PEMAMPATAN CITRA DIGITAL

DENGAN METODE DEKOMPOSISI NILAI SINGULAR

Skripsi
Disusun untuk melengkapi syarat-syarat
guna memperoleh gelar Sarjana Sains

ADHE SEPTIAN KHIGANSIH
3125081764

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA
2013

PERSEMBAHANKU...

"....niscaya Allah mengangkat (derajat) orang-orang yang beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat... "
(QS. Al Mujadalah : 11)

"...yang kamu perlu cuma kaki yang akan berjalan lebih jauh dari biasanya, tangan yang akan berbuat lebih banyak dari biasanya, mata yang akan menatap lebih lama dari biasanya, leher yang akan lebih sering melihat ke atas, lapisan tekad yang seribu kali lebih keras dari baja, dan hati yang akan bekerja lebih keras dari biasanya, serta mulut yang akan selalu berdoa... "
(5cm - Donny Dhirgantoro)

Skripsi ini kupersembahkan untuk....
kedua orangtuaku R. Oki Ganeka S. dan Sri Nurnaningsih,
kakakku Novianti Mantasha, serta keluarga besarku.
"Terima kasih atas dukungan, do'a, serta kasih sayang kalian... ".

ABSTRACT

ADHE SEPTIAN KHIGANSIH, 3125081764. Digital Image Compression with Singular Value Decomposition Method. Thesis. Faculty of Mathematics and Natural Sciences. State University of Jakarta. 2013.

This thesis discusses how to compress digital images with singular value decomposition method. The image is mathematically a function of brightness. The image is divided into a continuous image and discrete image. Discrete image is a continuous image that has been through the digitalization process and is known as the digital image. Digital image that has been represented as an image matrix then will be sought from the covariance matrix of the image matrix. Eigen values and eigen vectors of the covariance matrix can be obtained by using Singular Value Decomposition (SVD) henceforth used in the Karhunen-Loeve Transform (KLT) to search the principal components of the image matrix. This digital image compression method is done by reducing the dimensions of the principal components of the image matrix.

Keywords : digital image, image compression, eigen vectors, eigen values, SVD, KLT, principal component.

ABSTRAK

ADHE SEPTIAN KHIGANSIH, 3125081764. Pemampatan Citra Digital dengan Metode Dekomposisi Nilai Singular. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. 2013.

Skripsi ini membahas bagaimana memampatkan citra digital dengan metode dekomposisi nilai singular. Citra secara matematis adalah fungsi dari intensitas cahaya, citra dibedakan menjadi citra kontinyu dan citra diskrit. Citra diskrit adalah citra kontiyu yang telah melalui proses digitalisasi, dan lebih dikenal dengan citra digital. Citra digital yang telah direpresentasikan sebagai matriks citra, selanjutkan akan dicari matriks kovarian dari matriks citra. Nilai eigen dan vektor eigen dari matriks kovarian dapat diperoleh dengan menggunakan Dekomposisi Nilai Singular (SVD) untuk kemudian digunakan dalam Transformasi Karhunen-Loeve (KLT) guna mencari komponen-komponen utama dari matriks citra. Pemampatan citra digital dengan metode ini dilakukan dengan cara mereduksi dimensi dari komponen-komponen utama dari matriks citra.

Kata kunci : citra digital, pemampatan citra, vektor eigen, nilai eigen, SVD, KLT, komponen utama.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT atas pemberian pengetahuan dan kemampuan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pemampatan Citra Digital dengan Metode Dekomposisi Nilai Singular" yang merupakan salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Jurusan Matematika Universitas Negeri Jakarta.

Skripsi ini berhasil diselesaikan tak lepas dari bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Drs. Mulyono, M.Kom. selaku Dosen Pembimbing I dan Bapak Med Irzal, M. Kom. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, saran, nasehat, serta pengarahan dalam pengerjaan skripsi ini sehingga menjadi lebih baik. Terima kasih banyak dan maaf atas segala kekuranganku, semoga kesehatan selalu tercurah kepada Bapak dan keluarga.

2. Bapak Prof. Dr. Suyono, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNJ dan Ibu Ratna Widyanti, S.Si, M.Kom. selaku Ketua Prodi Matematika FMIPA UNJ. Terima kasih atas segala bantuan dan kerja sama Bapak dan Ibu selama pengerjaan skripsi ini.

3. Bapak Med Irzal, M.Kom. selaku Pembimbing Akademik atas segala bimbingan dan kerja sama Bapak selama perkuliahan penulis dan seluruh Bapak/Ibu dosen atas pengajaran yang telah diberikan, serta Ibu Lastri dan karyawan/karyawati FMIPA UNJ lainnya atas informasi dan bantuan yang diberikan dalam menyelesaikan skripsi ini.

4. Mamah Papah tercinta dan Mbak Novi yang senantiasa memberikan doa, semangat, kesabaran, nasehat, serta bantuan secara moral maupun material. Terima kasih pula atas doa nenekku tercinta, Om Atin, Tante Endah, de Farrah, dan seluruh keluarga besarku.

5. Sahabat-sahabatku tersayang Dito Yudhanto, Rismadianto, Ahmad Rizal, Ojat Sudrajat, Putri Rindi, Nurul Hasanah, Erlyn Annisa, Metta Melinda, Fara Ariestia, Richi Anggraeni, semua sahabat PUKIN, serta sahabat-sahabat Matematika 2008 lainnya. Terima kasih atas segala dukungan, kerja sama, perhatian, dan kebersamaan yang diberikan, semoga persahabatan kita selamanya.

6. Nisa Fajrin, Nita, Via, Eka, Alvi, Ronni, Ijal, Sahid, Hendra, Radit, Eky, Anggi, Gilang, Tika, Octiyoshe, Nur Eka, Ria, Niqe, Nadya, dan seluruh pihak yang telah membantu. Terima kasih atas segala bantuan dan dukungan selama pengerjaan skripsi ini.

7. Serta tak lupa untuk peri kecilku, Desyandi Ayuriza. Terima kasih atas segala semangat, dukungan, dan keberadaannya selama ini. Tetaplah menjadi arti bagi hidupku.

Penulis menyadari skripsi ini masih jauh dari sempurna. Masukan dan kritik akan sangat berarti. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Jakarta, Januari 2013

Adhe Septian Khigansih

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dunia sedang mengalami suatu transisi evolusioner. Masyarakat dunia pelan-pelan meninggalkan pola masyarakat industrial, dan menjadi masyarakat informasi. Dengan munculnya komputer, telepon, satelit, teknologi basis data dan sistem informasi, manusia menjadi konsumen dan produsen informasi. Penyedia informasi memegang kekuasaan.

Internet sebagai jaringan komputer adalah sumber referensi informasi yang paling sering dipergunakan belakangan ini. Kebutuhan pengguna Internet memang luar biasa. Aplikasi-aplikasi multimedia seperti siaran televisi langsung melalui internet membutuhkan implementasi teknis yang seefisien mungkin.

Perkembangan teknologi yang sangat pesat terutama dalam teknologi multimedia menyebabkan penyampaian informasi yang awalnya hanya berupa tulisan dan kata, kini meluas dengan media gambar atau citra, video, dan juga suara. Citra atau gambar, adalah salah satu bentuk informasi yang banyak tersedia di internet. Berkas citra tidak hanya digunakan untuk informasi visual seperti foto atau lukisan, tetapi juga digunakan sebagai landasan untuk tampilan antarmuka grafis di internet yang semakin lama semakin canggih.

Tidak hanya dalam penyampaian informasi tetapi dengan berkembangnya teknologi pun dapat melakukan pengolahan media, salah satunya pengolahan citra. Pengolahan citra dapat dimanfaatkan dalam berbagai bidang, diantaranya dalam dunia kedokteran, teknologi komunikasi, fotografi dan perfilman. Makin berkembangnya teknologi perangkat keras komputer memungkinkan ditampilkannya citra beresolusi tinggi dan bernuansa jutaan warna. Citra-citra ini memiliki ukuran berkas citra yang terlalu besar.

Ukuran berkas citra yang terlalu besar menimbulkan masalah pada dua aspek, yaitu pengiriman dan penyimpanan. Pada aspek pengiriman, ukuran citra yang terlalu besar menimbulkan masalah pada waktu dan kecepatan pengiriman informasi digital. Suatu citra berkualitas tinggi akan sulit dikirim melalui internet jika tidak dimampatkan. Pada aspek penyimpanan, ukuran citra yang terlalu besar menimbulkan masalah pada kapasitas penyimpanan informasi berbentuk citra dalam media penyimpanan, seperti *harddisk*, *floppydisk*, *compact disk*, dan lainnya. Hal ini semakin mengisyaratkan perlunya suatu metode pemampatan citra yang handal.

Suatu berkas citra atau gambar dapat direpresentasikan sebagai sebuah matriks, sehingga dapat ditransformasikan dan dioperasikan seperti matriks pada umumnya. Transformasi Karhunen-Loeve merupakan salah satu transformasi citra yang cukup sederhana berdasarkan nilai eigen dari suatu matriks citra. Untuk memperkecil ukuran berkas sebuah citra dapat digunakan metode pemampatan citra, Dekomposisi Nilai Singular merupakan salah satu metode yang dapat digunakan dalam proses pemampatan citra dengan menggunakan Transformasi Karhunen-Loeve sebagai transformasi citra untuk memperkecil ukuran berkas citra.

1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah yang akan dikaji adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana persamaan untuk memampatkan sebuah citra digital ?
2. Bagaimana penerapan Dekomposisi Nilai Singular dalam Transformasi Karhunen-Loeve ?

1.3 Pembatasan Masalah

Pembatasan masalah dalam penulisan ini adalah:

1. Citra yang digunakan merupakan citra digital atau citra diskrit.
2. Matriks citra yang digunakan adalah matriks persegi.
3. Citra yang digunakan adalah citra hitam putih 8 bit.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan yang ingin dicapai dalam penulisan ini adalah:

1. Membentuk dan menurunkan persamaan untuk proses pemampatan citra digital.
2. Penerapan Dekomposisi Nilai Singular dalam Transformasi Karhunen-Loeve.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari penulisan ini adalah dapat memberikan gambaran atau pandangan dalam memampatkan citra digital dengan menerapkan proses dekomposisi nilai singular.

1.6 Metode Penelitian

Skripsi ini merupakan kajian teori tentang matriks dan dekomposisi nilai singular yang didasarkan pada buku-buku dan jurnal-jurnal tentang pemampatan citra.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Citra

2.1.1 Pengertian Citra

Citra merupakan unsur atau elemen yang terdapat dalam multimedia. Andleigh (1995) menjelaskan, bahwa citra yang disebut juga dengan *image* atau gambar, terdiri dari semua tipe data kecuali yang berkode teks dan tidak mempunyai properti temporal (yaitu berubah sesuai dengan waktu). Citra adalah suatu represntasi, kemiripan atau imitasi dari objek.

Secara matematis, citra adalah fungsi 2 dimensi $f(x, y)$ yang menyatakan intensitas cahaya, di mana x dan y menyatakan titik koordinat dan nilai f pada titik (x, y) adalah terangnya *(brightness)* citra pada titik tersebut.

Cahaya yang memancarkan sinar dan menerangi sebuah objek, dan objek memantulkan kembali sinar yang diterima, sehingga ditangkap oleh alat optik atau mesin digital, akhirnya diproses menjadi sebuah citra. Secara umum citra dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu citra kontinyu dan citra diskrit. Citra kontinyu yaitu citra yang dihasilkan dari alat optik, misalnya mata manusia atau kamera analog. Sedangkan citra diskrit yaitu citra yang dihasilkan dari mesin digital, misalnya kamera digital dan *scanner*. Dalam konteks pembahasan ini, citra berarti sebuah gambar yang dapat diolah oleh komputer, yaitu citra yang telah didiskretkan menjadi **citra digital**.

2.1.2 Citra Digital

Citra yang akan diproses dengan komputer digital harus direpresentasikan secara numerik dengan nilai-nilai diskrit. Representasi citra dari fungsi kontinyu menjadi nilai-nilai diskrit disebut digitalisasi. Sebuah citra digital *(digital image)* adalah sebuah citra $f(x, y)$ yang telah didiskretkan, baik dalam koordinat maupun dalam intensitasnya. Citra digital yaitu citra yang dihasilkan melalui proses digitalisasi terhadap citra kontinyu dan direpresentasikan sebagai sebuah matriks yang masing-masing elemennya merepresentasikan nilai intensitas. Citra digital dapat dianggap sebagai suatu matriks di mana indeks baris dan kolomnya melambangkan posisi suatu titik dalam citra, dan nilainya menyatakan intensitas cahaya pada titik tersebut. Satu unit dalam matriks citra digital ini disebut sebagai *picture element* atau *pixel*.

Besarnya nilai maksimum dari intensitas cahaya ditentukan dari banyaknya *binary digit* (bit) yang digunakan untuk merepresentasi citra digital, dengan menggunakan persamaan (2.1).

$$2^b = L \tag{2.1}$$

dimana

b : jumlah bit yang digunakan

L : banyaknya nuansa warna yang dihasilkan

Ukuran citra digital umumnya memiliki tinggi citra m dan lebar citra n. Sebuah citra digital dapat direpresentasikan dengan matriks $\mathbf{X}$ sebagai berikut

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,2) & \cdots & f(1,n) \\ f(2,1) & f(2,2) & \cdots & f(2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(m,1) & f(m,2) & \cdots & f(m,n) \end{pmatrix}$$

Citra dengan tinggi citra m, lebar citra n, dan intensitas L dapat dianggap sebagai fungsi $f : m \times n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = f \qquad ; 1 \leq x \leq m;\ 1 \leq y \leq n;\ 0 \leq f \leq L-1$$

dimana

(x, y) : titik koordinat matriks citra

$f(x, y)$: besarnya intensitas cahaya dengan selang $[0, L-1]$ pada titik (x, y)

Misal untuk sebuah citra monokrom yang menggunakan 8-bit untuk merepresentasikan sebuah citra, maka terdapat $2^8 = 256$ nuansa warna yang dihasilkan, sehingga besarnya intensitas cahaya berada dalam selang $[0, 255]$.

