi tujuan asli berasal dari tabel akhir pada fase pertama. Pengoptimalan fungsi tujuan asli dilakukan dengan cara mensubtitusikan solusi optimal yang didapatkan dari fase pertama sebagai solusi dasar awal dan selanjutnya akan dilakukan iterasi simpleks sampai diperoleh solusi optimal sesungguhnya. Lalu karena pada fase pertama variabel buatan telah dihilangkan, maka pada fase dua variabel buatan tidak perlu disertakan lagi dalam tabel.

Langkah-langkah metode simpleks dua fase:

1. Pada fase pertama, buatlah fungsi tujuan buatan
2. Ubah bentuk fungsi kendala dalam bentuk kanonik
3. Buatlah dan lengkapi tabel simpleks
4. Lakukan penyelesaian tabel simpleks (sesuai dengan langkah-langkah pada metode simpleks) sampai didapatkan kondisi optimal.
5. Selanjutnya pada fase dua, nilai obyektif c_i dan nilai c_j^* nya akan mengikuti koefisien dari fungsi tujuan asli
6. Lakukan penyelesaian tabel simpleks (sesuai dengan langkah-langkah pada metode simpleks) sampai didapatkan kondisi optimal.

Contoh 2.3.3. Minimum $z = 3x_1 + 5x_2$
dengan kendala:

$$2x_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 18$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Maka, akan dibentuk variabel buatan r_1 dan r_2 sesuai dengan banyaknya variabel keputusan.

Sehingga diperoleh fungsi tujuan buatan:

$$\text{Meminimalkan } R = r_1 + r_2$$

dengan kendala:

$$2x_2 + r_1 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 - s_1 + r_2 = 18$$

$$x_1 + s_2 = 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Akan didapatkan tabel sebagai berikut:

Tabel 2.7: Tabel simpleks dua fase awal

	c_i	0	0	0	0	1	1		
c_j^*	v_j^*/v_i	x_1	x_2	s_1	s_2	r_1	r_2	b_j	r_j
1	r_1^*	0	**2**	0	0	1	0	12	**6**
1	r_2^*	3	2	-1	0	0	1	18	9
0	s_2^*	1	0	0	1	0	0	4	∞
	z_i	3	4	-1	0	1	1		
	$z_i - c_i$	3	**4**	-1	0	0	0		

Dari tabel di atas kolom x_2 akan dipilih menjadi kolom kunci karena memiliki nilai $z_i - c_i$ terbesar, dan baris r_1^* akan terpilih sebagai baris kunci karena memiliki nilai ratio terkecil. Sehingga mengakibatkan perpotongan antara kolom x_2 dan baris r_1^* yakni angka 1 menjadi variabel kunci.

Selanjutnya akan dilakukan iterasi ke-1 dan akan diperoleh tabel:

Tabel 2.8: Tabel fase pertama iterasi pertama simpleks dua fase

	c_i	0	0	0	0	1	1		
c_j^*	v_j^*/v_i	x_1	x_2	s_1	s_2	r_1	r_2	b_j	r_j
0	x_2	0	1	0	0	1/2	0	6	∞
1	r_2^*	**3**	0	-1	0	-1	1	6	**2**
0	s_2^*	1	0	0	1	0	0	4	4
	z_i	3	0	-1	0	-1	1		
	$z_i - c_i$	**3**	0	-1	0	-2	0		

Dari tabel di atas kolom x_1 akan dipilih menjadi kolom kunci karena memiliki nilai $z_i - c_i$ terbesar, dan baris r_2^* akan terpilih sebagai baris kunci karena memiliki nilai ratio terkecil. Sehingga mengakibatkan perpotongan antara kolom x_1 dan baris r_2^* yakni angka 2 menjadi variabel kunci.

Selanjutnya akan dilakukan iterasi ke-2 dan akan diperoleh tabel:

Tabel 2.9: Tabel fase pertama iterasi kedua simpleks dua fase

	c_i	0	0	0	0	1	1	
c_j^*	v_j^*/v_i	x_1	x_2	s_1	s_2	r_1	r_2	b_j
0	x_2	0	1	0	0	1/2	0	6
0	x_1	1	0	-1/3	0	-1/3	1/3	2
0	s_2^*	0	0	1/3	1	1/3	-1/3	2
	z_i	0	0	0	0	0	0	
	$z_i - c_i$	0	0	0	0	-1	-1	

Dari tabel di atas terlihat bahwa semua $z_i - c_i \leq 0$, dengan demikian, maka tahap pertama dari metode simpleks dua fase telah selesai.

Selanjutnya pada fase dua, nilai obyektif c_j^* dan nilai c_i nya akan mengikuti koefisien dari fungsi tujuan asli. Sehingga diperoleh tabel simpleks tahap dua sebagai berikut:

Tabel 2.10: Tabel fase kedua simpleks dua fase

	c_i	3	5	0	0	
c_j^*	v_j^*/v_i	x_1	x_2	s_1	s_2	b_j
5	x_2	0	1	0	0	6
3	x_1	1	0	-1/3	0	2
0	s_2^*	0	0	1/3	1	2
	z_i	3	5	-1	0	
	$z_i - c_i$	0	0	-1	0	

Dari tabel di atas terlihat bahwa semua $z_i - c_i \leq 0$. Maka, nilai optimal untuk $x_1 = 2$ dan $x_2 = 6$. Sehingga nilai optimal $Z = 3(2) + 5(6) = 36$.

2.4 Program Nonlinear

Program atau pemrograman nonlinear merupakan salah satu bagian dari proses penyelesaian masalah optimasi yang bertujuan untuk mencari nilai optimal dengan memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan yang berbentuk nonlinear. Masalah-masalah optimasi yang sederhana biasanya diselesaikan menggunakan pemrograman linear. Sedangkan kenyataannya dalam kehidupan sehari-hari tidak semua permasalahan bisa diselesaikan hanya dengan menggunakan pemrograman linear. Masalah yang dialami juga biasanya akan menimbulkan variabel baru atau fungsi-fungsi baru pada kondisi tertentu. Oleh karena itu munculah pemrograman nonlinear. Bentuk umum permasalah pemrograman nonlinear dengan variabel keputusan x adalah:

Fungsi tujuan:

Maksimum atau Minimum

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.10}$$

dengan kendala:

$$\begin{aligned} g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\geq, =, \leq)b_j & \qquad j = 1, 2, \ldots m \\ x_i \geq 0 & \qquad i = 1, 2, \ldots n \end{aligned}$$

dimana $f(x)$ merupakan fungsi tujuan yang nonlinear dan $g(x)$ merupakan fungsi kendala (Winston (2004)).

Secara umum pemrograman nonlinear dapat dibagi menjadi dua, yakni:

1. **Pemrograman Nonlinear Tak Berkendala**

   Pemrograman nonlinear tak berkendala adalah metode optimasi dengan fungsi tujuan berbentuk nonlinear dan tidak memiliki fungsi kendala apapun. Bentuk model pemrograman nonlinear tak berkendala adalah:

   Fungsi tujuan:

   $$\text{Maksimum/Minimum } f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Contoh 2.4.1. Fungsi tujuan:

$$\text{Maksimum } f(x) = x^2 + sin5x$$

Untuk menyelesaikan permasalahan pemrograman nonlinear tak kendala terdapat dua syarat keoptimalan yaitu:

- Syarat Perlu Keoptimalan

  Syarat perlu keoptimalan berfungsi untuk mencari titik-titik optimal x^* pada pendekatan analitis. Syarat tersebut berisi:

  Jika solusi $x = x^*$ adalah titik optimal dari $f(x)$ maka:

  $$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{di } x = x^* \text{ untuk } i = 1, 2, ..., n$$

- Syarat Cukup Keoptimalan

  Syarat cukup keoptimalan berfungsi untuk menentukan apakah titik optimal yang didapatkan dari syarat perlu keoptimalan merupakan titik minimum atau titik maksimum. Jika $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ dan $H(x^*)$ definit positif, maka x^* titik minimum. Sedangkan apabila $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ dan $H(x^*)$ definit negatif, maka x^* titik maksimum.

2. **Pemrograman Nonlinear Berkendala**

   Pemrograman nonlinear berkendala merupakan masalah optimasi yang memiliki kendala atau batasan-batasan tertentu dan fungsi tujuan berbentuk nonlinear. Bentuk model pemrograman nonlinear berkendala untuk menentukan nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah:

   Fungsi tujuan:

   $$\text{Maksimum/Minimum } f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

dengan fungsi kendala:

$$g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\geq, =, \leq)b_j \qquad j = 1, 2, \ldots m$$
$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

dengan $m \leq n$ (jumlah kendala lebih kecil sama dengan variabel). Sehingga apabila terjadi $m > n$, maka masalah tidak dapat diselesaikan.

Contoh 2.4.2. Fungsi tujuan:

$$\text{Maksimum } f(x) = 4x_1^2 + 5x_2^2$$

dengan kendala:

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Terdapat berbagai macam cara untuk menyelesaikan permasalahan pemrograman nonlinear. Salah satunya ialah dengan menggunakan metode pengali *Lagrange* dan kondisi *Karush Kuhn Tucker*. Metode pengali *Lagrange* merupakan proses pembuatan fungsi baru yang merupakan penjumlahan fungsi tujuan dengan hasil perkalian antara fungsi kendala dengan faktor Pengali *Lagrange* dimana nilai ekstrimnya akan bernilai sama dengan nilai ekstrim pada fungsi berkendala. Sehingga dengan menggunakan metode ini nantinya akan dihasilkan nilai-nilai yang optimal untuk setiap nilai x. Metode ini juga cukup sering dipilih dan dipakai untuk menyelesaikan permasalahan pemrograman nonlinear sederhana karena caranya cukup mudah dan sederhana. Sedangkan untuk menyelesaikan permasalahan pemrograman nonlinear yang cukup kompleks, maka dapat digunakan kondisi *Karush Kuhn Tucker* sebagai alat bantu untuk menemukan nilai solusi optimal karena kondisi KKT dapat digunakan untuk mengubah permasalahan nonlinear menjadi permasalahan linear.

2.4.1 Kondisi *Karush Kuhn Tucker*

Kondisi *Karush Kuhn Tucker* (KKT) merupakan suatu kondisi yang diperlukan untuk menyelesaikan permasalahan pemrograman nonlinear dan menjadi syarat cukup bagi permasalahan pemrograman kuadratik. Pada kasus permasalahan pemrograman kuadratik, kondisi ini akan menghasilkan fungsi linear baru yang merupakan hasil derivatif dari fungsi kuadrat. Sehingga, apabila kondisi *Karush Kuhn Tucker* (KKT) terpenuhi maka metode ini akan menghasilkan solusi optimal untuk setiap nilai x dengan cara mengubah permasalahan nonlinear menjadi permasalahan linear.

Untuk permasalahan nonlinear

$$\text{Memaksimum / Meminimum } f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

dengan kendala:

$$\begin{aligned} g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\geq, =, \leq)b_j & \qquad j = 1, 2, \ldots m \\ x_i \geq 0 & \qquad i = 1, 2, \ldots n \end{aligned}$$

Semua kendala yang akan diselesaikan dengan metode *Karush Kuhn Tucker* harus menggunakan tanda $(\leq)$. Sehingga, apabila ada kendala yang berbentuk $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b$ maka harus ditulis sebagai $-g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq -b$ dan kendala dengan bentuk $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$ harus diganti dengan $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b$ dan $-g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq -b$.