2.1.3 Representasi Citra

Representasi Citra Hitam-Putih (Monokrom)

Dalam citra digital, sejumlah nilai intensitas yang berkisar antara hitam dan putih dapat dinyatakan sebagai *grey level* atau derajat keabuan. Semakin banyak derajat keabuan yang digunakan, semakin halus perubahan intensitas dari daerah citra yang gelap ke daerah citra yang terang.

Sebagai contoh, misalnya sebuah citra berukuran 640×480 *pixel* dengan intensitas 256, maka fungsi $f(x, y)$ berada pada selang [0,255] dan citra direpresentasikan sebagai matriks $\mathbf{X}$, seperti contoh berikut:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 149 & 161 & \cdots & 143 \\ 220 & 182 & 246 & \cdots & 241 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 217 & 206 & 109 & \cdots & 255 \end{pmatrix}$$

Pixel pada koordinat $(1, 1)$ mempunyai nilai intensitas 0 yang berarti warna *pixel* tersebut hitam, *pixel* pada koordinat $(1, 2)$ mempunyai intensitas 149 yang berarti warna *pixel* tersebut antara hitam dan putih, dan seterusnya.

Representasi Citra Warna

Setiap nuansa warna dapat diturunkan dari ketiga warna primer, yaitu merah, hijau, dan biru. Suatu warna dapat dinyatakan sebagai kombinasi dari nilai 3 warna primer tersebut. Dengan kata lain, sebuah fungsi c yang menyatakan warna, merupakan fungsi dengan variabel komponen warna merah (r), hijau (g), dan biru (b), yaitu $c(r, g, b)$.

Untuk menjelaskan konsep dari citra warna, definisi dari citra monokrom dapat dikembangkan untuk mencakup komponen-komponen ketiga warna primer dalam cahaya, yakni merah, hijau, dan biru.

Jadi, jika citra monokrom $f(x, y)$ merupakan fungsi intensitas cahaya, fungsi warna $f(x, y)$ adalah kombinasi dari 3 fungsi citra monokrom yang menyatakan intensitas warna merah $r(x, y)$, warna hijau $g(x, y)$, dan warna biru $b(x, y)$

$$f(x, y) = c\,(r(x, y), g(x, y), b(x, y)) \tag{2.2}$$

dimana

$r(x, y)$	:	fungsi citra monokrom merah-putih dengan r-bit
$g(x, y)$	:	fungsi citra monokrom hijau-putih dengan g-bit
$b(x, y)$	:	fungsi citra monokrom biru-putih dengan b-bit
$f(x, y)$	:	fungsi citra warna dengan $(r + g + b)$-bit

Dalam prakteknya, komponen $r(x, y)$, $g(x, y)$, dan $b(x, y)$ dapat direkonstruksi dari suatu nilai $f(x, y)$, dengan letak pengalokasian bit yang terpisah. Pada umumnya representasi citra warna $f(x, y)$ menggunakan 24-bit, dengan pengalokasian bit yang terpisah masing-masing citra monokrom merah $r(x, y)$ 8-bit, hijau $g(x, y)$ 8-bit, dan biru $b(x, y)$ 8-bit.

2.1.4 Besaran Citra

Sisi teknis dari sebuah citra digital menjelaskan bahwa citra digital disimpan sebagai suatu berkas. Suatu *pixel* menyatakan intensitas atau warna dari suatu titik dalam citra, apabila dialokasikan sejumlah bit untuk menyatakan intensitas *pixel* tersebut, maka dapat dihitung ukuran berkas keseluruhan citra. Suatu konvensi yang lazim digunakan adalah mengalokasikan 8 bit (1 byte) untuk menyatakan satu *pixel* monokrom, dan 24 bit (3 byte) untuk menyatakan satu *pixel* warna.

Dengan mengalokasikan 8 bit untuk satu *pixel* monokrom, akan diperoleh sebanyak $2^8 = 256$ nuansa warna, sedangkan *pixel* warna 24 bit, akan diperoleh sebanyak $2^{24} = 16.777.216$ nuansa warna. Untuk pengamatan mata manusia, pendiskretan citra dengan warna sebanyak ini sudah lebih dari cukup untuk memberikan suatu gambar yang sempurna.

Untuk suatu ukuran citra monokrom berukuran 512×512 *pixel*, ukuran berkasnya menjadi

$$\begin{aligned} 512 \times 512 \times 8 \text{ bit} &= 2.097.152 \text{ bit} \\ &= 262.144 \text{ byte} \\ &= 256 \text{ Kbyte} \end{aligned}$$

Resolusi gambar merupakan kerapatan *pixel* dalam sebuah gambar. Resolusi gambar diukur berdasarkan kerapatan *pixel* dalam 1 inch, satuan dari resolusi gambar adalah *pixels per inch* (ppi) atau *dots per inch* (dpi). Resolusi 1 dpi berarti ada satu *pixel* per 1 inci persegi. Begitu pula, resolusi 300 dpi brarti ada 300 *pixel* per satu inci persegi. Semakin besar resolusi, berarti semakin banyak *pixel* dalam sebuah gambar. Untuk keperluan media cetak yang bermutu tinggi, dibutuhkan resolusi yang tinggi pula. Misalkan resolusi suatu gambar adalah 1200 dpi, maka untuk menyimpan suatu citra halaman warna berukuran kwarto (8.5×11 inci), ukuran berkasnya menjadi:

$$\begin{aligned} 8.5 \times 1200 \times 11 \times 1200 \times 3 \text{ byte} &= 403.920.000 \text{ byte} \\ &= 394.453,125 \text{ Kbyte} \\ &= 385,20 \text{ Mbyte} \end{aligned}$$

385 Mbyte adalah suatu ukuran berkas yang besar untuk satu lembar halaman, meskipun teknologi penyimpanan telah mengalami kemajuan yang sangat pesat

2.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.2.1. Misalkan $\mathbf{X}$ matriks berukuran $n \times n$ dan $\mathbf{e}$ vektor tak nol berukuran $n \times 1$. Skalar dari matriks $\mathbf{X}$ yang dinotasikan oleh λ disebut *nilai eigen* apabila memenuhi persamaan $\mathbf{Xe} = \lambda\mathbf{e}$. Vektor $\mathbf{e}$ disebut *vektor eigen*.

Vektor eigen yang memenuhi persamaan $\mathbf{Xe} = \lambda\mathbf{e}$ dinamakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ yang telah diperoleh. Nilai eigen diperoleh dengan cara menyelesaikan persamaan

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} &= \lambda \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
\left(\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
\mathbf{Xe} &= \lambda\mathbf{e} \\
\mathbf{Xe} - \lambda\mathbf{e} &= \mathbf{0} \\
(\mathbf{X} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e} &= \mathbf{0} \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Persamaan (2.3) mempunyai solusi yang bukan merupakan vektor nol jika dan hanya jika determinan $\mathbf{X} - \lambda\mathbf{I}$ sama dengan nol ($|\mathbf{X} - \lambda\mathbf{I}| = 0$). Artinya untuk memperoleh solusi tidak nol, harus dicari nilai eigen λ sedemikian sehingga $|\mathbf{X} - \lambda\mathbf{I}| = 0$. Untuk menentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan suatu nilai eigen, maka nilai eigen yang telah diperoleh disubstitusi ke persamaan (2.3).

Misal λ merupakan nilai eigen dari $\mathbf{X}$, dan vektor $\mathbf{e}$ merupakan vektor eigen dari $\mathbf{X}$. Maka himpunan vektor eigen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ akan membentuk ruang vektor yang dinamakan *ruang eigen* dari $\mathbf{X}$.

Definisi 2.2.2. Misal $e_1, e_2, \ldots, e_n$ adalah kumpulan dari n vektor, maka $e_1, e_2, \ldots, e_n$ dikatakan saling bebas linier (*linearly independent*) jika memenuhi kondisi berikut

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n = 0 \tag{2.4}$$

dipenuhi hanya apabila c_i seluruhnya bernilai nol ($i = 1, 2, \ldots, n$). Jika kondisi tersebut tidak terpenuhi, maka vektor $e_1, e_2, \ldots, e_n$ dikatakan tidak bebas linier (*linearly dependent*) atau bergantung linier.

Definisi tersebut menunjukkan bahwa jika satu atau lebih vektor dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari himpunan vektor lain, maka himpunan vektor tersebut bergantung linier.

Teorema 2.2.1. Misalkan $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ merupakan vektor eigen dari matriks $\mathbf{X}$ yang berkorespondensi dengan nilai eigen yang tak berulang $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, maka $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ bebas linier.

Bukti. Misalkan $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ merupakan vektor eigen dari $\mathbf{X}$ yang berkorespondensi dengan nilai eigen yang tak berulang $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Dengan menggunakan kontradiksi, asumsikan $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ bergantung linier.

Karena vektor eigen tak nol, maka $\{\mathbf{e_1}\}$ bebas linier. Misalkan r merupakan bilangan bulat terbesar sedemikian sehingga $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_r}\}$ bebas linier. Karena diasumsikan $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ bergantung linier, maka r akan memenuhi $1 \leq r < n$. Lebih lanjut $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_{r+1}}\}$ akan bergantung linier. Jadi terdapat skalar $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$ yang tidak semua sama dengan nol, sedemikian sehingga

$$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} = 0. \tag{2.5}$$

Kalikan masing-masing ruas persamaan (2.5) dengan $\mathbf{X}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{X}\left(c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{r+1}\mathbf{e}_{r+1}\right) &= 0. \\ c_1\mathbf{X}\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{X}\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{r+1}\mathbf{X}\mathbf{e}_{r+1} &= 0. \end{aligned}$$

Selanjutnya gunakan

$$\mathbf{Xe_1} = \lambda_1\mathbf{e_1},\ \mathbf{Xe_2} = \lambda_2\mathbf{e_2}, \ldots,\ \mathbf{Xe_{r+1}} = \lambda_{r+1}\mathbf{e_{r+1}},$$

dan akan didapatkan

$$c_1\lambda_1\mathbf{e}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{r+1}\lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} = 0. \tag{2.6}$$

Kalikan kedua ruas persamaan (2.5) dengan λ_{r+1} menjadi

$$c_1\lambda_{r+1}\mathbf{e}_1 + c_2\lambda_{r+1}\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{r+1}\lambda_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} = 0.$$

kurangi hasilnya dengan persamaan (2.6) maka didapatkan

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\mathbf{e}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})\mathbf{e}_2 + \ldots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\mathbf{e}_r = 0.$$

Karena $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_r}\}$ himpunan bebas linier, maka mengakibatkan

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1}) = \ldots = c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0.$$

Selanjutnya karena $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tak berulang, maka $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ juga tak berulang, sehingga diperoleh

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0. \tag{2.7}$$

Substitusi persamaan (2.7) ke persamaan (2.5) didapatkan

$$c_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} = 0.$$

Karena vektor eigen dari $\mathbf{e}_{r+1}$ tak nol, maka

$$c_{r+1} = 0. \tag{2.8}$$

Persamaan (2.7) dan (2.8) kontradiksi dengan fakta bahwa $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$ tidak semua sama dengan nol. Sehingga terbukti bahwa $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ bebas linier.

□

Definisi 2.2.3. Matriks $\mathbf{X}$ berukuran $n \times n$ dikatakan matriks ortogonal jika memenuhi $\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{I}$.

Akibat dari Definisi 2.2.3, suatu matriks $\mathbf{X}$ dikatakan matriks ortogonal jika memenuhi kondisi $\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^T$. Matriks yang tidak memenuhi kondisi $\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{I}$, maka matriks $\mathbf{X}$ disebut matriks singular.

Definisi 2.2.4. Suatu matriks $\mathbf{X}$ dikatakan dapat didiagonalisasi jika terdapat matriks $\mathbf{E}$ sehingga $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{E} = \mathbf{D}$, dimana $\mathbf{D}$ merupakan matriks diagonal.

Matriks $\mathbf{E}$ merupakan matriks $n \times n$ dengan elemen kolomnya merupakan vektor-vektor eigen dari matriks $\mathbf{X}$, sedangkan $\mathbf{D}$ merupakan matriks diagonal yang elemen diagonalnya merupakan nilai eigen dari $\mathbf{X}$.

Definisi 2.2.5. Suatu matriks $\mathbf{X}$ dapat didiagonalkan secara ortogonal jika $\mathbf{X}$ mempunyai matriks pendiagonal $\mathbf{E}$ yang bersifat ortogonal.

Misalkan matriks $\mathbf{X}$ dapat didiagonalisasi dengan matriks pendiagonal $\mathbf{E}$, maka dapat diperoleh hubungan

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{E} &= \mathbf{D} \\ \mathbf{E}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{E}\mathbf{E}^{-1} &= \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{E}^{-1} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{E}^{-1} \end{aligned}$$

Matriks $\mathbf{X}$ dapat didiagonalisasi secara ortogonal dengan matriks pendiagonal $\mathbf{E}$ yang ortogonal, maka mengakibatkan

$$\mathbf{X} = \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{E}^T \tag{2.9}$$

dengan mentranspose persamaan (2.9), maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T &= \left(\mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{E}^T\right)^T \\ \mathbf{X}^T &= \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{E}^T \qquad (2.10) \end{aligned}$$

Dari persamaan (2.9) dan (2.10) didapatkan bahwa matriks $\mathbf{X}$ dapat didiagonalisasi secara ortogonal, jika matriks $\mathbf{X}$ memenuhi sifat $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T$ (matriks simetri), dengan matriks pendiagonal $\mathbf{E}$ yang ortogonal.