Untuk fungsi konveks, syarat perlu dan cukup untuk mencapai titik minimum dapat dicari menggunakan syarat Karush-Kuhn-Tucker. Tetapi untuk fungsi nonkonveks, syarat Karush-Kuhn-Tucker merupakan syarat perlu saja, tetapi belum cukup untuk mencapai optimal. Jadi untuk masalah jenis konveks, syarat Karush-Kuhn-Tucker menjadi syarat perlu dan cukup untuk sebuah maksimum ataupun minimum global.

Selanjutnya akan dibentuk fungsi *Lagrange*nya:

$$L(x,\lambda) = f(x_1, x_2, ...x_n) - \lambda \sum_{j=1}^{m} (g_j(z) - b_j \tag{2.11}$$

dimana $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ merupakan fungsi tujuan, $g_j(z)$ merupakan fungsi kendala, b merupakan konstanta dan λ merupakan nilai pengali *Lagrange* yang bersesuaian dengan dimensi barisan vaktor m.

Lalu selesaikan persamaan:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$$
$$\lambda_j \geq 0$$

Untuk permasalahan dengan asumsi fungsi tujuan konkaf dan fungsi kendala konveks, maka syarat perlu dan cukup keoptimalannya akan terpenuhi apabila sesuai dengan syarat berikut:

1. Untuk permasalahan meminimumkan:

   - $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} - e_i = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$
   - $\lambda_j [b_j - g_j(z)] = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., m)$
   - $x_i \left[\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} \right] = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$
   - $\lambda_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, ..., m)$
   - $e_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$

   dimana e_i merupakan variabel *surplus*.

2. Untuk masalah memaksimumkan:

   - $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} + s_i = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$
   - $\lambda_j [b_j - g_j(x)] = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., m)$

- $x_i \left[\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} \right] = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$
- $\lambda_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, ..., m)$
- $s_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$

dimana s_i merupakan variabel *slack*.

Pada $\lambda_j[b_j - g_j(x)] = 0$, jika $\lambda_j = 0$ dan bentuk umum fungsi kendala yaitu $g_j(x) \leq b_j$ maka berakibat $g_j(x) - b_j \leq 0$.

Corollary 2.4.1. Diasumsikan bahwa fungsi tujuan $f(x)$ merupakan fungsi konkaf dan fungsi kendala $g(x)$ merupakan fungsi konveks, maka solusi akan optimal jika dan hanya jika semua kondisi teorema terpenuhi.

Contoh 2.4.3. Minimumkan $f(x) = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2$
dengan kendala:

$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

Maka:

$$L(x, \lambda) = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2 - \lambda_1(3 - (x_1 + x_2)) - \lambda_2(2 - (-2x_1 + x_2))$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 4 + \lambda_1 - 2\lambda_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 6 + \lambda_1 + \lambda_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 3 - x_1 - x_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2 + 2x_1 - x_2$$

Sehingga, terpenuhi syarat KKT untuk permasalahan meminimumkan sebagai berikut:

1. $(i = 1) \quad 2x_1 - 4 + \lambda_1 - 2\lambda_2 - e_1 = 0$

   $(i = 2) \quad 2x_2 - 6 + \lambda_1 + \lambda_2 - e_2 = 0$

2. $\lambda_1[3 - x_1 - x_2] = 0$

   $\lambda_2[2 + 2x_1 - x_2] = 0$

3. $(i = 1) \quad x_1[2x_1 - 4 + \lambda_1 - 2\lambda_2] = 0$

   $(i = 2) \quad x_2[2x_2 - 6 + \lambda_1 + \lambda_2] = 0$

4. $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

5. $e_1, e_2 \geq 0$

2.5 Pemrograman Kuadratik

Banyak persoalan matematika dapat diselesaikan dengan pemrograman kuadratik (*Quadratic Programming*) yang mana merupakan salah satu metode pendekatan untuk menyelesaikan permasalahan pemrograman nonlinear berkendala. Dalam pemrograman kuadratik, fungsi tujuan akan berbentuk nonlinear yang melibatkan variabel kuadrat sedangkan fungsi kendalanya akan berbentuk pertidaksamaan linear. Bentuk umum dari pemrograman kuadratik adalah sebagai berikut:

$$f(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x + d \tag{2.12}$$

dengan kendala:

$$\mathrm{A}x \leq \mathrm{b}$$
$$x \geq 0$$

dengan

$$c^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dimana d merupakan suatu konstanta dan $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah matriks yang tersusun dari nilai q_{ij}, dimana q_{ij} merupakan turunan parsial kedua terhadap x_i dan x_j yang ada pada fungsi tujuan. Sehingga matriks Q simetris dengan nilai $q_{ij} = q_{ji}$.

Bentuk persamaan (2.6) fungsi tujuan dapat ditulis menjadi bentuk lebih lanjut, yakni:

$$f(x) = c^T x + \tfrac{1}{2}x^T Qx + d = \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} q_{ij}x_i x_j + d$$

Pada fungsi tujuan di atas, suku $\frac{1}{2}x^T Qx$ menyatakan bagian kuadratis dari fungsi tujuan dengan Q merupakan matriks bernilai definit positif dan simetri. Sehingga, karena Q merupakan matriks definit positif maka $f(x)$ adalah fungsi konveks (kuat).

Contoh 2.5.1. Diketahui sebuah fungsi

$$\text{Minimum } f(x) = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2$$

dengan kendala:

$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

Maka:

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -6 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pada contoh terdapat dua kendala maka matriks A menjadi matriks satu baris yaitu $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, sehingga dapat ditentukan $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Setelah teridentifikasi, bentuk permasalahan dapat disusun ulang, yaitu:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

dengan kendala : $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian untuk masalah pemrograman kuadratik dapat diselesaikan dengan metode *Wolfe* dengan syarat kondisi *Karush Kuhn Tucker*. Sehingga nantinya permasalahan pemrograman kuadratik dapat diproses menjadi permasalahan pemrograman linear oleh kondisi *Karush Kuhn Tucker* dan dicari nilai solusi optimalnya dengan menggunakan metode *Wolfe*.

Namun pada pemrograman kuadratik, bentuk yang diperoleh dari kondisi *Karush Kuhn Tucker* akan sedikit berbeda karena terdapat kondisi *complementary slackness* khusus atau kendala komplementaritas. Secara umum, kondisi *complementary slackness* pada pemrograman kuadratik dapat dinyatakan pada teorema berikut:

Teorema 2.5.1. 1. e_i dan s_i pada kondisi *Kuhn-Tucker* dan x_j tidak dapat kedua-duanya bernilai positif.

2. Variabel *surplus (excess)* ataupun *slack* untuk kendala ke-i dan λ_i tidak dapat kedua-duanya bernilai positif.

2.5.1 Metode *Wolfe*

Metode *Wolfe* merupakan sebuah metode yang dapat menyelesaikan permasalahan pemrograman kuadratik. Metode ini memerlukan kondisi *Karush Kuhn Tucker* sebagai syarat untuk membentuk fungsi tujuan baru yang linear kemudian diminimumkan dengan menggunakan fase 1 pada metode simpleks dua fase.

Proses metode *Wolfe* akan dimulai dengan menambahkan variabel buatan (*artificial variable*) w_i pada hasil persamaan yang didapatkan dari kondisi *Karush Kuhn Tucker*. Selanjutnya variabel buatan (*artificial variabel*) tersebut akan diminimumkan sebagai fungsi tujuan baru, sebagai berikut :

$$\text{Minimalkan} \quad W = w_1 + w_2 + ... + w_n$$

Sedangkan fungsi kendalanya merupakan hasil persamaan yang telah didapatkan dari persamaan pada kondisi *Karush Kuhn Tucker*. Sehingga nantinya permasalahan tersebut dapat dibentuk ke dalam tabel simpleks :

Tabel 2.11: Tabel metode *Wolfe*

	c_i	c_1	c_2	c_3	c_4	c_n		
c_j^*	v_j^*/v_i	x_i	λ_j	s_j	s_j'	w_i	b_j	r_j
c_1^*	x_1^*	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{1n}	b_1	r_1
c_2^*	x_2^*	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{2n}	b_2	r_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
c_m^*	x_m^*	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	a_{m4}	a_{mn}	b_m	r_m
	z_i	z_1	z_2	z_3	z_4	z_n		
	$z_i - c_i$	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$z_3 - c_3$	$z_4 - c_4$	$z_n - c_n$		
	ψ_i	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_n		

dimana pemilihan kolom kuncinya akan berbeda dari fase 1 pada metode simpleks dua fase karena pada metode ini, kolom yang akan dipilih ialah yang memiliki nilai ψ terbesar. Sedangkan untuk pemilihan baris kunci, variabel kunci dan iterasi tabelnya akan sama dengan fase 1 pada metode simpleks dua fase.

Untuk menjamin bahwa solusi akhir (dengan variabel buatan sama dengan nol) memenuhi kondisi *complementary slackness*, maka metode *Wolfe* memodifikasi pilihan variabel simpleks yang masuk, dengan cara :

1. Tidak diperbolehkan e_j dari kendala ke-j dan x_i kedua-duanya sebagai variabel basis;

2. Tidak diperbolehkan variabel *slack* atau *excess* dari kendala ke-j dan λ_j kedua-duanya sebagai variabel basis

Syarat basis di atas bersesuaian dengan *complementary slackness* dari pemrograman kuadartik. Jadi, apabila simpleks dikerjakan dengan cara biasa tanpa menggunakan syarat basis di atas, maka pada hasil tabel optimal akan ada *complementary slackness* yang tidak terpenuhi.

Contoh 2.5.2. Terdapat suatu permasalahan *quadratic programming* dimana:
Maksimum

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 - 9x_2 + x_1x_2$$

dengan kendala:

$$2x_1 + x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Selanjutnya, permasalahan di atas akan dibentuk kedalam suatu model yang memenuhi kondisi Karush Kuhn Tucker:

1. $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} + s_i = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$

   untuk i = 1, $\quad 2x_1 + x_2 - 12 - 2\lambda_1 + s_1 = 0$

   untuk i = 2, $\quad x_1 + 2x_2 - 9 - \lambda_1 + s_2 = 0$

2. $\lambda_j[b_j - g_j(x)] = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., m)$

   $\lambda_1[12 - (2x_1 + x_2)] = 0$

3. $x_i \left[\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} \right] = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$

   untuk i = 1, $\quad x_1[2x_1 + x_2 - 12 - 2\lambda_1] = 0$

   untuk i = 2, $\quad x_2[x_1 + 2x_2 - 9 - \lambda_1] = 0$

4. $\lambda_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, ..., m)$

   $\lambda_1 \geq 0$

5. $s_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$

   $s_1, s_2 \geq 0$

dari kondisi 1 dan 3, yakni:

untuk i = 1

$$2x_1 + x_2 - 12 - 2\lambda_1 + s_1 = 0$$
$$x_1[2x_1 + x_2 - 12 - 2\lambda_1] = 0$$

dan untuk i = 2

$$x_1 + 2x_2 - 9 - \lambda_1 + s_2 = 0$$
$$x_2[x_1 + 2x_2 - 9 - \lambda_1] = 0$$

Maka, dapat diketahui *complementary slackness*nya ialah:

$$s_1 x_1 = 0$$
$$s_2 x_2 = 0$$

Selanjutnya untuk kendala:

$$2x_1 + x_2 \leq 12$$

dapat diubah menjadi bentuk:

$$12 - x_1 - x_2 + s_1' = 0$$

Sehingga, apabila disesuaikan dengan kondisi 2, maka:

$$12 - x_1 - x_2 + s_1' = 0$$

$$\lambda_1[12 - (2x_1 + x_2)] = 0$$

dan didapatkan *complementary slackness*nya ialah:

$$\lambda_1 s_1' = 0$$

Setelah *complementary slackness* telah didapat, maka tahap selanjutnya ialah membentuk fungsi tujuan baru yang minimum dan linear dengan menambahkan variabel buatan, yakni:

Minimum

$$w_1 + w_2$$

dengan kendala:

$$2x_1 + x_2 - 2\lambda_1 + s_1 + w_1 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 - \lambda_1 + s_2 + w_2 = 9$$

$$2x_1 + x_2 + s_1' = 12$$

Sehingga, didapat bentuk tabel *Wolfe*nya:

Tabel 2.12: Tabel *Wolfe* awal

	c_i	0	0	0	0	0	1	1	0	
c_j^*	v_j^*/v_i	x_1	x_2	λ_1	s_1	s_2	w_1	w_2	s_1'	b_j
1	w_1^*	2	1	-2	1	0	1	0	0	12
1	w_2^*	1	2	-1	0	1	0	1	0	9
0	$s_1'^*$	2	1	0	0	0	0	0	1	12
	z_i	3	3	-3	1	1	1	1	0	
	$z_i - c_i$	3	3	-3	1	1	0	0	0	
	ψ_i	**5**	4	-3	1	1	1	1	1	

Pada tabel ini kolom x_1 akan menjadi kolom kunci karena memiliki nilai ψ_j terbesar. Selanjutnya akan dicari baris kunci dengan cara mencari nilai ratio (nilai kolom b_j dibagi oleh nilai kolom kunci tiap baris) dari masing-masing baris. Sehingga didapat tabel berikutnya ialah:

Tabel 2.13: Tabel *Wolfe* awal dengan variabel basis

	c_i	0	0	0	0	0	1	1	0		
c_j^*	v_j^*/v_i	x_1	x_2	λ_1	s_1	s_2	w_1	w_2	s_1'	b_j	r_j
1	w_1^*	**2**	1	-2	1	0	1	0	0	12	**6**
1	w_2^*	1	2	-1	0	1	0	1	0	9	9
0	$s_1^{*'}$	2	1	0	0	0	0	0	1	12	6
	z_i	3	3	-3	1	1	1	1	0		
	$z_i - c_i$	3	3	-3	1	1	0	0	0		
	ψ_i	**5**	4	-3	1	1	1	1	1		

Setelah kolom x_1 terpilih menjadi kolom kunci, selanjutnya baris w_1^* akan menjadi baris kunci karena memiliki nilai ratio positif terkecil. Sehingga mengakibatkan nilai yang ada pada perpotongan antara x_1 dan w_1^* akan menjadi variabel basis. Selanjutnya akan dilakukan iterasi, sehingga didapatkan tabel sebagai berikut :

Tabel 2.14: Tabel *Wolfe* hasil iterasi pertama

	c_i	0	0	0	0	0	1	1	0	
c_j^*	v_j^*/v_i	x_1	x_2	λ_1	s_1	s_2	w_1	w_2	s_1'	b_j
0	x_1	1	1/2	-1	1/2	0	1/2	0	0	6
1	w_2^*	0	3/2	0	-1/2	1	-1/2	1	0	3
0	$s_1^{*'}$	0	0	2	-1	0	-1	0	1	0
	z_i	0	3/2	0	-1/2	1	-1/2	1	0	
	$z_i - c_i$	0	3/2	0	-1/2	1	-3/2	0	0	
	ψ_i	1	**2**	1	-1	1	-1	1	1	

Kolom x_2 akan menjadi kolom kunci karena memiliki nilai ψ_j terbesar. Selanjutnya akan ditentukan baris kunci dengan mencari nilai ratio tiap baris. Sehingga didapatkan tabel sebagai berikut:

Tabel 2.15: Tabel *Wolfe* hasil iterasi pertama dengan variabel basis

	c_i	0	0	0	0	0	1	1	0		
c_j	v_j^*/v_i	x_1	x_2	λ_1	s_1	s_2	w_1	w_2	s_1'	b_j	r_j
0	x_1	1	1/2	-1	1/2	0	1/2	0	0	6	12
1	w_2	0	**3/2**	0	-1/2	1	-1/2	1	0	3	**2**
0	s_1'	0	0	2	-1	0	-1	0	1	0	0
	z_i	0	3/2	0	-1/2	1	-1/2	1	0		
	$z_i - c_i$	0	3/2	0	-1/2	1	-3/2	0	0		
	ψ_i	1	**2**	1	-1	1	-1	1	1		

Setelah kolom x_2 terpilih menjadi kolom kunci, selanjutnya baris w_2 akan menjadi baris kunci karena memiliki nilai ratio positif terkecil. Sehingga mengakibatkan nilai yang ada pada perpotongan antara x_2 dan w_2 akan menjadi variabel basis. Selanjutnya akan dilakukan iterasi, sehingga didapatkan tabel sebagai berikut :

Tabel 2.16: Tabel *Wolfe* hasil iterasi kedua

	c_i	0	0	0	0	0	1	1	0	
c_j	v_j^*/v_i	x_1	x_2	λ_1	s_1	s_2	w_1	w_2	s_1'	b_j
0	x_1	1	0	-1	2/3	-1/3	2/3	-1/3	0	5
0	x_2	0	1	0	-1/3	2/3	-1/3	2/3	0	2
0	s_1'	0	0	2	-1	0	-1	0	1	0
	z_i	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$z_i - c_i$	0	0	0	0	0	-1	-1	0	

Setelah dilakukan dua kali proses iterasi didapatkan tabel bahwa tabel memenuhi kondisi optimal $z_i - c_i \leq 0$. Sehingga, nilai optimal untuk $x_1 = 5$ dan $x_2 = 2$. Sehingga, apabila nilai x_1 dan x_2 disubtitusikan kedalam fungsi tujuan awal, maka akan didapat :

$$f(x) = (5)^2 + (2)^2 - 12(5) - 9(2) + (5)(2) = -39$$

BAB III

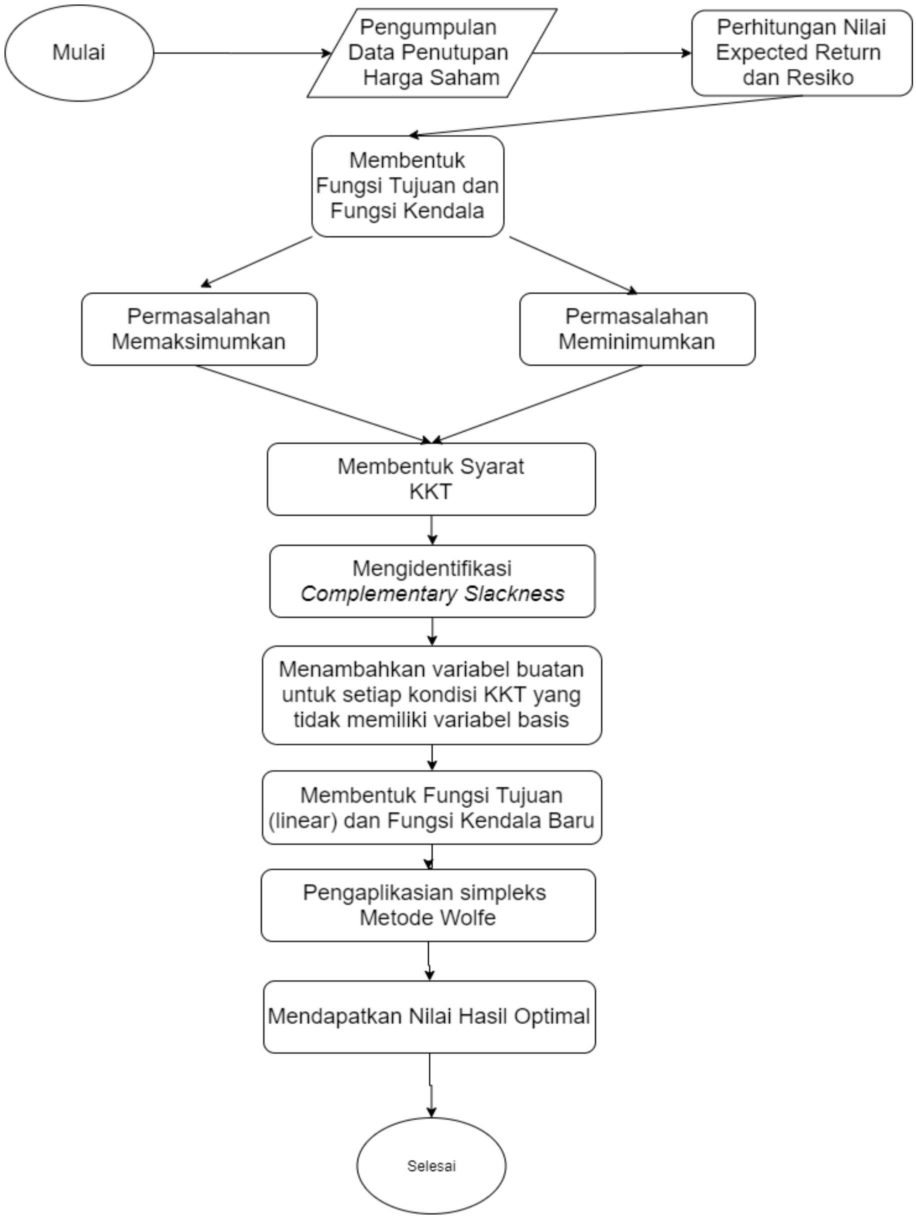
DESAIN MODEL

Berikut merupakan tahapan proses penelitian selanjutnya:

1. Mengumpulkan data (harga saham pada periode tertentu).
2. Melakukan perhitungan nilai *expected return* dan risiko dari masing-masing saham
3. Membentuk fungsi tujuan dan fungsi kendala dari nilai *expected return* dan risiko yang didapat dalam bentuk permasalahan pemrograman kuadratik.
4. Mengidentifikasi fungsi yang didapat untuk menentukan jenis permasalahan (meminimumkan atau memaksimumkan).
5. Membentuk model KKT.
6. Mengidentifikasi *Complementary Slackness*.
7. Menambahkan variabel buatan (w_i) untuk setiap kondisi *Karush Kuhn Tucker* yang tidak memiliki variabel basis.
8. Membentuk fungsi tujuan baru (linear) dengan cara meminimalkan jumlah nilai variabel buatan (w_i) dan fungsi kendala baru yang didapatkan dari persamaan KKT.
9. Mengaplikasikan simpleks metode *Wolfe*.
10. Menentukan saham yang memiliki nilai optimal.

3.1 Diagram Alir Penelitian

Berikut merupakan diagram alir tahapan proses penelitian:



Gambar 3.1: Diagram Alir Penelitian

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas lebih lanjut mengenai contoh pengaplikasian metode *Wolfe* untuk menyelesaikan permasalahan pemrograman kuadratik, pembuatan model matematika portofolio optimal serta perhitungan pemilihan portofolio saham optimal dengan menggunakan metode *Wolfe*.