Contoh 2.2.1. Misal diberikan matriks $\mathbf{X}$ berukuran 4×4 sebagai berikut:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan persamaan (2.3) dapat diperoleh matriks $(\mathbf{X} - \lambda\mathbf{I})$

$$\begin{aligned} \mathbf{Xe} &= \lambda\mathbf{e} \\ \mathbf{Xe} - \lambda\mathbf{e} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{X} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen λ dari matriks $\mathbf{X}$ dapat diperoleh dengan mencari solusi dari $det(\mathbf{X} -$

$\lambda\mathbf{I}) = 0$.

$$
\begin{aligned}
det(\mathbf{X} - \lambda\mathbf{I}) &= 0 \\
\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-0+0-0+(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
(3-\lambda)\left[-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+6+6-(-9\lambda+(1-\lambda)+4(2-\lambda))\right] &= 0 \\
(3-\lambda)(3+12\lambda+3\lambda^2-\lambda^3) &= 0 \\
\lambda^4-6\lambda^3-3\lambda^2+33\lambda+9 &= 0
\end{aligned}
$$

solusi dari akar-akar persamaan $\lambda^4 - 6\lambda^3 - 3\lambda^2 + 33\lambda + 9 = 0$ merupakan nilai eigen dari matriks $\mathbf{X}$, yaitu

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 3 \\
\lambda_2 &= 5.348 \\
\lambda_3 &= -2.079 \\
\lambda_4 &= -0.270
\end{aligned}
$$

Vektor eigen dari matriks $\mathbf{X}$ dapat diperoleh dari solusi persamaan (2.3) dengan mencari vektor yang bersesuaian dengan nilai eigen.

$$(\mathbf{X} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e} \;=\; \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

untuk nilai eigen $\lambda_1 = 3$, maka persamaan (2.3) menjadi

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan operasi baris elementer terhadap matriks $(\mathbf{X} - \lambda\mathbf{I})$ maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka solusi dari persamaaan (2.3) untuk nilai eigen $\lambda_1 = 3$ adalah

$$e_1 = 0, \qquad e_2 = 0, \qquad e_3 = 0, \qquad e_4 = \alpha \quad ; \text{dimana } \alpha \text{ adalah konstanta}$$

sehingga vektor eigen $\mathbf{e}_1$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dengan cara yang serupa, dapat diperoleh vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2, λ_3, dan λ_4. Sehingga vektor-vektor eigen dari matriks $\mathbf{X}$ adalah

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0.637 \\ 0.365 \\ 0.679 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0.746 \\ -0.515 \\ -0.423 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} -0.195 \\ -0.776 \\ 0.6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Matriks Kovariansi dan Matriks Korelasi

2.3.1 Matriks Kovariansi

Andaikan X adalah matriks data berukuran $m \times n$, sebagai berikut

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

dan $\bar{\mathbf{x}}$ adalah matriks rata-rata dari vektor baris matriks data $\mathbf{X}$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}} &= \frac{1}{n}\begin{bmatrix} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n} \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n} \\ \vdots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}}{n} \\ \frac{x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}}{n} \\ \vdots \\ \frac{x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}}{n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{x_1} \\ \bar{x_2} \\ \vdots \\ \bar{x_m} \end{bmatrix} \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, didefinisikan matriks μ adalah matriks berukuran $m \times n$ dengan elemennya adalah matriks $\bar{\mathbf{x}}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mu &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} & \bar{\mathbf{x}} & \cdots & \bar{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{x_1} & \bar{x_1} & \cdots & \bar{x_1} \\ \bar{x_2} & \bar{x_2} & \cdots & \bar{x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x_m} & \bar{x_m} & \cdots & \bar{x_m} \end{bmatrix} \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Kurangi matriks $\mathbf{X}$ dengan persamaan matriks (2.12) yang menghasilkan matriks $\mathbf{Q}$ berukuran $m \times n$ sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= \mathbf{X} - \mu \\
&= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{x_1} & \bar{x_1} & \cdots & \bar{x_1} \\ \bar{x_2} & \bar{x_2} & \cdots & \bar{x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x_m} & \bar{x_m} & \cdots & \bar{x_m} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x_1} & x_{12} - \bar{x_1} & \cdots & x_{1n} - \bar{x_1} \\ x_{21} - \bar{x_2} & x_{22} - \bar{x_2} & \cdots & x_{2n} - \bar{x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} - \bar{x_m} & x_{m2} - \bar{x_m} & \cdots & x_{mn} - \bar{x_m} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

Matriks kovarian Σ dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.14) sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \frac{1}{n-1}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \\
&= \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x_1} & x_{12} - \bar{x_1} & \cdots & x_{1n} - \bar{x_1} \\ x_{21} - \bar{x_2} & x_{22} - \bar{x_2} & \cdots & x_{2n} - \bar{x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} - \bar{x_m} & x_{m2} - \bar{x_m} & \cdots & x_{mn} - \bar{x_m} \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x_1} & x_{12} - \bar{x_1} & \cdots & x_{1n} - \bar{x_1} \\ x_{21} - \bar{x_2} & x_{22} - \bar{x_2} & \cdots & x_{2n} - \bar{x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} - \bar{x_m} & x_{m2} - \bar{x_m} & \cdots & x_{mn} - \bar{x_m} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1m} & s_{2m} & \cdots & s_{mm} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

dengan

$$s_{ik} = \frac{1}{n-1}\sum_{r=1}^{n}(x_{ir} - \bar{x_i})(x_{kr} - \bar{x_k})$$

2.3.2 Matriks Korelasi

Matriks korelasi adalah matriks yang setiap elemennya merupakan nilai korelasi. Matriks korelasi umumnya dilambangkan dengan ρ, dan dapat diperoleh dengan cara :

1. Menghitung Matriks kovariansi Σ dari persamaan (2.14).

2. Menghitung matriks baku yang isinya adalah simpangan baku. Dengan asumsi, jika $i \neq k$ dihasilkan $cov(i,k) = 0$, sehingga dapat ditulis ke dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{s_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{s_{mm}} \end{bmatrix}$$

3. Menghitung invers dari matriks deviasi dengan cara $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{s_{11}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{s_{22}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{s_{mm}}} \end{bmatrix}$$

matriks korelasi ρ dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.15) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \rho &= \mathbf{A}^{-1}\Sigma\mathbf{A}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{s_{11}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{s_{22}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{s_{mm}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1m} & s_{2m} & \cdots & s_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{s_{11}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{s_{22}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{s_{mm}}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s_{11}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{11}}} & \frac{s_{12}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{22}}} & \cdots & \frac{s_{1m}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{mm}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{s_{1m}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{mm}}} & \frac{s_{2m}}{\sqrt{s_{22}}\sqrt{s_{mm}}} & \cdots & \frac{s_{mm}}{\sqrt{s_{mm}}\sqrt{s_{mm}}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1m} & r_{2m} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.15}$$

dengan:

$$r_{ik} = \frac{1}{n-1}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{x_{ir}-\bar{x}_i}{\sqrt{s_{ii}}}\right)\left(\frac{x_{kr}-\bar{x}_k}{\sqrt{s_{kk}}}\right)$$

Untuk $i = k$ menghasilkan $r = 1$

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{1}{n-1}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{x_{1r}-\bar{x_1}}{\sqrt{s_{11}}}\right)\left(\frac{x_{1r}-\bar{x_1}}{\sqrt{s_{11}}}\right) = \frac{s_{11}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{11}}} = 1 \\ r_{mm} &= \frac{1}{n-1}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{x_{mr}-\bar{x_m}}{\sqrt{s_{mm}}}\right)\left(\frac{x_{mr}-\bar{x_m}}{\sqrt{s_{mm}}}\right) = \frac{s_{mm}}{\sqrt{s_{mm}}\sqrt{s_{mm}}} = 1 \end{aligned}$$

2.4 Analisis Komponen Utama

Analisis Komponen Utama atau yang lebih dikenal dengan *Principal Component Analysis (PCA)* merupakan suatu analisis statistika peubah ganda yang dapat digunakan untuk mereduksi sejumlah peubah asal menjadi beberapa peubah baru yang bersifat ortogonal dan tetap mempertahankan total keragaman dari peubah asalnya. Dengan demikian, Analisis Komponen Utama bisa digunakan dalam bidang sosial yang umumnya mengamati banyak peubah. Hal ini digunakan untuk menghilangkan peubah yang tidak memberikan tambahan informasi setelah adanya perubahan yang lain.

Analisis komponen utama bertujuan untuk menyederhanakan variabel yang diamati dengan cara menyusutkan dimensinya. Hal ini dilakukan dengan menghilangkan korelasi variabel melalui transformasi variabel asal ke variabel baru yang tidak berkorelasi.

Variabel baru ($\mathbf{Y}$) disebut sebagai komponen utama yang merupakan hasil transformasi dari variabel asal ($\mathbf{X}$) dengan persamaan sebagai berikut

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & \cdots & e_{m1} \\ e_{12} & e_{22} & \cdots & e_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{1m} & e_{2m} & \cdots & e_{mm} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y} & = & \mathbf{E}^T & \mathbf{X} \end{array} \tag{2.16}$$

dengan:

$\mathbf{Y}$: Komponen utama dari hasil transformasi

$\mathbf{E}$: Matriks transformasi

$\mathbf{X}$: Variabel asal

Komponen utama dapat ditentukan melalui matriks kovariansi (Σ) dan matriks korelasi (ρ) dari $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Matriks kovarian Σ digunakan untuk membentuk komponen utama apabila semua variabel yang diamati mempunyai satuan pengukuran yang sama. Sedangkan, matriks korelasi ρ digunakan apabila variabel yang diamati tidak mempunyai satuan pengukuran yang sama. Variabel tersebut perlu dibakukan, sehingga komponen utama berdasarkan matriks korelasi ditentukan dari matriks baku.

2.4.1 Komponen Utama berdasarkan Matriks Kovarian

Dipunyai matriks kovarian Σ dari m buah variabel $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Total varian dari variabel tersebut didefinisikan sebagai $tr(\Sigma) = trace(\Sigma)$ yaitu penjumlahan dari unsur diagonal matriks Σ. Melalui matriks kovarian Σ bisa diturunkan nilai eigennya yaitu $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_m \geq 0$ dan vektor eigennya $e_1, e_2, \ldots, e_m$.

Komponen utama pertama dari vektor berukuran $m \times 1$, adalah kombinasi linier variabel asal yang dapat menerangkan keragaman terbesar.

Komponen utama pertama dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} y_1 &= e_{11}x_1 + e_{21}x_2 + \ldots + e_{m1}x_m \\ y_1 &= {e_1}^T X \end{aligned} \tag{2.17}$$

dengan :

$${e_1}^T = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & \ldots & e_{m1} \end{pmatrix} \text{ dan } {e_1}^T e_1 = 1$$

Varian dari komponen utama pertama adalah :

$$\begin{aligned} \sigma^2_{y_1} &= \sum_{i=i}^{m} \sum_{j=1}^{m} e_{i1} e_{j1} s_{ij} \\ &= {e_1}^T \Sigma e_1 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Koefisien e_{i1} adalah unsur-unsur dari vektor eigen yang berhubungan dengan nilai eigen λ_1 yang diturunkan dari matriks kovarian Σ, dipilih sedemikian sehingga $\sigma^2_{y_1}$ mencapai maksimum dengan kendala ${e_1}^T e_1 = 1$. Menggunakan teknik pemaksimuman berkendala lagrange diperoleh persamaan :

$$\begin{aligned} f(e_1, \lambda_1) &= \sigma^2_{y_1} - \lambda_1({e_1}^T e_1 - 1) \\ &= {e_1}^T \Sigma e_1 - \lambda_1({e_1}^T e_1 - 1) \end{aligned}$$

Fungsi ini mencapai maksimum jika turunan parsial pertama $f(e_1, \lambda_1)$

terhadap e_1 sama dengan nol.

$$\frac{\partial f(e_1, \lambda_1)}{\partial e_1} = 2\Sigma e_1 - 2\lambda_1 e_1 = 0$$

atau

$$\Sigma e_1 = \lambda_1 e_1 \tag{2.19}$$

Persamaan (2.19) dipenuhi oleh λ_1 dan e_1 yang merupakan pasangan nilai eigen dan vektor eigen matriks Σ. Akibatnya ${e_1}^T \Sigma e_1 = {e_1}^T \lambda_1 e_1 = \lambda_1 {e_1}^T e_1 = \lambda_1$ Oleh karena itu varian $y_1 = \sigma_{y_1}^2 = {e_1}^T \Sigma e_1 = \lambda_1$ harus maksimum, jadi λ_1 adalah nilai eigen yang terbesar dari matriks Σ dan e_1 adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1.

Komponen utama kedua adalah kombinasi linier variabel asal yang tidak berkorelasi dengan komponen utama pertama, serta memaksimumkan sisa varian data setelah diterangkan oleh komponen utama pertama. Komponen utama kedua dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} y_2 &= e_{12}x_1 + e_{22}x_2 + \ldots + e_{m2}x_m \\ y_2 &= {e_2}^T X \end{aligned} \tag{2.20}$$

dengan :

$${e_2}^T = \begin{pmatrix} e_{12} & e_{22} & \ldots & e_{m2} \end{pmatrix} \text{ dan } {e_2}^T e_2 = 1$$

Vektor ${e_2}^T$ adalah vektor yang dipilih sehingga varian komponen utama kedua maksimum, serta ortogonal terhadap vektor ${e_1}^T$ dari komponen utama pertama. Agar varian dari komponen utama kedua maksimum, serta antara komponen utama kedua tidak berkorelasi dengan komponen utama pertama, maka vektor e_2 dipilih sedemikian sehingga $y_2 = {e_2}^T X$ tidak berkorelasi dengan

$y_1 = {e_1}^T X$. Varian komponen utama kedua (y_2) adalah :

$$\begin{aligned} \sigma^2_{y_2} &= \sum_{i=i}^{m}\sum_{j=1}^{m} e_{i2}e_{j2}s_{ij} \\ &= {e_2}^T \Sigma e_2 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Varian tersebut akan dimaksimumkan dengan kendala ${e_2}^T \Sigma e_2 = 1$ dan $cov(y_1, y_2) = cov(e_1 x, e_2 x) = {e_1}^T \Sigma e_2 = 0$. Karena e_1 adalah vektor eigen dari Σ dan Σ adalah matriks simetrik, maka :

$${e_1}^T \Sigma = {e_1}^T \Sigma^T = (\Sigma e_1)^T = (\lambda e_1)^T = \lambda {e_1}^T$$

Kendala ${e_1}^T \Sigma e_2 = \lambda {e_1}^T e_2 = 0$ dapat dituliskan sebagai ${e_1}^T e_2 = 0$. Jadi fungsi Lagrange yang dimaksimumkan adalah :

$$f(e_2, \lambda_2, \lambda) = ({e_2}^T \Sigma e_2) - \lambda_2({e_2}^T e_2 - 1) - \lambda({e_1}^T e_2 - 0) \tag{2.22}$$

Fungsi ini mencapai maksimum jika turunan parsial pertama $f(e_2, \lambda_2, \lambda)$ terhadap e_2 sama dengan nol, diperoleh

$$\frac{\partial f(e_2, \lambda_2, \lambda)}{\partial e_2} = 2\Sigma e_2 - 2\lambda_2 e_2 - \lambda \Sigma e_1 = 0 \tag{2.23}$$

Jika persamaan (2.23) dikalikan dengan ${e_1}^T$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} 2{e_1}^T \Sigma e_2 - 2\lambda_2 {e_1}^T e_2 - \lambda {e_1}^T \Sigma e_1 &= 0 \\ 2{e_1}^T \Sigma e_2 - 2\lambda_2 {e_1}^T e_2 - \lambda\lambda_1 {\alpha_1}^T \alpha_1 &= 0 \\ 2{e_1}^T \Sigma e_2 - 0 - \lambda\lambda_1 &= 0 \end{aligned}$$

Oleh karena $2{e_1}^T \Sigma e_2 = 0$ maka $\lambda = 0$. Dengan demikian persamaan (2.23) setelah diturunkan terhadap e_2 menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(e_2, \lambda_2, \lambda)}{\partial e_2} &= 2\Sigma e_2 - 2\lambda_2 e_2 = 0 \\ &\text{atau} \\ \Sigma e_2 &= \lambda_2\ e_2 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Jadi λ_2 dan e_2 merupakan pasangan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks kovariansi Σ. Seperti halnya penurunan pada pencarian e_1, akan diperoleh bahwa e_2 adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen terbesar kedua dari matriks kovariansi Σ.