4.1 Aplikasi Metode *Wolfe pada Pemrograman Kuadratik*

Metode *Wolfe* merupakan salah satu metode yang dapat menyelesaikan dan menemukan solusi optimal pada permasalahan pemrograman kuadratik. Terdapat langkah-langkah tertentu yang harus dilakukan untuk mendapatkan solusi optimal. Berikut merupakan langkah-langkah pengaplikasian metode *Wolfe* untuk menyelesaikan permasalahan pemrograman kuadratik:

$$\text{Maksimum} \qquad f(x) = c^T x + \tfrac{1}{2} x^T Q x$$

dengan kendala:

$$Ax \leq b_i$$
$$\text{x} \geq 0$$

Maka, lakukan pengubahan tanda pertidaksamaan menjadi sebuah persamaan dengan menambahkan variabel *slack* (s_i^2). Kemudian dibentuk fungsi *Lagrange*

$$L(x, \lambda) = c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x - \lambda \sum_{i=1}^{n} (A_i(x) - b_i)$$

dan dibentuk dan disesuaikan dengan kondisi *Karush Kuhn Tucker* (permasalahan memaksimumkan), sebagai berikut:

- $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} + s_i = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$
- $\lambda_j[b_j - g_j(x)] = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., m)$
- $x_i \left[\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}\right] = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$
- $\lambda_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, ..., m)$
- $s_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$

Selanjutnya identifikasi *complementary slackness* atau kendala komplementaris, dimana hal tersebut diperoleh dari kondisi *Karush Kuhn Tucker* yang berbentuk:

$$x_1 \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial A_j(x)}{\partial x_1}\right] = 0 \leftrightarrow x_1 s_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$x_i \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial A_j(x)}{\partial x_j}\right] = 0 \leftrightarrow x_i s_i = 0$$

dan

$$\lambda_j[b_j - A_j(x)] = 0 \leftrightarrow \lambda_j s'_j = 0.$$

Sehingga, terlihat bahwa setiap pasang (x_1, s_1), ..., (x_i, s_i) dan (λ_j, s'_j) merupakan variabel komplementer karena hanya satu dari dua variabel tersebut yang dapat bernilai nol. Kendala komplementer tersebut digabung dan akan menjadi satu kendala, yakni:

$$x_1 s_1 + ... + x_i s_i + \lambda_j s'_j = 0$$

Selanjutnya, tambahkan variabel buatan (z_i) untuk setiap kondisi *Karush Kuhn Tucker* yang tidak memiliki variabel basis. Lalu buat fungsi tujuan baru yang linear yakni dengan meminimalkan jumlah nilai variabel buatan (z_i).

$$\text{Minimum } W = w_1 + w_2 + ... + w_n$$

Terakhir, lakukan proses iterasi simpleks dengan menggunakan ketentuan simpleks metode *Wolfe* hingga diperoleh hasil yang optimal.

4.2 Pembentukan Model Portofolio Optimal

Model portofolio saham dapat dibentuk dengan menggunakan teori portofolio Harry M. Markowitz. Dalam teori tersebut akan dibutuhkan harga penutupan saham pada kurun periode tertentu agar dapat dicari nilai *expected return* dan nilai varians (sebagai nilai risiko). Selanjutnya nilai-nilai tersebut akan dibentuk kedalam model nonlinear (pemrograman kuadratik).

4.2.1 Deskripsi Data

Data atau objek penelitian pada studi kasus ini adalah data harga penutupan saham mingguan pada saham-saham yang tergabung dalam indeks INFOBANK15 (lampiran I). Data harga penutupan saham mingguan yang akan dipakai dimulai dari periode 1 Januari 2019 sampai dengan 31 Desember 2019 yang diambil dari situs https://finance.yahoo.com (dapat dilihat pada lampiran II). Indeks ini dipilih karena bidang perbankan merupakan salah satu bidang yang potensial dan sering dipilih oleh investor sebagai tempat menanamkan modal serta memiliki faktor fundamental yang baik dengan likuiditas perdagangan yang tinggi dan stabil. Bidang perbankan juga merupakan salah satu bidang penting yang sangat berpengaruh dalam perekonomian negara dan mudah untuk ditransaksikan.

4.2.2 *Return, Expected Return* dan Risiko

Dari data pada lampiran II akan dihitung nilai *Return*, *Expected Return*, dan varians (sebagai nilai risiko).

Return dan *Expected Return*

Tabel data penutupan harga saham yang ada pada lampiran II selanjutkan akan digunakan untuk mencari nilai *return* dan *expected return*. Untuk mendapatkan nilai *return* saham, maka akan digunakan persamaan (2.1), sedangkan untuk mencari nilai *expected return* saham dapat menggunakan persamaan (2.2). Lebih lanjut, data *return* dan *expected return* saham akan tertera secara lengkap pada lampiran III.

Pada perhitungan selanjutnya akan menggunakan metode manual, maka dari itu, hanya akan diambil 2 sample saham yang memiliki nilai *expected return* tertinggi, yakni saham Bank Pan Indonesia (PNBN) dengan nilai $E(R_{PNBN}) = 0,00602$ dan Bank Central Asia Tbk (BBCA) dengan nilai $E(R_{BBCA}) = 0,004992$ yang selanjutnya akan ditentukan nilai proporsinya.

Risiko

Menurut Harry M. Markowitz, nilai varians dari suatu saham dapat merepresentasikan atau menunjukkan nilai risikonya. Maka dari itu, perhitungan nilai risiko dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan (2.6). Sehingga, nilai risiko dari setiap bank (σ^2) dapat dicari dengan membagi nilai total hasil pengurangan antara *return* pada periode ke-t dengan *expected return* terhadap banyaknya data yang diambil pada periode tersebut.

Sehingga, nilai risiko bank PNBN untuk periode data yang diambil mingguan selama satu tahun, yakni 53 minggu adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2_{PNBN} &= \frac{\sum_{i=1}^{53}(R_{(PNBN)_t} - E(R_{(PNBN)}))^2}{53-1} \\
&= \frac{(R_{(PNBN)_1} - E(R_{(PNBN)})^2 + ... + (R_{(PNBN)_53} - E(R_{(PNBN)}))^2}{52} \\
&= \frac{(0-0.006002)^2 + ... + (0-0.006002)^2}{52} \\
&\approx 0,00285
\end{aligned}
$$

dengan $R_{(PNBN)_t}$ merupakan nilai *return* mingguan saham bank PNBN yang pada minggu pertama nilainya adalah 0. Lalu selanjutnya dikurangi dengan nilai $E(R_{(PNBN)})$ *expected return*nya. Selanjutnya nilai hasil pengurangan tersebut dikuadratkan dan dibagi dengan banyaknya jumlah data (minggu) dikurangi satu (n-1). Maka, didapatkan nilai risiko untuk saham bank PNBN ialah sebesar 0,00285.

Sedangkan untuk nilai risiko bank BBCA:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2_{BBCA} &= \frac{\sum_{i=1}^{53}(R_{(BBCA)_i} - E(R_{(BBCA)}))^2}{53-1} \\
&= \frac{(R_{(BBCA)_1} - E(R_(BBCA)))^2 + ... + (R_{(BBCA)_53} - E(R_{(BBCA)}))^2}{52} \\
&= \frac{(0-0,004992)^2 + ... + (0-0,004992)^2}{52} \\
&\approx 0,000356
\end{aligned}
$$

dengan $R_{(BBCA)_t}$ merupakan nilai *return* mingguan saham bank PNBN yang pada minggu pertama nilainya adalah 0. Lalu selanjutnya dikurangi dengan nilai $E(R_{(BBCA)})$ *expected return*nya. Selanjutnya nilai hasil pengurangan tersebut dikuadratkan dan dibagi dengan banyaknya jumlah data (minggu) dikurangi satu (n-1). Maka, didapatkan nilai risiko untuk saham bank PNBN ialah sebesar 0,000356.

Sedangkan untuk mendapatkan nilai kovarian dari bank PNBN dan bank BBCA, maka dapat menggunakan persamaan (2.7) dimana nilai kovarian merupakan hasil pembagian antara total pengurangan *return* pada periode ke-t dengan *expected return* terhadap banyaknya data yang diambil pada periode tersebut. Sehingga didapatkan hasil:

$$\begin{aligned} Cov(R_{PNBN}, R_{BBCA}) &= \sigma_{PNBN,BBCA} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{53}[R_{PNBNi} - E(R_{PNBN})].[R_{BBCA_i} - E(R_{BBCA})]}{53-1} \\ &\approx 0,000193 \end{aligned}$$

Sehingga, didapatkan nilai resiko dari saham bank PNBN ialah sebesar 0,00285 dan nilai resiko untuk saham bank BCA ialah 0,000356 dengan nilai kovarian antara saham bank PNBN dan BCA ialah sebesar 0,000193 dimana hal tersebut menyatakan bahwa kedua saham bergerak secara positif secara bersamaan.

4.2.3 Pembentukan Model Khusus pada Contoh Kasus

Pada pembentukan portofolio ini, diilustrasikan seorang investor memiliki sejumlah dana dan akan diinvestasikan pada kedua saham perbankan nasional yakni pada Bank Pan Indonesia (PNBN) dan Bank Central Asia Tbk (BBCA) dengan asumsi tidak ada broker, biaya transaksi dan pajak diabaikan. Pada kasus ini investor yang akan berinvestasi merupakan seorang pemula dalam hal investasi saham sehingga sangat memperhatikan dan mempertimbangkan nilai risik0, maka dari itu akan diasumsikan nilai $\alpha = 1$.

Untuk membentuk fungsi kendala dan fungsi tujuan, maka diperlukan variabel keputusan x^*. Maka dari itu, dinyatakan bahwa variabel x_1 adalah besarnya proporsi saham yang akan diinvestasikan pada Bank Pan Indonesia (PNBN), sedangkan variabel x_2 akan menyatakan besarnya proporsi saham yang akan diinvestasikan pada Bank Central Asia Tbk (BBCA). Pembentukan fungsi tujuan dan fungsi kendala akan mengacu pada teori Frederick S.

(2001), sehingga terbentuk persamaan:

$$\begin{aligned} f(x) &= E(R_p) - \alpha\sigma_p^2 \\ &= [\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i)] - \alpha[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\sigma_i^2 + 2x_i x_j \sigma_{i,j}] \end{aligned}$$

untuk i $\neq$ j.

Subtitusikan seluruh nilai yang telah didapat sebelumnya, maka akan diperoleh sebuah bentuk fungsi tujuan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x) &= [E(R_{PNBN})x_1 + E(R_{BBCA})x_2] - 1[\sigma_{PNBN}^2 x_1^2 + \sigma_{BBCA}^2 x_2^2 + \sigma_{PNBN,BBCA} x_1 x_2] \\ &= [0.006002x_1 + 0,004992x_2] - [0,00285x_1^2 + 0,00356x_2^2 + (2)(0,000193)x_1x_2] \end{aligned}$$

dan fungsi kendala dapat ditulis sebagai berikut:

$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Selanjutnya, setelah mendapatkan model fungsi tujuan

$$f(x) = -0,00285x_1^2 - 0,00356x_2^2 - 0,000386x_1x_2 + 0,006002x_1 + 0,004992x_2$$

dan fungsi kendala:

$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

maka akan diidentifikasi kedalam bentuk umum permasalahan pemrograman kuadratik.