Secara umum komponen utama ke-j dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{aligned} y_j &= e_{1j}x_1 + e_{2j}x_2 + \ldots + e_{mj}x_m \\ y_j &= {e_j}^T X \end{aligned} \tag{2.25}$$

dengan :

$${e_j}^T = \begin{pmatrix} e_{1j} & e_{2j} & \ldots & e_{mj} \end{pmatrix} \text{ dan } {e_j}^T e_j = 1$$

Vektor ${e_j}^T$ diperoleh dengan memaksimumkan varian komponen utama ke-j, yaitu

$$\sigma^2_{y_j} = {e_j}^T \Sigma e_j \tag{2.26}$$

dengan kendala :

$${e_i}^T e_j = \begin{cases} 1 & \text{untuk } i = j \\ 0 & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

Dengan kendala ini, maka nilai eigen λ_j dapat diinterpretasikan sebagai ragam komponen utama ke-j serta sesama komponen utama tidak berkorelasi.

Vektor ${e_j}^T$ yang merupakan koefisien variabel asal bagi komponen utama ke-j diperoleh dari matriks kovariansi Σ yang diduga dengan matriks berikut

$$\Sigma = \frac{1}{n-1}\sum_{r=1}^{n}(x_r - \bar{x})(x_r - \bar{x})^T \tag{2.27}$$

2.4.2 Komponen Utama berdasarkan Matriks Korelasi

Jika variabel yang diamati tidak mempunyai satuan pengukuran yang sama, maka variabel tersebut perlu dibakukan sehingga komponen utama ditentukan dari variabel baku. Variabel asal perlu ditransformasi ke dalam matriks baku Z, dengan persamaan sebagai berikut

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{X} - \mu) \tag{2.28}$$

dengan:

$\mathbf{Z}$ = matriks baku

$\mathbf{A}$ = matriks simpangan baku

$\mathbf{X}$ = variabel pengamatan

μ = nilai rata-rata pengamatan

dengan nilai harapan $E(\mathbf{Z}) = 0$, dan ragamnya $cov(\mathbf{Z}) = (\mathbf{A})^{-1}\Sigma(\mathbf{A})^{-1} = \rho$.

Dengan demikian, komponen utama dari $\mathbf{Z}$ dapat ditentukan dari vektor eigen yang diperoleh melalui matriks korelasi yang diduga dengan matriks ρ, dimana vektor ${e_j}^T$ diperoleh dengan memaksimumkan varian komponen utama ke-j dengan kendala

$${e_i}^T e_j = \begin{cases} 1 & \text{untuk } i = j \\ 0 & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

Semua formula yang telah diturunkan berdasarkan variabel $x_1, x_2, \ldots, x_m$ dengan matriks Σ akan berlaku untuk peubah-peubah $z_1, z_2, \ldots, z_m$ dengan matriks ρ.

Sehingga diperoleh komponen utama ke-j dengan menggunakan matriks baku yaitu :

$$y_j = {e_j}^T \mathbf{Z} \tag{2.29}$$

dengan:

y_j	=	komponen utama ke-j
${e_j}^T$	=	vektor eigen ke-j
$\mathbf{Z}$	=	matriks baku

Ragam komponen utama ke-j adalah sama dengan nilai eigen ke-j, serta antara komponen utama ke-i dan komponen utama ke-j tidak berkorelasi untuk $i \neq j$.

2.5 Transformasi Karhunen-Loeve (KLT)

Transformasi Karhunen-Loeve atau yang lebih dikenal dengan *Karhunen-Loeve Transform (KLT)* merupakan teknik yang digunakan untuk mentransfer sejumlah besar data (yang berdimensi besar) ke suatu subruang yang berdimensi lebih kecil. Pereduksian dimensinya dilakukan dengan memilih vektor-vektor eigen yang merupakan komponen utama dari seluruh vektor eigen, dengan kata lain yaitu mereduksi dimensi dengan cara membuang vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen bernilai rendah (mendekati nol). Vektor-vektor eigen tersebut dibangkitkan dari suatu matriks kovarian yang merupakan representasi dari distribusi data.

Misalkan **X** adalah vektor data dengan lebar dimensi m.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

Matriks μ didefinisikan sebagai matriks rata-rata dari **X**

$$\begin{aligned} \mu &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} & \bar{\mathbf{x}} & \cdots & \bar{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{x_1} & \bar{x_1} & \cdots & \bar{x_1} \\ \bar{x_2} & \bar{x_2} & \cdots & \bar{x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x_m} & \bar{x_m} & \cdots & \bar{x_m} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.31}$$

Selanjutnya dibentuk matriks kovarian Σ menggunakan persamaan (2.32)

$$\Sigma = \frac{1}{n-1}(\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)^T \tag{2.32}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{mm} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Karena matriks Σ berukuran $m \times m$ (matriks persegi), maka dari Σ dapat diperoleh suatu vektor eigen yang ortonormal.

$$\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} e_{1j} \\ e_{2j} \\ e_{3j} \\ \vdots \\ e_{mj} \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

Setelah didapat vektor-vektor eigen beserta nilai eigennya dari matriks Σ, selanjutnya kita definisikan $\mathbf{E}$ sebagai matriks transformasi (berukuran $m \times m$) yang elemennya adalah vektor-vektor eigen dari matriks Σ.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1m} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mm} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.35}$$

Didefinisikan pula λ sebagai vektor yang berisi nilai-nilai eigen yang bersuaian dengan matriks $\mathbf{E}$.

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

Transformasi Karhunen Loeve merupakan bagian dari Analisis Komponen Utama berdasarkan matriks kovariansi, akibatnya posisi-posisi vektor $\mathbf{e}_j$ sudah terurut, dengan $\mathbf{e}_1$ sebagai vektor eigen yang besesuaian dengan nilai eigen terbesar λ_1, dan $\mathbf{e}_m$ sebagai vektor eigen dengan nilai eigen terkecil λ_m. Dengan menggunakan persamaan (2.37), matriks data $\mathbf{X}$ dapat ditransformasikan ke ruang eigen. Matriks $\mathbf{Y}$ merupakan representasi dari matriks $\mathbf{X}$ di ruang eigen.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{E}^T(\mathbf{X} - \mu) \tag{2.37}$$

Jika matriks $\mathbf{E}$ digunakan sebagai matriks transformasi, maka lebar dimensi dari ruang eigen masih sama dengan dimensi pada matriks data $\mathbf{X}$. Untuk mendapatkan ruang eigen yang berdimensi lebih kecil dari dimensi matriks $\mathbf{X}$, perlu dilakukan reduksi dimensi dengan membentuk matriks transformasi dari vektor-vektor $\mathbf{e}_j$ yang bersesuaian dengan nilai λ_j terbesar, dengan kata lain yaitu mereduksi dimensi dengan cara membuang vektor eigen $\mathbf{e}_j$ yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_j bernilai rendah (mendekati nol).

Vektor eigen dengan niai eigen yang besar memiliki peranan paling penting dalam proses transformasi dimensi. Hal ini dikarenakan semakin tinggi nilai eigen maka makin tinggi pula lebar distribusi data pada vektor eigen tersebut. Oleh karena itu, mereduksi dimensi dengan cara membuang vektor eigen dengan nilai eigen mendekati nol (bernilai rendah) tidak akan membuat kita kehilangan informasi data.

Matriks transformasi $\mathbf{W}$ (berukuran $m \times k$) dibentuk dari matriks $\mathbf{E}$ dengan memilih k buah vektor eigen $\mathbf{e}_j$ dengan nilai eigen terbesar, dimana $k < m$.

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mk} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.38}$$

Selanjutnya pada persamaan (2.37), ganti matriks transformasi $\mathbf{E}$ dengan matriks $\mathbf{W}$ menjadi

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}^T\mathbf{X} \tag{2.39}$$

maka akan diperoleh representasi dari matriks $\mathbf{X}$ yaitu matriks $\mathbf{Y}$ yang berukuran lebih kecil dari matriks $\mathbf{X}$, akibat dari pereduksian matriks $\mathbf{W}$. Nilai k yang telah dipilih akan menentukan besarnya proporsi komulatif (α), dengan persamaan (2.40).

$$\alpha = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j} \tag{2.40}$$

Contoh 2.5.1. Misal diberikan $\mathbf{X}$ sebuah matriks berukuran 8×8 sebagai berikut:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 2 & 5 & 8 & 14 & 14 & 14 \\ 10 & 1 & 12 & 4 & 4 & 13 & 7 & 6 \\ 7 & 9 & 8 & 2 & 12 & 8 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 8 & 0 & 7 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 14 & 0 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 10 & 15 & 7 & 10 & 12 & 3 \\ 14 & 0 & 6 & 11 & 10 & 10 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 5 & 4 & 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

dan $\bar{\mathbf{x}}$ adalah matriks rata-rata dari vektor baris matriks data $\mathbf{X}$

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}} &= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{18} \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{28} \\ \vdots \\ x_{81}+x_{82}+\ldots+x_{88} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 9.125 \\ 7.125 \\ 6.125 \\ 3.75 \\ 4.375 \\ 7.625 \\ 6.625 \\ 3.625 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, didefinisikan matriks μ adalah matriks berukuran 8×8 dengan elemennya adalah matriks $\bar{\mathbf{x}}$ sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\mu &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} & \bar{\mathbf{x}} & \cdots & \bar{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
9.125 & 9.125 & 9.125 & 9.125 & 9.125 & 9.125 & 9.125 & 9.125 \\
7.125 & 7.125 & 7.125 & 7.125 & 7.125 & 7.125 & 7.125 & 7.125 \\
6.125 & 6.125 & 6.125 & 6.125 & 6.125 & 6.125 & 6.125 & 6.125 \\
3.75 & 3.75 & 3.75 & 3.75 & 3.75 & 3.75 & 3.75 & 3.75 \\
4.375 & 4.375 & 4.375 & 4.375 & 4.375 & 4.375 & 4.375 & 4.375 \\
7.625 & 7.625 & 7.625 & 7.625 & 7.625 & 7.625 & 7.625 & 7.625 \\
6.625 & 6.625 & 6.625 & 6.625 & 6.625 & 6.625 & 6.625 & 6.625 \\
3.625 & 3.625 & 3.625 & 3.625 & 3.625 & 3.625 & 3.625 & 3.625
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Matriks kovarian Σ dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.32) sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \frac{1}{n-1}(\mathbf{X}-\mu)(\mathbf{X}-\mu)^T \\
&= \begin{bmatrix}
21.55 & -1.45 & -5.59 & -3.68 & -4.48 & -3.38 & -12.09 & -0.38 \\
-1.45 & 17.84 & 0.55 & 4.46 & -7.20 & 3.91 & 8.77 & -7.66 \\
-5.59 & 0.55 & 16.41 & -2.54 & -11.63 & -8.38 & 6.63 & 0.48 \\
-3.68 & 4.46 & -2.54 & 8.50 & 8.39 & 7.61 & 8.04 & 0.32 \\
-4.48 & -7.20 & -11.63 & 8.39 & 23.98 & 9.16 & 5.45 & 2.16 \\
-3.38 & 3.91 & -8.38 & 7.61 & 9.16 & 24.27 & 4.84 & -3.16 \\
-12.09 & 8.77 & 6.63 & 8.04 & 5.45 & 4.84 & 29.13 & -13.16 \\
-0.38 & -7.66 & 0.48 & 0.32 & 2.16 & -3.16 & -13.16 & 14.55
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Nilai eigen dari matriks Σ adalah:

$$\lambda_1 = 53.70 \quad \lambda_2 = 42.42 \quad \lambda_3 = 26.41 \quad \lambda_4 = 16.01$$
$$\lambda_5 = 9.72 \quad \lambda_6 = 7.67 \quad \lambda_7 = 0.30 \quad \lambda_8 = 0.00$$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut adalah:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0.359 \\ -0.245 \\ 0.035 \\ -0.289 \\ -0.307 \\ -0.388 \\ -0.639 \\ 0.272 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -0.127 \\ 0.288 \\ 0.504 \\ -0.139 \\ -0.580 \\ -0.373 \\ 0.320 \\ -0.224 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0.561 \\ 0.493 \\ -0.320 \\ 0.002 \\ -0.288 \\ 0.331 \\ -0.111 \\ -0.367 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0.447 \\ -0.261 \\ -0.153 \\ -0.089 \\ 0.358 \\ -0.530 \\ 0.362 \\ -0.402 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_5 = \begin{bmatrix} -0.011 \\ 0.594 \\ -0.198 \\ 0.419 \\ 0.181 \\ -0.510 \\ -0.054 \\ 0.370 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_6 = \begin{bmatrix} -0.566 \\ 0.131 \\ -0.516 \\ -0.415 \\ -0.009 \\ -0.213 \\ -0.226 \\ -0.357 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_7 = \begin{bmatrix} -0.044 \\ -0.363 \\ -0.542 \\ 0.293 \\ -0.566 \\ -0.056 \\ 0.346 \\ 0.209 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_8 = \begin{bmatrix} -0.137 \\ -0.212 \\ 0.141 \\ 0.675 \\ -0.076 \\ -0.104 \\ -0.416 \\ -0.522 \end{bmatrix}$$

Dibentuk matriks transformasi $\mathbf{E}$ dari himpunan vektor-vektor eigen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_8$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_7 & \mathbf{e}_8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.359 & -0.127 & 0.561 & 0.447 & -0.011 & -0.566 & -0.044 & -0.137 \\ -0.245 & 0.288 & 0.493 & -0.261 & 0.594 & 0.131 & -0.363 & -0.212 \\ 0.035 & 0.504 & -0.320 & -0.153 & -0.198 & -0.516 & -0.542 & 0.141 \\ -0.289 & -0.139 & 0.002 & -0.089 & 0.419 & -0.415 & 0.293 & 0.675 \\ -0.307 & -0.580 & -0.288 & 0.358 & 0.181 & -0.009 & -0.566 & -0.076 \\ -0.388 & -0.373 & 0.331 & -0.530 & -0.510 & -0.213 & -0.056 & -0.104 \\ -0.639 & 0.320 & -0.111 & 0.362 & -0.054 & -0.226 & 0.346 & -0.416 \\ 0.272 & -0.224 & -0.367 & -0.402 & 0.370 & -0.357 & 0.209 & -0.522 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dipilih $k = 4$, sehingga matriks transformasi $\mathbf{E}$ dapat direduksi menjadi

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0.359 & -0.127 & 0.561 & 0.447 \\ -0.245 & 0.288 & 0.493 & -0.261 \\ 0.035 & 0.504 & -0.320 & -0.153 \\ -0.289 & -0.139 & 0.002 & -0.089 \\ -0.307 & -0.580 & -0.288 & 0.358 \\ -0.388 & -0.373 & 0.331 & -0.530 \\ -0.639 & 0.320 & -0.111 & 0.362 \\ 0.272 & -0.224 & -0.367 & -0.402 \end{bmatrix}$$

Maka transformasi Karhunen Loeve dari matriks $\mathbf{X}$ adalah

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \mathbf{W}^T\mathbf{X} \\
&= \begin{bmatrix} -13.367 & 3.746 & -9.452 & -17.486 & -6.794 & -9.935 & -4.184 & 2.367 \\ 4.625 & -3.197 & 3.748 & -10.678 & 6.773 & 3.467 & -9.067 & -0.589 \\ 3.158 & -1.953 & 5.295 & 2.397 & 3.827 & 12.895 & 12.055 & 9.345 \\ 5.070 & -1.529 & -8.956 & -0.391 & 0.606 & -1.108 & -0.534 & 2.157 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Dengan $k = 4$, selanjutnya kita dapat mencari nilai α dari persamaan

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j} \\
&= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_8} \\
&= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8} \\
&= \frac{53.70 + 42.42 + 26.41 + 16.01}{53.70 + 42.42 + 26.41 + 16.01 + 9.72 + 7.67 + 0.30 + 0.00} \\
&= 0.89
\end{aligned}
$$

diperoleh $\alpha = 0.89$ atau pemampatan sebesar 89%.

2.6 Dekomposisi Nilai Singular (SVD)

Dekomposisi Nilai Singular atau yang lebih dikenal dengan *Singular Value Decomposition (SVD)* sangat berkaitan dengan nilai singular dalam matriks yang merupakan salah satu karakteristik matriks

Rank dari matriks $\mathbf{X}$ merupakan bilangan yang menunjukkan banyaknya vektor kolom yang saling bebas linier dalam himpunan $\mathbf{X} = \left\{ \begin{array}{cccc} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_m \end{array} \right\}$ dan dinotasikan sebagai $r(\mathbf{X})$.

Definisi 2.6.1. Diketahui matriks $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dengan rank $\mathbf{X} = r$. Diketahui juga nilai eigen dari matriks $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0 \tag{2.41}$$

Bilangan $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, untuk setiap $1 \leq i \leq n$ disebut nilai singular dari matriks $\mathbf{X}$

Teorema 2.6.1. Diketahui matriks $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dengan rank $\mathbf{X} = r$. Maka terdapat sejumlah nilai singular yang tak nol.

Bukti. Misalkan nilai eigen dari matriks $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ adalah $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dengan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Berarti terdapat sejumlah n vektor eigen $x_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n$ yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen tersebut. Misalkan $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ merupakan himpunan n vektor eigen yang dimaksud, karena matriks $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ merupakan matriks simetri, maka himpunan vektor eigen $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ membentuk basis ortogonal untuk $\mathbb{R}^n$. Jika basis ortogonal tersebut dinormalisasi akan diperoleh basis ortonormal $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ untuk $\mathbb{R}^n$, dengan $p_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$.
Karena himpunan $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ merupakan basis ortonormal untuk $\mathbb{R}^n$, maka

berlaku $\langle p_i, p_i \rangle = \|p_i\|^2 = 1$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$, akibatnya

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}p_i, \mathbf{X}p_i \rangle &= (\mathbf{X}p_i)^T(\mathbf{X}p_i) \\ &= {p_i}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X}p_i) \\ &= {p_i}^T(\lambda_i p_i) \\ &= \lambda_i({p_i}^T p_i) \\ &= \lambda_i \|p_i\|^2 \\ &= \lambda_i \end{aligned} \tag{2.42}$$

Menurut definisi nilai singular, berlaku

$$\sigma_i^2 = \lambda_i = \|\mathbf{X}p_i\|^2, \text{ untuk setiap } 1 \leq i \leq n \tag{2.43}$$

Karena diketahui rank $\mathbf{X} = r$, maka berlaku $\mathbf{X}p_1 = \mathbf{X}p_2 = \ldots = \mathbf{X}p_r \neq \bar{0}$, dan $\mathbf{X}p_{r+1} = \mathbf{X}p_{r+2} = \ldots = \mathbf{X}p_n = \bar{0}$. Jadi diperoleh $\sigma_i \neq 0$, untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, r$. □

Karakteristik matriks juga menentukan karakteristik dari sebuah matriks transformasi linear. Hubungan antara prapeta dan petanya, ditentukan oleh karakteristik matriks transformasi linear, misalnya hubungan antara prapeta $\{v_1, v_2\}$ ketika ditransformasikan menggunakan matriks $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dengan petanya $\{\sigma_1 u_1, \sigma_2 u_2\}$. Vektor u, v masing-masing adalah vektor unit, sehingga dengan demikian apabila jumlah vektor u dan v ada sebanyak n buah, maka berlaku:

$$\mathbf{X}v_i = \sigma_i u_i, 1 \leq i \leq n \tag{2.44}$$

Dalam notasi matriks:

$$\underset{\mathbf{V}}{\mathbf{X}\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{L}}{\begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}} \tag{2.45}$$

dengan

U : matriks dengan $u_1 = \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{X}v_i$.

V : matriks yang dibentuk oleh vektor eigen normal matriks $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$.

L : matriks diagonal yang entri-entrinya adalah nilai singular matriks $\mathbf{X}$.

Hubungan ini dapat pula ditulis sebagai:

$$\mathbf{XV} = \mathbf{UL} \tag{2.46}$$

Karena $\mathbf{V}$ adalah matriks ortogonal, maka dengan mengalikannya dengan $\mathbf{V}^T$ dari kanan diperoleh:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T \tag{2.47}$$

Bentuk diatas disebut dengan bentuk dekomposisi nilai singular.

Berikut akan dijelaskan mengenai cara untuk membentuk matriks $\mathbf{U}$ dan $\mathbf{V}$. Misalkan diketahui matriks $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dengan rank $\mathbf{X} = r$. Kemudian dibentuk matriks $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$, dan dicari nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigennya. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ merupakan nilai-nilai eigen matriks $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ dan $v_1, v_2, \ldots, v_n$

merupakan vektor-vektor eigen matriks $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ dengan v_i merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i. Karena $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ matriks simetri maka vektor-vektor eigennya membentuk basis ortonormal. Dengan demikian dapat dibentuk matriks $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ yang merupakan matriks ortogonal.

Menurut definisi nilai eigen

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X}v_i = \lambda_i v_i \text{ untuk setiap } 1 \leq i \leq n \tag{2.48}$$

sehingga diperoleh

$$v_i{}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}v_j = v_i{}^T\lambda_j v_j = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle \tag{2.49}$$

Menurut Teorema (2.6.1) ada sejumlah r singular yang tidak nol. Dengan demikian, untuk nilai positif λ_j dengan $j = 1, 2, \ldots, r$ dapat didefinisikan $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$ dan bentuk vektor $u_j = \frac{1}{\sigma_j}\mathbf{X}v_j$. Diperhatikan bahwa $\langle u_i, u_j \rangle = (\frac{1}{\sigma_i}\mathbf{X}v_i)^T\frac{1}{\sigma_j}\mathbf{X}v_j = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}(v_i{}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}v_j) = \frac{\lambda_j}{\sigma_i\sigma_j}(v_i{}^T v_j) = \frac{\lambda_j}{\sigma_i\sigma_j}\langle v_i, v_j \rangle$ dan,

1. Untuk $i \neq j$, diperoleh $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ dan akibatnya

$$\langle u_i, u_j \rangle = \frac{\lambda_j}{\sigma_i\sigma_j}\langle v_i, v_j \rangle = \frac{\lambda_j}{\sigma_i\sigma_j} \cdot 0 = 0 \tag{2.50}$$

2. Untuk $i = j$, diperoleh $\langle v_i, v_j \rangle = 1$ dan akibatnya

$$\langle u_i, u_j \rangle = \frac{\lambda_j}{\sigma_i\sigma_j}\langle v_i, v_j \rangle = \frac{\lambda_j}{\sigma_i\sigma_j} \cdot 1 = 1 \tag{2.51}$$

Dari (1) dan (2), berakibat himpunan $\{u_1.u_2, \ldots, u_r\}$ merupakan basis ortonormal. Dibentuk matriks $\mathbf{U}$, dan $\mathbf{V}$ yang masing-masing dibangun oleh vektor-

vektor eigen u dan v. Maka diperoleh:

$$(\mathbf{U}^T\mathbf{X}\mathbf{V})_{ij} = {u_i}^T\mathbf{X}v_j = \begin{cases} 0 & j > r \\ \sigma_j \langle u_i, u_j \rangle & j \leq r \end{cases} \tag{2.52}$$

Sehingga $\mathbf{U}^T\mathbf{X}\mathbf{V} = \mathbf{L}$ atau dengan kata lain $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{L}\mathbf{V}^T$.

Algoritma Dekomposisi Nilai Singular

1. Dibentuk matriks $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ dan tentukan sejumlah r nilai singular tak nolnya. Misalkan $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\}$ merupakan nilai-nilai singular tak nol matriks $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ dengan $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$.

2. Dibentuk matriks diagonal $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}$

3. Dicari himpunan vektor eigen matriks $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$. Misalkan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ merupakan vektor-vektor eigen matriks $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ dengan v_i merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i.

4. Dibentuk matriks ortogonal $\mathbf{V}$, dengan elemennya merupakan vektor-vektor kolom $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, sebagai berikut $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$.

5. Dibentuk himpunan vektor $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dengan $u_i = \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{X}v_i$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$.

6. Dibentuk matriks ortogonal $\mathbf{U}$, dengan elemennya merupakan vektor-vektor kolom $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, sebagai berikut $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$.

Contoh 2.6.1. Misal diberikan $\mathbf{X}$ sebuah matriks berukuran 8×8 sebagai berikut:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 2 & 5 & 8 & 14 & 14 & 14 \\ 10 & 1 & 12 & 4 & 4 & 13 & 7 & 6 \\ 7 & 9 & 8 & 2 & 12 & 8 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 8 & 0 & 7 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 14 & 0 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 10 & 15 & 7 & 10 & 12 & 3 \\ 14 & 0 & 6 & 11 & 10 & 10 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 5 & 4 & 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Cari matriks $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 7 & 5 & 7 & 2 & 14 & 0 \\ 10 & 1 & 9 & 3 & 5 & 2 & 0 & 12 \\ 2 & 12 & 8 & 4 & 0 & 10 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 8 & 14 & 15 & 11 & 4 \\ 8 & 4 & 12 & 0 & 0 & 7 & 10 & 0 \\ 14 & 13 & 8 & 7 & 1 & 10 & 10 & 2 \\ 14 & 7 & 0 & 3 & 7 & 12 & 1 & 3 \\ 14 & 6 & 3 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 10 & 2 & 5 & 8 & 14 & 14 & 14 \\ 10 & 1 & 12 & 4 & 4 & 13 & 7 & 6 \\ 7 & 9 & 8 & 2 & 12 & 8 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 8 & 0 & 7 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 14 & 0 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 10 & 15 & 7 & 10 & 12 & 3 \\ 14 & 0 & 6 & 11 & 10 & 10 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 5 & 4 & 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 459 & 187 & 312 & 406 & 326 & 472 & 256 & 192 \\ 187 & 364 & 196 & 244 & 206 & 295 & 251 & 220 \\ 312 & 196 & 389 & 342 & 290 & 446 & 265 & 175 \\ 406 & 244 & 342 & 667 & 295 & 476 & 423 & 182 \\ 326 & 206 & 290 & 295 & 373 & 430 & 234 & 203 \\ 472 & 295 & 446 & 476 & 430 & 683 & 451 & 345 \\ 256 & 251 & 265 & 423 & 234 & 451 & 457 & 291 \\ 192 & 220 & 175 & 182 & 203 & 345 & 291 & 261 \end{bmatrix}$$

maka nilai eigen dari $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ adalah:

$$\lambda_1 = 2673.367 \quad \lambda_2 = 327.003 \quad \lambda_3 = 296.233 \quad \lambda_4 = 164.048$$
$$\lambda_5 = 111.969 \quad \lambda_6 = 67.577 \quad \lambda_7 = 11.835 \quad \lambda_8 = 0.968$$

sehingga vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut adalah:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.357 \\ 0.254 \\ 0.329 \\ 0.419 \\ 0.317 \\ 0.488 \\ 0.354 \\ 0.246 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -0.378 \\ 0.529 \\ -0.158 \\ -0.456 \\ -0.046 \\ 0.056 \\ 0.308 \\ 0.495 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -0.257 \\ 0.094 \\ -0.235 \\ 0.644 \\ -0.424 \\ -0.270 \\ 0.445 \\ -0.064 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0.126 \\ 0.765 \\ 0.003 \\ 0.181 \\ 0.159 \\ -0.321 \\ -0.427 \\ -0.235 \end{bmatrix}$$

$$v_5 = \begin{bmatrix} 0.532 \\ -0.056 \\ -0.798 \\ 0.020 \\ 0.114 \\ -0.035 \\ -0.007 \\ 0.248 \end{bmatrix} \quad v_6 = \begin{bmatrix} -0.479 \\ -0.155 \\ -0.207 \\ 0.170 \\ 0.805 \\ -0.121 \\ 0.083 \\ -0.073 \end{bmatrix} \quad v_7 = \begin{bmatrix} 0.316 \\ -0.113 \\ 0.344 \\ -0.139 \\ 0.161 \\ -0.748 \\ 0.324 \\ 0.242 \end{bmatrix} \quad v_8 = \begin{bmatrix} 0.184 \\ 0.152 \\ -0.116 \\ -0.347 \\ 0.075 \\ 0.084 \\ 0.536 \\ -0.714 \end{bmatrix}$$