Sesuai dengan persamaan 2.15, maka akan dibentuk vektor c yang merupakan koefisien dari x, sehingga :

$$c = \begin{bmatrix} 0,006002 \\ 0,004992 \end{bmatrix} \text{ atau } c^T = \begin{bmatrix} 0,006002 & 0,004992 \end{bmatrix}.$$

dan vektor x sebagai matriks kolom dari variabel-variabel keputusan :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Matriks Q adalah matriks yang terdiri dari turunan kedua x_1 dan x_2

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -0,0057x_1 - 0,000386x_2 + 0,006002 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -0,0057$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -0,000712x_2 - 0,000386x_1 + 0,004992 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -0,000712$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} = -0,000386$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} = -0,000386$$

Maka matriks Q dapat ditulis

$$Q = \begin{bmatrix} -0,0057 & -0,000386 \\ -0,000386 & -0,000712 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari sifat definit matriks Q dengan menggunakan

Sehingga, bentuk umum dari permasalahan pemrograman kuadratik :

$$f(x) = c^T x + \tfrac{1}{2} x^T Q x + d$$

dapat ditulis menjadi :

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0,00602 & 0,004992 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} +$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0057 & -0,000386 \\ -0,000386 & -0,000712 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Dengan kendalanya yaitu

$$g_1(x) = x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Selanjutnya akan dibentuk matriks *Hessian* terbatas untuk menentukan permasalahan yang dibentuk oleh model. Sehingga bentuk fungsi *Lagrange* nya adalah :

$$\begin{aligned} L &= -0,00285x_1^2 - 0,000356x_2^2 - 0,000386x_1x_2 + 0,006002x_1 + 0,004992x_2 \\ &\quad -\lambda_1(x_1 + x_2 - 1) \end{aligned}$$

Maka, akan didapat:

$\frac{\partial L}{\partial_{\lambda_1}} = x_1 + x_2 - 1$

$\frac{\partial L}{\partial_{x_1}} = -0,0057x_1 - 0,000386x_2 + 0,006002 - \lambda_1 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial_{x_2}} = -0,000712x_2 - 0,000386x_1 + 0,004992 - \lambda_1 = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -0,0057$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -0,000712$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} = -0,000386$

dan dari kendala, akan didapat:

$\frac{\partial g}{\partial_{x_1}} = 1$

$\frac{\partial g}{\partial_{x_2}} = 1$

Sehingga, bentuk matriks *Hessian* terbatasnya adalah

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -0,0057 & -0,000386 \\ 1 & -0,000386 & -0,000712 \end{vmatrix} = 0,00499264 > 0$$

Jadi karena matriks $|\bar{H}| > 0$ maka pada optimasi produksi ini merupakan suatu permasalahan memaksimumkan .

Karena pada masalah ini adalah memaksimumkan selanjutnya, akan dilihat apakah Persamaan (4.10) dan Persamaan (4.11) adalah fungsi konveks atau konkaf.

Berdasarkan syarat *Karush Kuhn Tucker* dalam masalah memaksimalkan, fungsi tujuan yang akan dimaksimalkan haruslah konkaf dan fungsi kendalanya konveks. Maka akan dibuktikan dengan melihat turunan parsialnya. Berikut merupakan turunan parsial kedua dari fungsi tujuan

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} = -0,0057 < 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} = 0,000712 < 0$$

Karena $f"(x) = \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x} < 0$ maka berdasarkan Teorema uji konveksitas fungsi, fungsi tujuan merupakan fungsi konkaf. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa fungsi kendala merupakan fungsi konveks, yaitu dilihat dari turunannya.

Diperoleh turunan pertama dari fungsi kendala ialah sebagai berikut

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} = 1 > 0$$
$$\frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} = 1 > 0$$

Maka berdasarkan Teorema uji konveksitas fungsi, fungsi kendala merupakan fungsi konveks. Dikarenakan fungsi tujuan adalah konkaf dan fungsi kendala konveks maka digunakan syarat *Karush Kuhn Tucker* sebagai syarat perlu dan syarat cukup untuk mencapai nilai optimal. Oleh karena itu permasalahan pemrograman kuadratik *Quadratic Programming* ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metode *Wolfe*.

4.3 Penyelesaiaan Model dengan *Quadratic Programming* Metode *Wolfe*

Setelah menentukan model maatematika fungsi tujuan dan fungsi kendala untuk permasalahan memaksimumkan, maka pada bagian ini permasalahan tersebut akan diselesaikan dengan menggunakan metode *Wolfe*.

4.3.1 Penyelesian Model dengan Menggunakan *Quadratic Programming*

Memaksimalkan :

$$f(x) \quad = \quad -0,00285x_1^2 - 0,00356x_2^2 - 0,000386x_1x_2 + 0.006002x_1 + 0.004992x_2$$

dan fungsi kendala:

$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Selanjutnya model di atas akan dibentuk dan disesuaikan dengan kondisi *Karush Kuhn Tucker* yang merupakan syarat dari metode *Wolfe*. Sehingga didapatkan hasil sebagai berikut:

1. $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} + s_i = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$

$$\frac{\partial L}{\partial_{x_1}} = -0,0057x_1 - 0,000386x_2 + 0,006002$$
$$\frac{\partial L}{\partial_{x_2}} = -0,000712x_2 - 0,000386x_1 + 0,004992$$
$$\lambda_1 \frac{\partial g}{\partial_{x_1}} = \lambda_1 1 = \lambda_1$$
$$\lambda_1 \frac{\partial g}{\partial_{x_2}} = \lambda_1 1 = \lambda_1$$

untuk i = 1, $\qquad -0,0057x_1 - 0,000386x_2 + 0,00602 - \lambda_1 + s_1 = 0$

untuk i = 2, $\qquad -0,000712x_2 - 0,000386x_1 + 0,004992 - \lambda_1 + s_2 = 0$

2. $\lambda_j[b_j - g_j(x)] = 0$ $\quad (j = 1, 2, ..., m)$

   $\lambda_1[1 - (x_1 + x_2)] = 0$

3. $x_i \left[\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}\right] = 0$ $\quad (i = 1, 2, ..., n)$

   untuk i = 1, $\quad x_1[-0,0057x_1 - 0,000386x_2 + 0,006002 - \lambda_1] = 0$

   untuk i = 2, $\quad x_2[-0,000712x_2 - 0,000386x_1 + 0,004992 - \lambda_1] = 0$

4. $\lambda_j \geq 0$ $\quad (j = 1, 2, ..., m)$

   $\lambda_1 \geq 0$

5. $s_i \geq 0$ $\quad (i = 1, 2, ..., n)$

   $s_1, s_2 \geq 0$

Setelah diidentifikasi, maka didapatkan kondisi sebagai berikut :

$$-0,0057x_1 - 0,000386x_2 + 0,006002 - \lambda_1 + s_1 = 0$$

$$-0,000712x_2 - 0,000386x_1 + 0,004992 - \lambda_1 + s_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

Mengidentifikasi *complementary slackness*

Dari kondisi *Karush Kuhn Tucker* yang telah dibentuk, dapat dilihat *complementary slackness*nya berdasarkan Teorema (2.5.1) pada sub bab *Quadratic Programming* dan aturan *complementary slackness* metode wolfe.

Berdasarkan kondisi ke-1 ke-3 *Karush Kuhn Tucker* yang dibentuk, yaitu :

$$-0,0057x_1 - 0,000386x_2 + 0,006002 - \lambda_1 + s_1 = 0$$

$$x_1[-0,0057x_1 - 0,000386x_2 + 0,006002 - \lambda_1] = 0$$

dan

$$-0,000712x_2 - 0,000386x_1 + 0,004992 - \lambda_1 + s_2 = 0$$

$$x_2[-0,000712x_2 - 0,000386x_1 + 0,004992 - \lambda_1] = 0$$

kondisi *complementary slackness* nya adalah

$$s_1x_1 = 0$$

$$s_2x_2 = 0$$

Berdasarkan kondisi ke 2 *Karush Kuhn Tucker*, yaitu :

$$\lambda_1[1 - (x_1 + x_2)] = 0$$

$$x_1 + x_2 + s_1' = 1$$

maka kondisi *complementary slackness* nya adalah

$$\lambda_1 s_1' = 0$$

Membuat fungsi tujuan baru linear

Sebelum membuat fungsi tujuan baru (linear), maka terlebih dahulu akan ditambahkan variabel buatan *(artificial variable)* z_i untuk setiap kondisi *Karush Kuhn Tucker* yang tidak memiliki variabel basis.

Persamaan yang tidak memiliki variabel basis dan harus ditambahkan variabel buatan w_i akan menjadi:

$$0,0057x_1 + 0,000386x_2 - 0,006002 + \lambda_1 - s_1 + w_1 = 0$$

$$0,000712x_2 + 0,000386x_1 - 0,004992 + \lambda_1 - s_2 + w_2 = 0$$

Sehingga dapat dibentuk fungsi linear yang baru, yakni :

Meminimumkan

$$W = w_1 + w_2 \tag{4.1}$$

dengan kendala

$$0,0057x_1 + 0,000386x_2 + \lambda_1 - s_1 + w_1 = 0,006002$$

$$0,000712x_2 + 0,000386x_1 + \lambda_1 - s_2 + w_2 = 0,004992$$

$$x_1 + x_2 + s_1' = 1$$

dan semua variabel non negatif.

Sesuai dengan sifat dan tujuan dari metode *Wolfe* yaitu dengan meminimumkan variabel buatan, maka selanjutnya dapat dilakukan iterasi simpleks sesuai Metode *Wolfe*.

4.3.2 Proses Iterasi Simpleks Metode *Wolfe*

Pada sub bab ini akan dilakukan proses iterasi simpleks metode *Wolfe* dengan menggunakan fungsi tujuan linear dan fungsi kendala baru yang telah didapat dari sub bab sebelumnya. Sehingga fungsi tujuan dan fungsi kendala baru yang telah didapat sebelumnya bisa dibentuk dalam tabel simpleks sebagai berikut :

Tabel 4.1: Tabel Wolfe awal

	c_i	0	0	0	0	0	1	1	0	
c_j	v_j^*/v_i	x_1	x_2	λ_1	s_1	s_2	w_1	w_2	s_1'	b_j
1	w_1^*	0,0057	0,000386	1	-1	0	1	0	0	0,006002
1	w_2^*	0,000386	0,000712	1	0	-1	0	1	0	0,004992
0	$s_1'^*$	1	1	0	0	0	0	0	1	1
	z_i	0,006086	0,001098	2	-1	-1	1	1	0	
	$z_i - c_i$	0,006086	0,001098	2	-1	-1	0	0	0	
	ψ_i	1,006086	1,001098	2	-1	-1	1	1	1	

Nilai z_i merupakan jumlah hasil kali perkalian antara tiap kolom dengan nilai c_j yang terletak pada baris yang sama. Nilai $z_i - c_i$ merupakan nilai hasil pengurangan baris z_i dengan c_i. Sedangkan nilai ψ_i akan menjadi penentu nilai kolom kunci (dengan syarat variabel *slack* tidak dapat terpilih menjadi variabel basis) karena merupakan jumlah nilai tiap kolom.