Dibentuk matriks diagonal **L**

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_8} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 51.705 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18.083 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17.211 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.808 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10.582 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.221 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.440 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.984 \end{bmatrix}$$

Dibentuk matriks $\mathbf{V}$ dari himpunan vektor-vektor eigen dari $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.357 & -0.378 & -0.257 & 0.126 & 0.532 & -0.479 & 0.316 & 0.184 \\ 0.254 & 0.529 & 0.094 & 0.765 & -0.056 & -0.155 & -0.113 & 0.152 \\ 0.329 & -0.158 & -0.235 & 0.003 & -0.798 & -0.207 & 0.344 & -0.116 \\ 0.419 & -0.456 & 0.644 & 0.181 & 0.020 & 0.170 & -0.139 & -0.347 \\ 0.317 & -0.046 & -0.424 & 0.159 & 0.114 & 0.805 & 0.161 & 0.075 \\ 0.488 & 0.056 & -0.270 & -0.321 & -0.035 & -0.121 & -0.748 & 0.084 \\ 0.354 & 0.308 & 0.445 & -0.427 & -0.007 & 0.083 & 0.324 & 0.536 \\ 0.246 & 0.495 & -0.064 & -0.235 & 0.248 & -0.073 & 0.242 & -0.714 \end{bmatrix}$$

Dibentuk himpunan vektor $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dengan $u_i = \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{X}v_i$ untuk setiap $1 \leq$

$i \leq n$. untuk $i = 1$ diperoleh

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{X}v_1$$

$$u_1 = \frac{1}{51.705}\begin{bmatrix} 6 & 10 & 2 & 5 & 8 & 14 & 14 & 14 \\ 10 & 1 & 12 & 4 & 4 & 13 & 7 & 6 \\ 7 & 9 & 8 & 2 & 12 & 8 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 8 & 0 & 7 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 14 & 0 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 10 & 15 & 7 & 10 & 12 & 3 \\ 14 & 0 & 6 & 11 & 10 & 10 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 5 & 4 & 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.357 \\ 0.254 \\ 0.329 \\ 0.419 \\ 0.317 \\ 0.488 \\ 0.354 \\ 0.246 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0.487 \\ 0.406 \\ 0.323 \\ 0.226 \\ 0.248 \\ 0.443 \\ 0.391 \\ 0.177 \end{bmatrix}$$

dengan cara yang serupa dapat diperoleh untuk $u_2, u_3, \ldots, u_8$, yaitu

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0.487 \\ 0.406 \\ 0.323 \\ 0.226 \\ 0.248 \\ 0.443 \\ 0.391 \\ 0.177 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0.668 \\ -0.072 \\ 0.073 \\ -0.181 \\ -0.203 \\ -0.149 \\ -0.573 \\ 0.346 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0.018 \\ -0.302 \\ -0.522 \\ 0.154 \\ 0.608 \\ 0.376 \\ -0.260 \\ 0.182 \end{bmatrix} \quad u_4 = \begin{bmatrix} -0.248 \\ -0.402 \\ 0.530 \\ 0.067 \\ 0.289 \\ -0.265 \\ 0.116 \\ 0.569 \end{bmatrix}$$

$$u_5 = \begin{bmatrix} 0.466 \\ -0.264 \\ -0.122 \\ -0.076 \\ 0.367 \\ -0.531 \\ 0.370 \\ -0.371 \end{bmatrix} \quad u_6 = \begin{bmatrix} 0.109 \\ -0.603 \\ 0.293 \\ -0.356 \\ -0.166 \\ 0.537 \\ 0.094 \\ -0.295 \end{bmatrix} \quad u_7 = \begin{bmatrix} -0.146 \\ 0.366 \\ 0.100 \\ -0.802 \\ 0.425 \\ 0.006 \\ -0.100 \\ 0.003 \end{bmatrix} \quad u_8 = \begin{bmatrix} -0.060 \\ 0.073 \\ 0.472 \\ 0.337 \\ 0.317 \\ -0.039 \\ -0.534 \\ -0.518 \end{bmatrix}$$

Dibentuk matriks $\mathbf{U}$ dari himpunan vektor-vektor $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.487 & 0.668 & 0.018 & -0.248 & 0.466 & 0.109 & -0.146 & -0.060 \\ 0.406 & -0.072 & -0.302 & -0.402 & -0.264 & -0.603 & 0.366 & 0.073 \\ 0.323 & 0.073 & -0.522 & 0.530 & -0.122 & 0.293 & 0.100 & 0.472 \\ 0.226 & -0.181 & 0.154 & 0.067 & -0.076 & -0.356 & -0.802 & 0.337 \\ 0.248 & -0.203 & 0.608 & 0.289 & 0.367 & -0.166 & 0.425 & 0.317 \\ 0.443 & -0.149 & 0.376 & -0.265 & -0.531 & 0.537 & 0.006 & -0.039 \\ 0.391 & -0.573 & -0.260 & 0.116 & 0.370 & 0.094 & -0.100 & -0.534 \\ 0.177 & 0.346 & 0.182 & 0.569 & -0.371 & -0.295 & 0.003 & -0.518 \end{bmatrix}$$

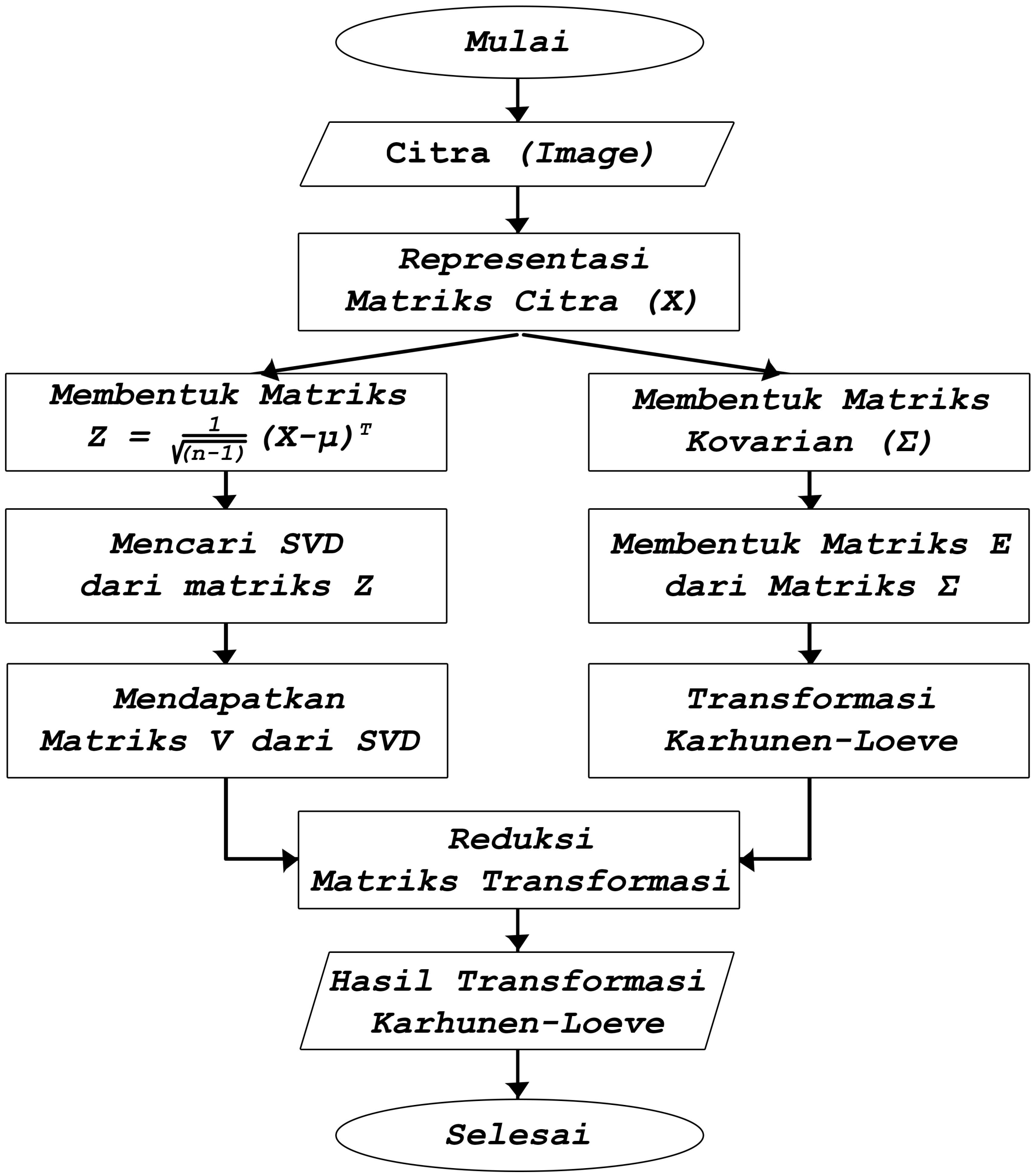
BAB III

PEMBAHASAN

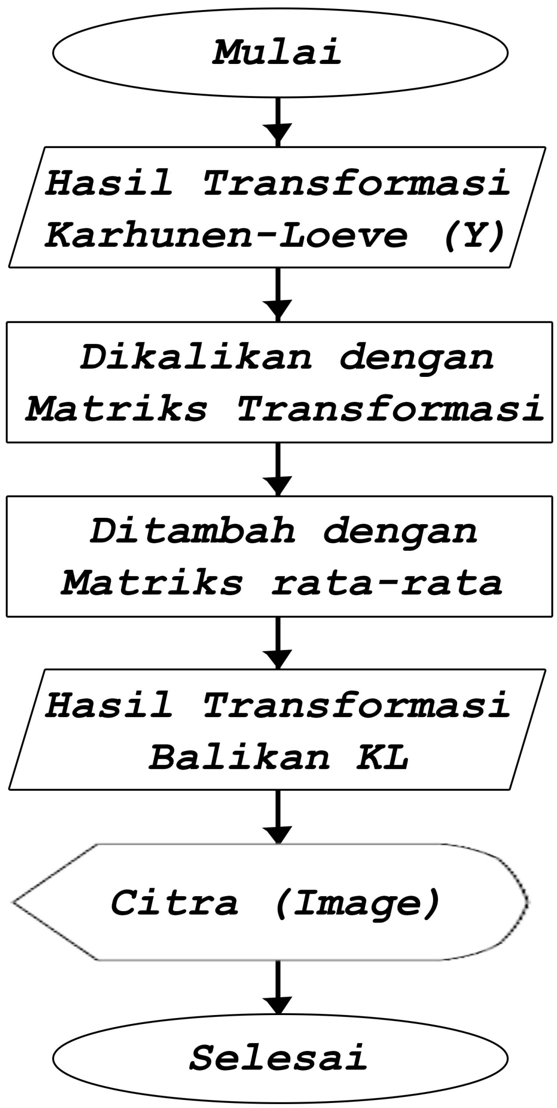
3.1 *Flow Chart* Pemampatan Citra

Sebuah citra digital yang akan dimampatkan dengan menggunakan metode Dekomposisi Nilai Singular direpresentasikan terlebih dahulu ke dalam sebuah matriks $\mathbf{X}$. Selanjutnya matriks ini dibentuk ke dalam matriks $\mathbf{Z}$ untuk selanjutnya dicari nilai Dekomposisi Nilai Singular atau SVD dari matriks $\mathbf{Z}$ tersebut. Hasil perhitungan Dekomposisi Nilai Singular (SVD) pada matriks $\mathbf{Z}$ kemudian digabungkan dengan Transformasi Karhunen-Leove untuk mereduksi matriks transformasi. Selanjutnya matriks yang telah direduksi ditransformasikan dengan menggunakan persamaan (2.39) untuk mendapatkan komponen utama dari matriks citra $\mathbf{X}$. Pemampatan citra digital dengan menggunakan metode Dekomposisi Nilai Singular dapat dilihat sebagai bagan pada Gambar (3.1).

Setelah selesai ditransformasi, komponen utama di ruang eigen dikembalikan ke dalam bentuk matriks $\mathbf{X}$ dengan menggunakan transformasi balikan Karhunen-Leove, dengan mengkalikan hasil transformasi Karhunen-Loeve dengan matriks transformasi yang telah direduksi dimensinya, selanjutnya dengan ditambahkan matriks rata-rata dari matriks citra maka diperoleh citra digital yang sudah dimampatkan. Transformasi Balikan Karhunen-Loeve dapat dilihat sebagai bagan pada Gambar (3.2).



Gambar 3.1: *Flow Chart* Pemampatan Citra



Gambar 3.2: *Flow Chart* Transformasi Balikan Karhunen-Loeve

3.2 Representasi SVD sebagai KLT

Dari data matriks $\mathbf{X}$ berukuran $m \times n$, kita mendefinisikan matriks baru $\mathbf{Z}$ berukuran $n \times m$ sebagai berikut

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} (\mathbf{X} - \mu)^T \tag{3.1}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^T\mathbf{Z} &= \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} (\mathbf{X} - \mu)^T \right)^T \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} (\mathbf{X} - \mu)^T \right) \\ &= \frac{1}{n-1} (\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)^T \\ &= \Sigma \end{aligned} \tag{3.2}$$

Berdasarkan persamaan (3.2) dapat dipastikan matriks $\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}$ sama dengan matriks kovarian Σ. Komponen utama dari matriks $\mathbf{X}$ dapat diperoleh dari Transformasi Karhunen-Loeve melalui persamaan (2.37)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{E}^T(\mathbf{X} - \mu)$$

dimana matriks $\mathbf{E}$ adalah matriks yang elemen-elemennya vektor eigen dari matriks kovarian Σ. Jika dilakukan dekomposisi nilai singular atau SVD dari matriks $\mathbf{Z}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{Z} &= \qquad \mathbf{U} \qquad\qquad \mathbf{L} \qquad\qquad \mathbf{V}^T \end{aligned}$$

dimana matriks $\mathbf{V}$ adalah matriks yang elemen-elemennya vektor eigen dari matriks $\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}$. Matriks $\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}$ dan Σ merupakan matriks yang sama dari persamaan (3.2), maka nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}$ dan Σ haruslah sama, sehingga matriks $\mathbf{E}$ dan matriks $\mathbf{V}$ sama,

$$\mathbf{E} = \mathbf{V} \tag{3.3}$$

sehingga persamaan (2.37) dapat disubtitusi dengan persamaan (3.3) menjadi

$$\mathbf{Y} = \mathbf{V}^T(\mathbf{X} - \mu) \tag{3.4}$$

Matriks $\mathbf{W}$ yang telah dijelaskan pada subbab 2.5 merupakan hasil reduksi dari matriks $\mathbf{E}$ menurut persamaan (2.38) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mk} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dalam subbab 3.2 ini, persamaan (2.38) dapat disubtitusi dengan menggunakan persamaan (3.3) menjadi

$$\begin{aligned}
\mathbf{W} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mk} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

maka persamaan (3.4) dapat direduksi dengan matriks **W** pada persamaan (3.5) menjadi

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}^T(\mathbf{X} - \mu) \tag{3.6}$$

3.2.1 Transformasi Balikan Karhunen-Loeve

Transformasi Balikan Karhunen-Loeve merupakan transformasi untuk mengembalikan hasil transformasi komponen utama yang telah direduksi, menjadi matriks citra yang berdimensi sama dengan matriks citra semula, untuk kembali direpresentasikan sebagai sebuah citra. Matriks **V** merupakan matriks ortonormal, maka matriks citra **X** dapat diperoleh dari persamaan (3.4) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \mathbf{V}^T(\mathbf{X} - \mu) \\
\mathbf{VY} &= \mathbf{VV}^T(\mathbf{X} - \mu) \\
\mathbf{VY} &= \mathbf{X} - \mu \\
\mathbf{VY} + \mu &= \mathbf{X}
\end{aligned}$$

Transformasi balikan Karhunen-Loeve dengan dimensi komponen utama yang belum direduksi adalah

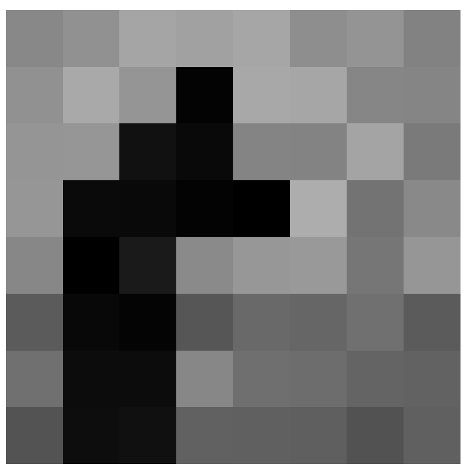
$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{Y} + \mu \tag{3.7}$$

sehingga transformasi balikan Karhunen-Loeve dengan matriks **V** yang telah direduksi menjadi matriks **W** sesuai dengan persamaan (3.6) adalah sebagai berikut

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{Y} + \mu \tag{3.8}$$

3.3 Ilustrasi Pemampatan Citra Digital

Misal diberikan sebuah citra 4-*bit* dengan ukuran 8×8 yang ditujukkan dengan Gambar (3.3). Selanjutnya citra direpresentasikan dengan matriks **X**



Gambar 3.3: Citra 4-*bit*

berukuran 8×8 sebagai berikut:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 5 & 9 \\ 4 & 3 & 3 & 15 & 2 & 3 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 14 & 15 & 8 & 5 & 8 & 9 \\ 6 & 15 & 15 & 15 & 15 & 6 & 9 & 9 \\ 7 & 14 & 15 & 5 & 6 & 2 & 9 & 9 \\ 12 & 15 & 15 & 12 & 12 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 15 & 15 & 9 & 9 & 10 & 11 & 10 \\ 11 & 13 & 13 & 10 & 12 & 11 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

dan matriks rata-rata μ adalah

$$\mu = \begin{bmatrix} 4.5 & 4.5 & 4.5 & 4.5 & 4.5 & 4.5 & 4.5 & 4.5 \\ 5.5 & 5.5 & 5.5 & 5.5 & 5.5 & 5.5 & 5.5 & 5.5 \\ 8.38 & 8.38 & 8.38 & 8.38 & 8.38 & 8.38 & 8.38 & 8.38 \\ 11.25 & 11.25 & 11.25 & 11.25 & 11.25 & 11.25 & 11.25 & 11.25 \\ 8.38 & 8.38 & 8.38 & 8.38 & 8.38 & 8.38 & 8.38 & 8.38 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 11.13 & 11.13 & 11.13 & 11.13 & 11.13 & 11.13 & 11.13 & 11.13 \\ 11.63 & 11.63 & 11.63 & 11.63 & 11.63 & 11.63 & 11.63 & 11.63 \end{bmatrix}$$

dibentuk matriks **Z** sesuai dengan persamaan (3.1), maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Z} &= \frac{1}{\sqrt{8-1}}(\mathbf{X}-\mu)^T \\
&= \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{bmatrix}
2.5 & -0.5 & -1.5 & -2.5 & -2.5 & -0.5 & 0.5 & 4.5 \\
-1.5 & -2.5 & -2.5 & 9.5 & -3.5 & -2.5 & -0.5 & 3.5 \\
-3.38 & -5.38 & 5.63 & 6.63 & -0.38 & -3.38 & -0.38 & 0.63 \\
-5.25 & 3.75 & 3.75 & 3.75 & 3.75 & -5.25 & -2.25 & -2.25 \\
-1.38 & 5.63 & 6.63 & -3.38 & -2.38 & -6.38 & 0.63 & 0.63 \\
0 & 3 & 3 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\
-1.13 & 3.88 & 3.88 & -2.13 & -2.13 & -1.13 & -0.13 & -1.13 \\
-0.63 & 1.38 & 1.38 & -1.63 & 0.38 & -0.63 & -0.63 & 0.38
\end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix}
0.95 & -0.57 & -1.28 & -1.98 & -0.52 & 0 & -0.43 & -0.24 \\
-0.19 & -0.95 & -2.03 & 1.42 & 2.13 & 1.13 & 1.46 & 0.52 \\
-0.57 & -0.95 & 2.13 & 1.42 & 2.50 & 1.13 & 1.46 & 0.52 \\
-0.95 & 3.59 & 2.50 & 1.42 & -1.28 & 0 & -0.80 & -0.61 \\
-0.95 & -1.32 & -0.14 & 1.42 & -0.90 & 0 & -0.80 & 0.14 \\
-0.19 & -0.95 & -1.28 & -1.98 & -2.41 & -0.76 & -0.43 & -0.24 \\
0.19 & -0.19 & -0.14 & -0.85 & 0.24 & -0.76 & -0.05 & -0.24 \\
1.70 & 1.32 & 0.24 & -0.85 & 0.24 & -0.76 & -0.43 & 0.14
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Cari Dekomposisi Nilai Singular (SVD) dari matriks **Z**

$$\mathbf{Z} \quad = \quad \mathbf{U} \quad \mathbf{L} \quad \mathbf{V}^T$$

dengan

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.37 & -0.20 & 0.22 & -0.04 & 0.14 & -0.65 & -0.47 & 0.35 \\ 0.35 & -0.49 & 0.01 & 0.69 & 0.19 & 0.09 & 0.09 & 0.35 \\ 0.63 & -0.11 & 0.09 & -0.63 & 0.18 & -0.13 & 0.15 & 0.35 \\ 0.15 & 0.82 & -0.10 & 0.27 & 0.28 & -0.06 & -0.10 & 0.35 \\ 0.03 & -0.04 & -0.68 & -0.03 & -0.63 & -0.12 & -0.08 & 0.35 \\ -0.54 & -0.10 & -0.30 & -0.17 & 0.42 & 0.16 & 0.51 & 0.35 \\ -0.12 & -0.05 & 0.16 & -0.17 & -0.04 & 0.72 & -0.54 & 0.35 \\ -0.14 & 0.15 & 0.60 & 0.08 & -0.52 & -0.01 & 0.44 & 0.35 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 6.17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.84 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.38 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.57 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.18 & -0.09 & 0.59 & 0.04 & -0.47 & -0.34 & 0.31 & 0.42 \\ 0.02 & 0.68 & 0.41 & 0.54 & 0.23 & 0.06 & 0.02 & -0.16 \\ 0.35 & 0.56 & 0.07 & -0.74 & -0.04 & -0.09 & 0.08 & 0.06 \\ 0.60 & 0.13 & -0.43 & 0.39 & -0.44 & 0.05 & 0.16 & 0.28 \\ 0.57 & -0.33 & 0.52 & -0.01 & -0.12 & 0.18 & -0.45 & -0.21 \\ 0.28 & -0.12 & -0.07 & 0.11 & 0.38 & -0.86 & -0.08 & -0.03 \\ 0.28 & -0.25 & 0.16 & -0.02 & 0.58 & 0.30 & 0.54 & 0.35 \\ 0.10 & -0.12 & 0.02 & -0.02 & -0.19 & -0.07 & 0.62 & -0.74 \end{bmatrix}$$

Misal diambil 4 komponen utama dengan nilai eigen terbesar, maka matriks transformasi **W** direduksi dari matriks **V** dengan memilih 4 vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen terbesar,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{W} &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
-0.18 & -0.09 & 0.59 & 0.04 \\
0.02 & 0.68 & 0.41 & 0.54 \\
0.35 & 0.56 & 0.07 & -0.74 \\
0.60 & 0.13 & -0.43 & 0.39 \\
0.57 & -0.33 & 0.52 & -0.01 \\
0.28 & -0.12 & -0.07 & 0.11 \\
0.28 & -0.25 & 0.16 & -0.02 \\
0.10 & -0.12 & 0.02 & -0.02
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

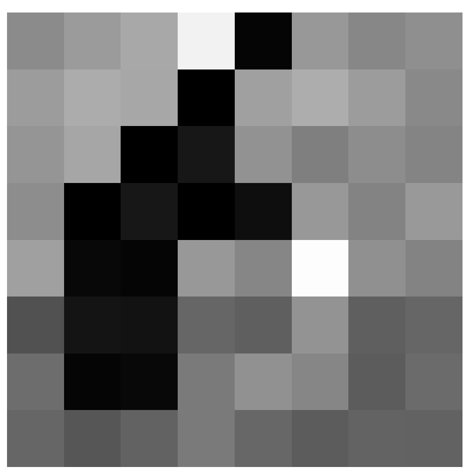
sehingga hasil transformasi dengan 4 komponen utama dapat diperoleh dari persamaan (3.6) sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \mathbf{W}^T(\mathbf{X} - \mu) \\
&= \begin{bmatrix}
-5.95 & 5.66 & 10.25 & 2.51 & 0.56 & -8.84 & -1.87 & -2.32 \\
-3.00 & -7.50 & -1.62 & 12.73 & -0.61 & -1.52 & -0.76 & 2.29 \\
1.95 & 0.08 & 0.81 & -0.89 & -6.08 & -2.68 & 1.46 & 5.37 \\
-0.24 & 4.27 & -3.90 & 1.68 & -0.16 & -1.06 & -1.08 & 0.48
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Hasil dari transformasi Karhunen-Loeve (matriks **Y**) merupakan hasil pemampatan citra menggunakan 4 komponen utama dengan nilai eigen terbesar, namun hasil dari transformasi ini tidak dapat langsung dilihat perubahannya, untuk itu perlu dilakukan transformasi balikan Karhunen-Loeve guna mengembalikan hasil transformasi ke matriks citra berdimensi yang sama dengan matriks citra semula, untuk kembali direpresentasikan sebagai sebuah citra. Transformasi balikan Karhunen-Loeve dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (3.8) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \mathbf{WY} + \mu \\ &= \begin{bmatrix} 6.97 & 4.35 & 3.13 & 2.47 & 0.87 & 4.60 & 5.72 & 7.89 \\ 3.98 & 2.83 & 2.87 & 14.78 & 2.55 & 2.61 & 4.95 & 9.44 \\ 4.94 & 3.03 & 13.98 & 15.04 & 7.90 & 5.03 & 8.20 & 8.88 \\ 6.39 & 15.27 & 15.26 & 15.47 & 14.04 & 6.52 & 8.99 & 8.07 \\ 7.00 & 14.10 & 15.23 & 5.08 & 5.73 & 2.45 & 8.34 & 9.07 \\ 10.53 & 14.91 & 14.53 & 11.49 & 12.63 & 9.79 & 11.34 & 10.77 \\ 10.51 & 14.48 & 14.60 & 8.53 & 10.46 & 8.61 & 11.04 & 10.76 \\ 11.43 & 13.07 & 12.97 & 10.27 & 11.61 & 10.85 & 11.58 & 11.22 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Hasil dari transformasi balikan Karhunen-Loeve dapat direpresentasikan kembali sebagai sebuah citra, yang ditunjukkan pada Gambar (3.4).