Pada tabel ini kolom λ_1 akan menjadi kolom kunci dan selanjutnya akan dicari baris kunci dengan cara mencari nilai ratio (nilai kolom b_i dibagi oleh nilai kolom kunci tiap baris) dari masing-masing baris. Sehingga didapat tabel berikutnya ialah:

Tabel 4.2: Tabel Wolfe awal dengan variabel basis

	c_i	0	0	0	0	0	1	1	0		
c_j	v_j^*/v_i	x_1	x_2	λ_1	s_1	s_2	w_1	w_2	s_1'	b_j	r_j
1	w_1^*	0,0057	0,000386	1	-1	0	1	0	0	0,006002	0,006002
1	w_2^*	0,000386	0,000712	1	0	-1	0	1	0	0,004992	0,004992
0	$s_1'^*$	1	1	0	0	0	0	0	1	1	
	z_i	0,006086	0,001098	2	-1	-1	1	1	0		
	$z_i - c_i$	0,006086	0,001098	2	-1	-1	0	0	0		
	ψ_i	1,006086	1,001098	2	-1	-1	1	1	1		

Setelah kolom λ_1 terpilih menjadi kolom kunci, selanjutnya baris w_2^* akan menjadi baris kunci karena memiliki nilai ratio positif terkecil. Sehingga mengakibatkan nilai yang ada pada perpotongan antara λ_1 dan w_2^* akan menjadi variabel basis. Selanjutnya akan dilakukan iterasi, sehingga didapatkan tabel sebagai berikut :

Tabel 4.3: Tabel Wolfe hasil iterasi pertama

	c_i	0	0	0	0	0	1	1	0	
c_j	v_j^*/v_i	x_1	x_2	λ_1	s_1	s_2	w_1	w_2	s_1'	b_j
1	w_1^*	0,005314	-0,000326	0	-1	1	1	-1	0	0,00101
0	λ_1	0,000386	0,000712	1	0	-1	0	1	0	0,004992
0	$s_1'^*$	1	1	0	0	0	0	0	1	1
	z_i	0,005314	-0,000326	0	-1	1	1	-1	0	
	$z_i - c_i$	0,005314	-0,000326	0	-1	1	0	-2	0	
	ψ_i	1,0057	1,000386	1	-1	0	1	0	1	

Kolom x_1 akan menjadi kolom kunci karena memiliki nilai psi_j terbesar. Selanjutnya akan ditentukan baris kunci dengan mencari nilai ratio tiap baris.

Sehingga didapatkan tabel sebagai berikut:

Tabel 4.4: Tabel Wolfe hasil iterasi pertama dengan variabel basis

	c_i	0	0	0	0	0	1	1	0		
c_j	v_j^*/v_i	x_1	x_2	λ_1	s_1	s_2	w_1	w_2	s_1'	b_j	r_j
1	w_1^*	**0,005314**	-0,000326	0	-1	1	1	-1	0	0,00101	0,19
0	λ_1	0,000386	0,000712	1	0	-1	0	1	0	0,004992	12,932
0	$s_1'^*$	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
	z_i	0,005314	-0,000326	0	-1	1	1	-1	0		
	$z_i - c_i$	0,005314	-0,000326	0	-1	1	0	-2	0		
	ψ_i	1,0057	1,000386	1	-1	0	1	0	1		

Setelah kolom x_1 terpilih menjadi kolom kunci, selanjutnya baris w_1^* akan menjadi baris kunci karena memiliki nilai ratio positif terkecil. Sehingga mengakibatkan nilai yang ada pada perpotongan antara x_1 dan w_1^* akan menjadi variabel basis. Selanjutnya akan dilakukan iterasi, sehingga didapatkan tabel sebagai berikut :

Tabel 4.5: Tabel Wolfe hasil iterasi kedua

	c_i	0	0	0	0	0	1	1	0	
c_j	v_j^*/v_i	x_1	x_2	λ_1	s_1	s_2	w_1	w_2	s_1'	b_j
0	x_1	1	-0,06	0	-188,1	188,1	188,1	-188,1	0	0,19
0	λ_1	0	0,000735	1	0.0726	-1.0726	-0.0726	1.0726	0	0.00491
0	$s_1'^*$	0	1,06	0	188.1	-188.1	-188.1	188.1	1	0,809
	z_i	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$z_i - c_i$	0	0	0	0	0	-1	-1	0	
	ψ_i	1	1,000735	1	-0.0726	1.0726	-0.0726	1.0726	1	

Walaupun $z_j - c_j \leq 0$, tetapi nilai x_2 belum mencapai hasil optimal, maka proses iterasi masih akan dilakukan dengan kolom x_2 terpilih menjadi kolom kunci karena memiliki nilai psi_j terbesar. Selanjutnya akan ditentukan baris kunci dengan mencari nilai ratio tiap baris. Sehingga didapatkan tabel sebagai berikut:

Tabel 4.6: Tabel Wolfe hasil iterasi kedua dengan variabel basis

	c_i	0	0	0	0	0	1	1	0		
c_j	v_j^*/v_i	x_1	x_2	λ_1	s_1	s_2	w_1	w_2	s_1'	b_j	r_j
0	x_1	1	-0,06	0	-188,1	188,1	188,1	-188,1	0	0,19	-3,16
0	λ_1	0	0,000735	1	0.0726	-1.0726	-0.0726	1.0726	0	0.00491	6,68
0	$s_1'^*$	0	1,06	0	188.1	-188.1	-188.1	188.1	1	0,809	0,764
	z_i	0	0	0	0	0	0	0	0		
	$z_i - c_i$	0	0	0	0	0	-1	-1	0		
	ψ_i	1	1,000735	1	0.0726	-1.0726	-0.0726	1.0726	1		

Setelah kolom x_2 terpilih menjadi kolom kunci, selanjutnya baris $s_1'^*$ akan menjadi baris kunci karena memiliki nilai ratio positif terkecil. Sehingga mengakibatkan nilai yang ada pada perpotongan antara x_2 dan $s_1'^*$ akan menjadi variabel basis. Selanjutnya akan dilakukan iterasi, sehingga didapatkan tabel sebagai berikut :

Tabel 4.7: Tabel Wolfe hasil iterasi ketiga

	c_i	0	0	0	0	0	1	1	0	
c_j	v_j^*/v_i	x_1	x_2	λ_1	s_1	s_2	w_1	w_2	s_1'	b_j
0	x_1	1	0	0	-177.45	198.747	177.45	-198.747	0.0566	0.2357
0	λ_1	0	0	1	0.856	-1.203	0.856	-1.203	-0,000694	0.00434
0	x_2	0	1	0	177,45	-177,45	-177,45	177,45	0,943	0,764
	z_i	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$z_i - c_i$	0	0	0	0	0	-1	-1	0	

Setelah dilakukan iterasi ketiga, maka didapatkan tabel di atas memenuhi kondisi $z_i - c_i \leq 0$ dan memiliki nilai x_1 dan x_2 optimal, yakni: $x_1 = 0{,}2357$ dan $x_2 = 0{,}764$.

Setelah mendapatkan nilai x_1 dan x_2 yang optimal, maka selanjutnya nilai tersebut akan disubtitusikan kedalam fungsi tujuan awal, yakni :

$$f(x) = -0,00285x_1^2 - 0,00356x_2^2 - 0,000386x_1x_2 + 0,006002x_1 + 0,004992x_2$$

maka, diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0,00285(0,2357^2) - 0,00356(0,764^2) - 0,000386(0,2357)(0,764) \\ &\quad +0,006002(0,2357) + 0,004992(0,764) \\ &= 0.52055 \end{aligned}$$

Sehingga, dari hasil analisis di atas didapatkan bahwa nilai proporsi optimal untuk saham Bank Pan Indonesia (PNBN) adalah sebesar 23,57% dan nilai proporsi optimal untuk Bank Central Asia Tbk (BBCA) adalah sebesar 76,4%. Hal tersebut menyatakan bahwa Bank Central Asia Tbk (BBCA) memiliki porsi lebih besar dan lebih potensial untuk memberikan keuntungan bagi investor. Selanjutnya, dari hasil analisis juga didapatkan bahwa nilai ekspektasi pengembalian untuk investasi selama satu tahun bagi investor ialah sebesar 52%.

BAB V

PENUTUP

Setelah dilakukan proses analisis pada bab IV, selanjutnya diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

5.1 Kesimpulan

Proses analisis yang dilakukan untuk menentukan nilai proporsi portofolio optimal pada *Quadratic Programming* dengan menggunakan metode *Wolfe*, menghasilkan kesimpulan:

1. Model pemrograman kuadratik dapat diselesaikan menggunakan metode *Wolfe* dengan tahapan sebagai berikut :

    - Membentuk fungsi *Lagrange*
    - Mencari turunan parsial pertama dan kedua untuk setiap variabel
    - Membentuk model KKT
    - Mengidentifikasi *complementary slackness*.
    - Menambahkan *artificial variable* (w_i)
    - Melakukan pembentukan fungsi tujuan baru (linear) dengan menggunakan metode *Wolfe*
    - Menentukan nilai optimal dengan melakukan iterasi tabel simpleks sesuai dengan aturan metode *Wolfe*.

2. Bentuk model matematika portofolio saham optimal yang dipakai merupakan bentuk dari Frederick S. dengan memakai 2 sampel saham, yakni Bank Pan Indonesia (PNBN) dan Bank Central Asia Tbk (BBCA) untuk periode 1 Januari 2019 sampai dengan 31 Desember 2019 dimana nilai proporsi sahamnya ditunjukkan dengan variabel x_1 dan x_2. Nilai *return*, *expected return* dan risiko dari kedua bank tersebut dicari menggunakan teori portofolio *Markowitz* melalui data penutupan harga saham mingguan (pada lampiran II). Sehingga diperoleh model optimal sebagai berikut:

   $$\begin{aligned} f(x) &= -0,00285x_1^2 - 0,00356x_2^2 - 0,000386x_1x_2 + 0,006002x_1 \\ &\quad +0,004992x_2 \end{aligned}$$

   dengan kendala:

   $$x_1 + x_2 \leq 1$$
   $$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. Proses analisis metode *Wolfe* dengan bentuk model diatas menghasilkan nilai proporsi optimal untuk Bank Pan Indonesia (PNBN) sebesar 23,57% dan nilai proporsi optimal untuk Bank Central Asia Tbk (BBCA) sebesar 76,4%. Hal tersebut menunjukkan bahwa nilai proporsi saham Bank Central Asia Tbk (BBCA) lebih besar dan lebih akan memberikan keuntungan bagi investor. Selanjutnya apabila nilai proporsi tersebut dimasukkan ke dalam fungsi tujuan, maka didapatkan nilai ekspektasi pengembalian untuk periode investasi selama satu tahun sebesar 52%.

5.2 Saran

Penelitian yang berkenaan dengan pembentukan portofolio saham selanjutnya dapat menggunakan jenis pendekatan lain, seperti pendekatan *Multi objektif* atau *Separable programming*. Adapun permasalahan pembentukan portofolio saham juga dapat lebih dilengkapi lebih lanjut dengan menambahkan teori mengenai fungsi utilitas.

DAFTAR PUSTAKA

Eduardus Tandelilin. 2001. *Analisis Investasi dan Manajemen Portofolio*. Edisi ke-1. Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta.

Halim, Abdul. 2005. *Analisis Investasi*. Edisi ke-2 Jakarta: Salemba Empat. Alfabeta.

Hartono, Jogiyanto. 2017. *Teori Portofollio dan Analisis Investasi*. Edisi ke-11. Yogyakarta: BPEE.

Sipayung, Evi Theresia. "Aplikasi Multi Objective Fuzzy Linear Programming Dalam Masalah Perencanaan Persediaan Produksi". Universitas Sumatera Utara. 2011.

Herjanto, Eddy. 2007. *Manajemen Operasi*. Jakarta: Grasindo.

Jones, Charles P. 2007. *Investment Analysis and Management*. Edisi ke-10.

Markowitz, Harry M."Foundations of Portfolio Theory". Journal of Finance volume 46, 1991.

Novena, Nia Christie. "Aplikasi Metode Kuhn-Tucker untuk Menentukan Portofolio Optimal". Universitas Sanata Dharma. 2014.

R. Max Wideman, "Project and Program Risk Management A Guide to Managing Project Risk and Opportunities". PMI. 1992.

Ruminta. 2009. *Matriks Persamaan Linear dan Pemrograman Linear*. Bandung: Rekayasa Sains.

Suad, Husnan. 2003. *Dasar-dasar Teori Portofolio dan Analisis Sekuritas*. Yogyakarta: UPP AMP YKPN.

Sunariyah. 2004. *Pengantar Pengetahuan Pasar Modal*. Yogyakarta: UPP AMP YKPN.

Ahmadi, Hartono dan Binatari, Nikenasih . "Tinjauan Kasus Persamaan Panas

Dimensi Satu Secara Analitik". Universitas Negeri Yogyakarta. 2016.

Winston, Wayne. L. 2004. *Operations Research: Applications and Algorithms*. Edisi ke-4. USA: Thomson Learning Resource Center.

Insani, Sativa Nurin and Sari, Eminugroho Ratna. "Optimasi Tanaman Pangan di Kota Magelang dengan Pemrograman Kuadratik dan Metode Fungsi Penalti Eksterior". Universitas Negeri Yogyakarta. 2017.

Fauzi, Dhimas Rio. "Analisis Pemilihan Portofolio Optimal dan Evaluasi Kinerja Portofolio pada Saham LQ45". Universitas Negeri Yogyakarta. 2015.

Lewis, Frank L. 1995. *Optimal Control*. Edisi ke-3. Toronto. John Wiley and Sons, Inc.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran I

Daftar saham yang tergabung dalam indeks INFOBANK15:

1. Bank Rakyat Indonesia Agroniag Tbk (AGRO)
2. Bank Central Asia Tbk (BBCA)
3. Bank Negara Indonesia (Persero) (BBNI)
4. Bank Rakyat Indonesia (Persero) (BBRI)
5. Bank Tabungan Negara (Persero) (BBTN)
6. Bank Danamon Indonesia (BDMN)
7. Bank Pembangunan Daerah Jawa Barat dan Banten (BBCA)
8. Bank Pembangunan Daerah Jawa Timur (BJTM)
9. Bank Mandiri (Persero) (BMRI)
10. Bank CIMB Niaga (PNBN)
11. Bank Sinarmas Tbk Finance (BSIM)
12. Bank Tabungan Pensiunan Nasional (BTPN)
13. Bank China Construction Bank Indonesia (BBCA)
14. Bank OCBC NISP (NISP)
15. Bank Pan Indonesia (PNBN)

Lampiran II

Tabel 5.1: Tabel data harga penutupan saham-saham yang tergabung dalam indeks INFOBANK15 periode 1 Januari 2019 sampai 31 Desember 2019

Tanggal	AGRO	BBCA	BBNI	BMRI	BBRI	BBTN	BDMN	BJBR	BJTM	BNGA	BSIM	BTPN	MCOR	NISP	PNBN
01/01/2019	318	25905	8667	7192	3534	2583	8001	1981	657	1086	550	3530	145	885	1045
08/01/2019	320	25683	8667	7458	3659	2680	8124	2009	662	1071	545	3650	159	900	1215
15/01/2019	341	27387	9009	7555	3669	2710	8222	2067	671	1110	550	3680	160	915	1260
22/01/2019	328	27140	8887	6950	3650	2592	8985	2143	685	1101	540	3790	169	900	1325
29/01/2019	335	27164	8911	7119	3766	2700	8985	2105	685	1125	570	3790	167	935	1435
05/02/2019	351	27140	8838	7386	3737	2592	9010	2038	699	1208	530	3880	166	920	1360
12/02/2019	335	27066	8764	7047	3708	2504	9035	1952	671	1237	560	3700	162	890	1565
19/02/2019	343	27115	8594	7022	3824	2475	9010	2009	666	1208	590	3700	164	900	1595
26/02/2019	333	27337	8740	6877	3746	2338	7681	1943	648	1183	590	3610	163	915	1525
05/03/2019	329	27189	8471	6635	3727	2221	7434	1905	615	1130	580	3660	160	900	1495
12/03/2019	324	27411	9131	6877	3862	2358	7705	1943	606	1091	555	3630	160	900	1460
19/03/2019	324	26942	8984	6950	3872	2358	8789	1904	601	1076	555	3690	155	890	1410
26/03/2019	316	27164	9228	7265	4007	2328	9256	1924	606	1047	560	3610	155	905	1370
02/04/2019	314	27066	9253	7265	4104	2279	9404	1922	624	1066	540	3620	153	895	1325
09/04/2019	326	27189	9424	7119	4200	2387	9800	1962	629	1032	555	3670	152	900	1250
16/04/2019	326	27782	9448	7507	4287	2543	8475	1924	629	1042	560	3660	152	885	1300
23/04/2019	322	28078	9399	7531	4191	2475	8975	1905	638	1027	575	3730	151	895	1305
30/04/2019	318	28011	8667	7289	4084	2328	5500	1809	624	1035	565	3680	148	890	1260
07/05/2019	294	27961	8301	7289	3959	2260	5025	1667	568	1050	560	3670	143	875	1230
14/05/2019	266	26815	8227	6998	3621	2279	4820	1575	610	995	565	3550	121	835	1170
21/05/2019	278	28335	8496	7483	3785	2406	4800	1760	630	980	565	3630	149	890	1180
28/05/2019	282	29008	8400	7675	4100	2416	4630	1595	620	955	560	3670	152	895	1250
04/06/2019	286	29307	8675	7850	4230	2580	4780	1625	625	970	555	3630	152	895	1245
11/06/2019	278	28883	8450	7800	4200	2580	4250	2650	615	1060	565	3600	149	865	1210
18/06/2019	292	29282	8875	7975	4310	2690	4710	2635	615	1125	590	3590	148	890	1220
25/06/2019	294	29855	9375	8000	4420	2520	4770	1695	640	1125	615	3600	144	890	1270
02/07/2019	302	29307	8975	7875	4400	2420	4620	1680	640	1070	620	3600	142	890	1300
09/07/2019	312	30428	9175	8150	4530	2470	4610	1660	645	1095	605	3540	143	895	1430
16/07/2019	294	31350	8850	7775	4500	2440	5075	1640	630	1140	605	3300	139	880	1375
23/07/2019	280	30852	8350	7800	4460	2390	5125	1600	630	1075	595	3310	138	875	1375
30/07/2019	268	29905	7925	7425	4270	2250	4790	1510	625	1040	640	3190	138	865	1370
06/08/2019	270	30104	7925	7400	4300	2300	5000	1520	620	1075	610	3180	132	875	1370
13/08/2019	252	29705	7875	7350	4180	2310	5175	1520	625	1080	605	3450	174	870	1430
20/08/2019	258	29855	7500	7050	4070	2150	5025	1520	635	1080	565	3380	145	875	1500
27/08/2019	254	29905	7625	7175	4220	2010	4790	1530	635	1025	600	3290	138	850	1350
03/09/2019	242	30079	7550	6975	4170	2080	4650	1590	635	995	610	3280	143	860	1380
10/09/2019	240	29930	7675	7000	4190	2150	4710	1635	650	1020	585	3300	142	845	1330
17/09/2019	236	30029	7575	7000	4180	2250	4680	1605	645	1005	575	3290	139	855	1340
24/09/2019	218	30254	7350	6975	4120	1960	4750	1570	635	1005	605	3250	134	845	1335
01/10/2019	206	30254	6675	6350	3900	1815	4580	1695	635	965	595	3120	134	845	1165
08/10/2019	206	30902	6925	6600	3920	1905	4560	1650	640	970	580	3190	130	845	1260
15/10/2019	218	31001	7375	6800	4120	1920	4600	1840	675	995	550	3130	150	845	1270
22/10/2019	224	30927	7775	7000	4230	1995	4420	1855	685	1005	555	3250	140	845	1275
29/10/2019	208	31276	7625	6875	4160	1810	4290	1870	685	990	575	3180	136	840	1325
05/11/2019	190	31375	7550	7050	4000	1865	4130	1560	710	960	555	3200	134	835	1300
12/11/2019	191	31276	7425	6975	4120	1920	3950	1595	705	645	545	3200	133	825	1205
19/11/2019	157	31276	7500	6975	4130	2080	3810	1555	680	930	575	3140	135	815	1200
26/11/2019	145	32023	7550	7100	4210	2170	3760	1575	665	950	590	3160	129	865	1215
03/12/2019	168	31874	7575	7250	4180	2190	3790	1490	680	940	550	3240	130	845	1195
10/12/2019	171	31800	7700	7350	4330	2160	4240	1375	680	965	555	3160	131	845	1290
17/12/2019	206	33300	7925	7725	4450	2120	4120	1355	680	960	530	3300	131	855	1305
24/12/2019	198	33425	7850	7675	4400	2120	3950	1185	685	965	585	3250	129	845	1335
31/12/2019	198	33425	7850	7675	4400	2120	3950	1185	685	965	585	3250	129	845	1335

Lampiran III

Tabel 5.2: Tabel *return* dan *expected return* saham-saham yang tergabung dalam indeks INFOBANK15 periode 1 Januari 2019 sampai 31 Desember 2019

Return	AGRO	BBCA	BBNI	BMRI	BBRI	BBTN	BDMN	BJBR	BJTM	BNGA	BSIM	BTPN	MCOR	NISP	PNBN
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.006289	-0.00857	0	0.036986	0.035371	0.037553	0.015373	0.014134	0.00761	-0.01381	-0.00909	0.033994	0.0965517	0.016949	0.162679
3	0.065625	0.066347	0.03946	0.013006	0.002733	0.011194	0.012063	0.02887	0.013595	0.036415	0.009174	0.008219	0.0062893	0.016667	0.037037
4	-0.03812	-0.009019	-0.01354	-0.08008	-0.00518	-0.04354	0.0928	0.036768	0.020864	-0.00811	-0.01818	0.029891	0.05625	-0.01639	0.051587
5	0.021341	0.000884	0.002701	0.024317	0.031781	0.041667	0	-0.01773	0	0.021798	0.055556	0	-0.0118343	0.038889	0.083019
6	0.047761	-0.000884	-0.00819	0.037505	-0.0077	-0.04	0.002782	-0.03183	0.020438	0.073778	-0.07018	0.023747	-0.005988	-0.01604	-0.05226
7	-0.04558	-0.002727	-0.00837	-0.0459	-0.00776	-0.03395	0.002775	-0.0422	-0.04006	0.024007	0.056604	-0.04639	-0.0240964	-0.03261	0.150735
8	0.023881	0.00181	-0.0194	-0.00355	0.031284	-0.01158	-0.00277	0.029201	-0.00745	-0.02344	0.053571	0	0.0123457	0.011236	0.019169
9	-0.02915	0.008187	0.016989	-0.02065	-0.0204	-0.05535	-0.1475	-0.03285	-0.02703	-0.0207	0	-0.02432	-0.0060976	0.016667	-0.04389
10	-0.01201	-0.005414	-0.03078	-0.03519	-0.00507	-0.05004	-0.03216	-0.01956	-0.05093	-0.0448	-0.01695	0.01385	-0.0184049	-0.01639	-0.01967
11	-0.0152	0.008165	0.077913	0.036473	0.036222	0.061684	0.036454	0.019948	-0.01463	-0.03451	-0.0431	-0.0082	0	0	-0.02341
12	0	-0.01711	-0.0161	0.010615	0.002589	0	0.140688	-0.02007	-0.00825	-0.01375	0	0.016529	-0.03125	-0.01111	-0.03425
13	-0.02469	0.00824	0.027159	0.045324	0.034866	-0.01272	0.053135	0.010504	0.008319	-0.02695	0.009009	-0.02168	0	0.016854	-0.02837
14	-0.00633	-0.003608	0.002709	0	0.024208	-0.02105	0.01599	-0.00104	0.029703	0.018147	-0.03571	0.00277	-0.0129032	-0.01105	-0.03285
15	0.038217	0.004544	0.01848	-0.0201	0.023392	0.047389	0.04211	0.020812	0.008013	-0.03189	0.027778	0.013812	-0.0065359	0.005587	-0.0566
16	0	0.02181	0.002547	0.054502	0.020714	0.065354	-0.1352	-0.01937	0	0.00969	0.009009	-0.00272	0	-0.01667	0.04
17	-0.01227	0.010654	-0.00519	0.003197	-0.02239	-0.02674	0.058997	-0.00988	0.014308	-0.0144	0.026786	0.019126	-0.0065789	0.011299	0.003846
18	-0.01242	-0.002386	-0.07788	-0.03213	-0.02553	-0.05939	-0.38719	-0.05039	-0.02194	0.00779	-0.01739	-0.0134	-0.0198675	-0.00559	-0.03448
19	-0.07547	-0.001785	-0.04223	0	-0.03061	-0.02921	-0.08636	-0.0785	-0.08974	0.014493	-0.00885	-0.00272	-0.0337838	-0.01685	-0.02381
20	-0.09524	-0.040986	-0.00891	-0.03992	-0.08538	0.008407	-0.0408	-0.05519	0.073944	-0.05238	0.008929	-0.0327	-0.1538462	-0.04571	-0.04878
21	0.045113	0.056685	0.032697	0.069306	0.045291	0.055726	-0.00415	0.11746	0.032787	-0.01508	0	0.022535	0.231405	0.065868	0.008547
22	0.014388	0.023752	-0.0113	0.025658	0.083223	0.004156	-0.03542	-0.09375	-0.01587	-0.02551	-0.00885	0.011019	0.0201342	0.005618	0.059322
23	0.014184	0.010308	0.032738	0.022801	0.031707	0.067881	0.032397	0.018809	0.008065	0.015707	-0.00893	-0.0109	0	0	-0.004
24	-0.02797	-0.014468	-0.02594	-0.00637	-0.00709	0	-0.11088	0.630769	-0.016	0.092784	0.018018	-0.00826	-0.0197368	-0.03352	-0.02811
25	0.05036	0.013814	0.050296	0.022436	0.02619	0.042636	0.108235	-0.00566	0	0.061321	0.044248	-0.00278	-0.0067114	0.028902	0.008264
26	0.006849	0.019568	0.056338	0.003135	0.025522	-0.0632	0.012739	-0.35674	0.04065	0	0.042373	0.002786	-0.027027	0	0.040984
27	0.027211	-0.018355	-0.04267	-0.01563	-0.00452	-0.03968	-0.03145	-0.00885	0	-0.04889	0.00813	0	-0.0138889	0	0.023622
28	0.033113	0.03825	0.022284	0.034921	0.029545	0.020661	-0.00216	-0.0119	0.007813	0.023364	-0.02419	-0.01667	0.0070423	0.005618	0.1
29	-0.05769	0.030301	-0.03542	-0.04601	-0.00662	-0.01215	0.100868	-0.01205	-0.02326	0.041096	0	-0.0678	-0.027972	-0.01676	-0.03846
30	-0.04762	-0.015885	-0.0565	0.003215	-0.00889	-0.02049	0.009852	-0.02439	0	-0.05702	-0.01653	0.00303	-0.0071942	-0.00568	0
31	-0.04286	-0.030695	-0.0509	-0.04808	-0.0426	-0.05858	-0.06537	-0.05625	-0.00794	-0.03256	0.07563	-0.03625	0	-0.01143	-0.00364
32	0.007463	0.006654	0	-0.00337	0.007026	0.022222	0.043841	0.006623	-0.008	0.033654	-0.04688	-0.00313	-0.0434783	0.011561	0
33	-0.06667	-0.013254	-0.00631	-0.00676	-0.02791	0.004348	0.035	0	0.008065	0.004651	-0.0082	0.084906	0.3181818	-0.00571	0.043796
34	0.02381	0.00505	-0.04762	-0.04082	-0.02632	-0.06926	-0.02899	0	0.016	0	-0.06612	-0.02029	-0.1666667	0.005747	0.048951
35	-0.0155	0.001675	0.016667	0.01773	0.036855	-0.06512	-0.04677	0.006579	0	-0.05093	0.061947	-0.02663	-0.0482759	-0.02857	-0.1
36	-0.04724	0.005818	-0.00984	-0.02787	-0.01185	0.034826	-0.02923	0.039216	0	-0.02927	0.016667	-0.00304	0.0362319	0.011765	0.022222
37	-0.00826	-0.004954	0.016556	0.003584	0.004796	0.033654	0.012903	0.028302	0.023622	0.025126	-0.04098	0.006098	-0.006993	-0.01744	-0.03623
38	-0.01667	0.003308	-0.01303	0	-0.00239	0.046512	-0.00637	-0.01835	-0.00769	-0.01471	-0.01709	-0.00303	-0.0211268	0.011834	0.007519
39	-0.07627	0.007493	-0.0297	-0.00357	-0.01435	-0.12889	0.014957	-0.02181	-0.0155	0	0.052174	-0.01216	-0.0359712	-0.0117	-0.00373
40	-0.05505	0	-0.09184	-0.08961	-0.0534	-0.07398	-0.03579	0.079618	0	-0.0398	-0.01653	-0.04	0	0	-0.12734
41	0	0.021419	0.037453	0.03937	0.005128	0.049587	-0.00437	-0.02655	0.007874	0.005181	-0.02521	0.022436	-0.0298507	0	0.081545
42	0.058252	0.003204	0.064982	0.030303	0.05102	0.007874	0.008772	0.115152	0.054688	0.025773	-0.05172	-0.01881	0.1538462	0	0.007937
43	0.027523	-0.002387	0.054237	0.029412	0.026699	0.039063	-0.03913	0.008152	0.014815	0.01005	0.009091	0.038339	-0.0666667	0	0.003937
44	-0.07143	0.011285	-0.01929	-0.01786	-0.01655	-0.09273	-0.02941	0.008086	0	-0.01493	0.036036	-0.02154	-0.0285714	-0.00592	0.039216
45	-0.08654	0.003165	-0.00984	0.025455	-0.03846	0.030387	-0.0373	-0.16578	0.036496	-0.0303	-0.03478	0.006289	-0.0147059	-0.00595	-0.01887
46	0.005263	-0.003155	-0.01656	-0.01064	0.03	0.029491	-0.04358	0.022436	-0.00704	-0.32813	-0.01802	0	-0.0074627	-0.01198	-0.07308
47	-0.17801	0	0.010101	0	0.002427	0.083333	-0.03544	-0.02508	-0.03546	0.44186	0.055046	-0.01875	0.0150376	-0.01212	-0.00415
48	-0.07643	0.023884	0.006667	0.017921	0.01937	0.043269	-0.01312	0.012862	-0.02206	0.021505	0.026087	0.006369	-0.0444444	0.06135	0.0125
49	0.158621	-0.004653	0.003311	0.021127	-0.00713	0.009217	0.007979	-0.05397	0.022556	-0.01053	-0.0678	0.025316	0.0077519	-0.02312	-0.01646
50	0.017857	-0.002322	0.016502	0.013793	0.035885	-0.0137	0.118734	-0.07718	0	0.026596	0.009091	-0.02469	0.0076923	0	0.079498
51	0.204678	0.04717	0.029221	0.05102	0.027714	-0.01852	-0.0283	-0.01455	0	-0.00518	-0.04505	0.044304	0	0.011834	0.011628
52	-0.03883	0.003754	-0.00946	-0.00647	-0.01124	0	-0.04126	-0.12546	0.007353	0.005208	0.103774	-0.01515	-0.0152672	-0.0117	0.022989
53	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL	**-0.38174**	**0.264584**	**-0.06879**	**0.092551**	**0.242234**	**-0.14179**	**-0.52101**	**-0.22261**	**0.058721**	**0.052435**	**0.098399**	**-0.06665**	**0.0055618**	**-0.03577**	**0.318105**
E(Ri)	**-0.0072**	**0.004992**	**-0.0013**	**0.001746**	**0.00457**	**-0.00268**	**-0.00983**	**-0.0042**	**0.001108**	**0.000989**	**0.001857**	**-0.00126**	**0.0001049**	**-0.00067**	**0.006002**

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama	:	Ridha Hasti Putri
No. Registrasi	:	3125153116
Program Studi	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul "**Analisis Penentuan Portofolio Optimal pada *Quadratic Programming* dengan Menggunakan Metode *Wolfe***" adalah :

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Bekasi, 17 Desember 2021

Yang membuat pernyataan

Ridha Hasti Putri

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Nama	:	Ridha Hasti Putri
Tempat, tanggal lahir	:	Bekasi, 2 Juni 1997
Nomor telepon	:	081281010253
E-mail	:	ridhahastiputri@gmail.com

Riwayat Pendidikan : Penulis mengawali pendidikan di TK Putra Setia. Kemudian, melanjutkan pendidikan di SDN Paseban 05 Pagi Jakarta pada tahun 2003 - 2005 dan di SDN Jaka Setia IV Bekasi pada tahun 2005 - 2009. Setelah itu, penulis melanjutkan pendidikan ke SMPN 12 Bekasi. Lalu ke SMAI PB Soedirman 1 Bekasi dan lulus tahun 2015. Di Tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan ke Universitas Negeri Jakarta (UNJ), Program Studi Matematika dan memperoleh gelar Sarjana Sains untuk Program Studi Matematika, FMIPA, UNJ pada tahun 2021.

Riwayat Organisasi : Selama di bangku perkuliahan, penulis aktif di berbagai organisasi kemahasiswaaan. Penulis pernah bergabung menjadi anggota Komunitas Mahasiswa Pecinta Fotografi (KMPF) Universitas Negeri Jakarta dan Lembaga Legislatif Mahasiswa Jurusan (LLMJ) Matematika Universitas Negeri Jakarta.

Riwayat Pekerjaan : Penulis mulai menjadi pengajar private Matematika sejak tahun 2015.