Gambar 3.4: Hasil pemampatan Citra 4-*bit*

Hasil yang diperoleh pada Gambar (3.4) tidak terlalu jelas terlihat, karena ukuran citra yang digunakan terlalu kecil, untuk lebih jelasnya akan diberikan beberapa contoh pemampatan citra pada subbab 3.4.

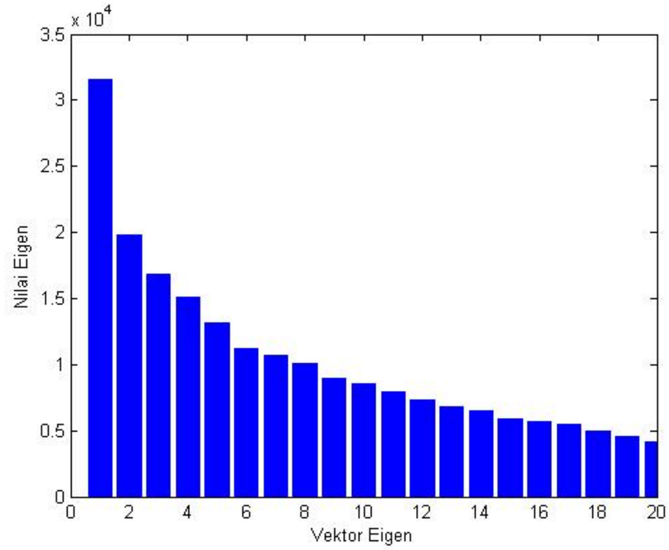
3.4 Studi Kasus Pemampatan Citra Digital

Pada subbab 3.4 ini akan diberikan contoh citra digital yang akan dimampatkan dengan pengambilan beberapa komponen utamanya. Citra *Pentagon* yang ditunjukkan pada Gambar (3.5) akan digunakan sebagai contoh untuk proses pemampatan citra.

Gambar 3.5: *Pentagon Image*

Citra *Pentagon* ini berukuran 512×512 *pixel* dengan ukuran berkas 258 *kilobyte* yang akan direpresentasikan menjadi matriks citra, sehingga dapat dilakukan transformasi citra. Nilai eigen dari matriks citra *Pentagon* ditunjukkan dalam diagram pada Gambar (3.6).

Nilai eigen terbesar akan bersesuaian dengan komponen utama pertama, hal serupa akan terjadi untuk komponen utama kedua yang akan bersesuaian dengan nilai eigen terbesar kedua, dan seterusnya. Proses pemampatan citra dengan



Gambar 3.6: Nilai Eigen dari Matriks Citra *Pentagon*

metode Dokomposisi Nilai Singular dan menggunakan Transformasi Karhunen-Loeve akan memilih komponen-komponen utama yang terbesar dan bersesuaian dengan nilai-nilai eigen yang terbesar pula, atau dengan kata lain pemampatan citra dengan metode ini akan membuang komponen utama terkecil yang bersesuaian dengan nilai eigen rendah (mendekati nol).

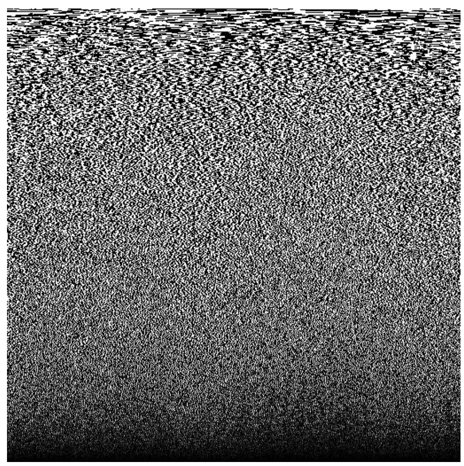
Matriks citra *Pentagon* (matriks $\mathbf{X}$) ditransformasikan dengan menggunakan persamaan (3.4)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{V}^T(\mathbf{X} - \mu)$$

dan dari transformasi citra ini, akan diperoleh 512 komponen utama di ruang eigen dari matriks citra *Pentagon*,yaitu

$$\mathbf{Y}_{(512\times512)} = \begin{bmatrix} -52.4257 & -45.4380 & \cdots & 7.4307 \\ 56.9621 & 62.6114 & \cdots & 38.5675 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.0064 & 0.0110 & \cdots & -0.0064 \\ 0.0000 & -0.0000 & \cdots & -0.0000 \end{bmatrix}$$

dan bisa digambarkan seperti pada Gambar (3.7)



Gambar 3.7: 512 Komponen Utama dari Matriks Citra *Pentagon*

Misal diambil 40 komponen utama dengan nilai eigen terbesar, maka matriks transformasi W menjadi

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_{40} \end{bmatrix}$$

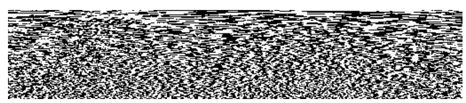
dengan $\{v_1, v_2, \ldots, v_{40}\}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan 40 nilai eigen terbesar. Matriks citra *Pentagon* sebagai matriks $\mathbf{X}$ akan direduksi dengan persamaan (3.6)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}^T(\mathbf{X} - \mu)$$

Hasil dari transformasi citra, diperoleh 40 komponen utama di ruang eigen dari matriks citra *Pentagon* yang telah direduksi, yaitu

$$\mathbf{Y}_{(40\times 512)} = \begin{bmatrix} -52.4257 & -45.4380 & \cdots & 7.4307 \\ 56.9621 & 62.6114 & \cdots & 38.5675 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5.2507 & -11.6241 & \cdots & 57.6232 \end{bmatrix}$$

dan bisa digambarkan seperti pada Gambar (3.8).



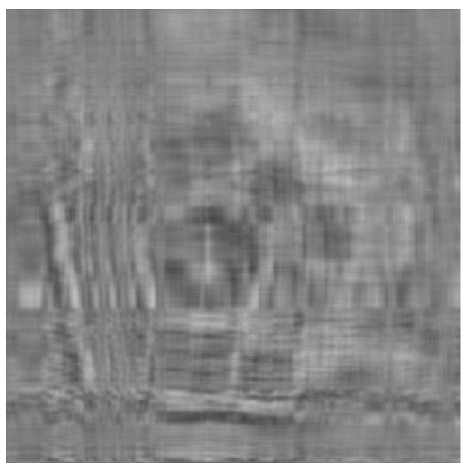
Gambar 3.8: 40 Komponen Utama dari Matriks Citra *Pentagon*

Hasil dari transformasi Karhunen-Loeve yang berupa reduksi dari komponen utama, kemudian dilakukan transformasi balikan Karhunen-Loeve untuk mengembalikan citra hasil transformasi menggunakan 40 komponen utama dengan nilai eigen terbesar, menjadi matriks citra dengan dimensi yang sama dengan matriks citra semula. Hasil transformasi balikan Karhunen-Loeve ditunjukkan pada Gambar (3.9) Setelah dilakukan pemampatan citra, hasil dari pemampatan citra *Pentagon* menggunakan 40 komponen utama dengan nilai eigen terbesar, ukuran berkas menjadi 22 *kilobyte*.

Pereduksian matriks W atau dengan kata lain pemilihan banyaknya komponen utama yang membentuk sebuah matriks citra menentukan kualitas gambar yang berbanding terbalik dengan besarnya pemampatan citra yang terjadi.

Gambar 3.9: Citra *Pentagon* dengan 40 Komponen Utama

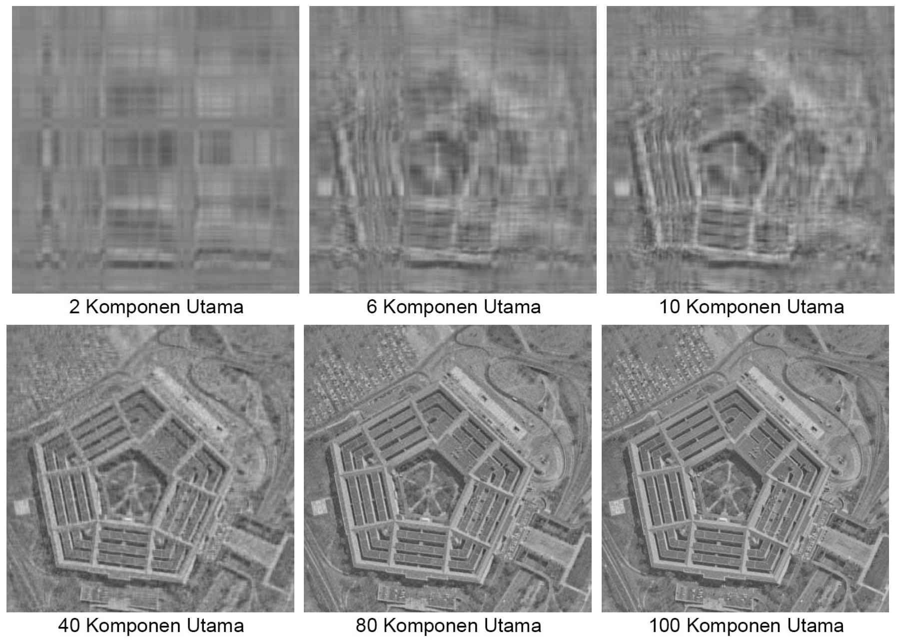
Berikut ini contoh lain hasil pemampatan citra *Pentagon* menggunakan 6 komponen utama dengan nilai eigen terbesar yang ditunjukkan Gambar (3.10). Hasil



Gambar 3.10: Citra *Pentagon* dengan 6 Komponen Utama

pemampatan citra *Pentagon* dengan 6 komponen utama menghasilkan ukuran berkas yang semakin kecil, yaitu 5 *kilobyte*.

Untuk lebih jelasnya, berikut diberikan hasil pemampatan citra *Pentagon* dengan berbagai komponen utama yang ditunjukkan Gambar (3.11). Hasil pemampatan citra dengan berbagai komponen utama menghasilkan kualitas gambar yang berbeda, dengan ukuran berkas yang berbeda pula, ukuran berkas dari berbagai komponen utama disajikan dalam Tabel (3.1).



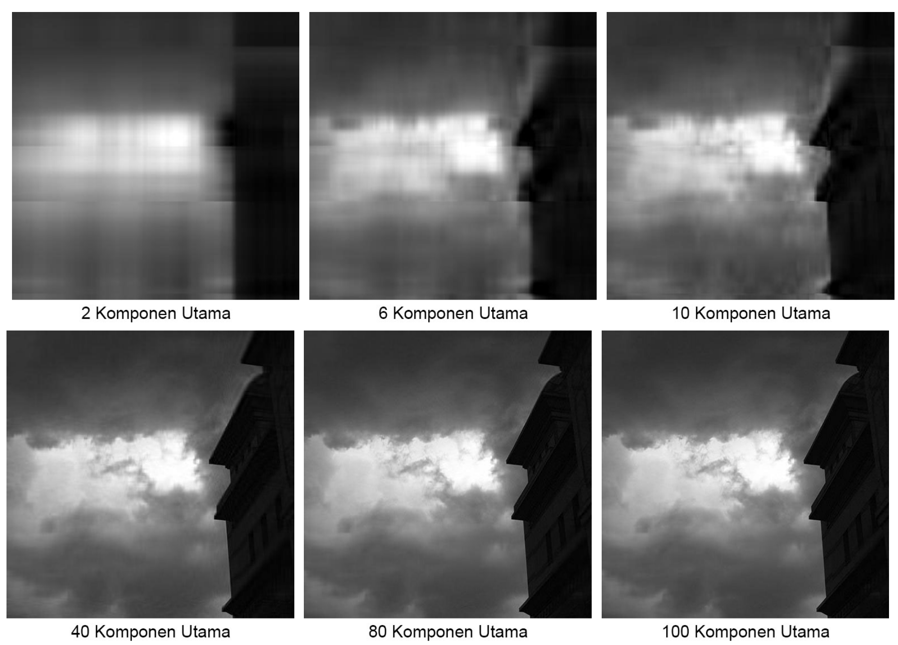
Gambar 3.11: Citra *Pentagon* dengan beragam Komponen Utama

Tabel 3.1: Tabel Ukuran Berkas dari Citra *Pentagon*

Komponen Utama	Ukuran Berkas Komponen Utama
2	3 KB
6	5 KB
8	6 KB
10	7 KB
20	12 KB
40	22 KB
60	32 KB
80	42 KB
100	52 KB

Berikut ini merupakan contoh lain pemampatan citra menggunakan beberapa komponen utama, ditunjukkan dengan Gambar *Lena* (3.12) dan Gambar *Sky* (3.13).

Gambar 3.12: Citra *Lena* dengan beragam Komponen Utama



Gambar 3.13: Citra *Sky* dengan beragam Komponen Utama

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Pemampatan citra digital dengan metode dekomposisi nilai singular menggunakan konsep dari matriks kovarian, vektor eigen, dan nilai eigen. Metode ini menggunakan transformasi Karhunen-Loeve yang merupakan bagian dari Analisis Komponen Utama, dimana dalam proses pemampatan citra digunakan untuk mereduksi dimensi dari komponen utama sebuah citra. Metode ini dapat mengefisienkan proses pemampatan citra digital.

Dekomposisi nilai singular dapat direpresentasikan terhadap transformasi Karhunen-Loeve. Matriks citra $\mathbf{X}$ ditransformasikan menjadi matriks $\mathbf{Z}$, dengan $\mathbf{Z} = \frac{1}{\sqrt{(n-1)}}(\mathbf{X} - \mu)^T$. Matriks $\mathbf{V}$ yang merupakan hasil dekomposisi nilai singular terhadap matriks $\mathbf{Z}$ akan bernilai sama dengan matriks $\mathbf{E}$ yang berisi himpunan vektor eigen dari matriks kovarian Σ, maka matriks $\mathbf{V}$ dapat mensubtitusi matriks $\mathbf{E}$ dalam transformasi Karhunen-Loeve, sehingga persamaan dekomposisi nilai singular terhadap transformasi Karhunen-Loeve adalah

$$\mathbf{Y} = \mathbf{V}^T(\mathbf{X} - \mu)$$

Persamaan untuk memampatkan sebuah citra digital menggunakan transformasi dari matriks yang telah direduksi, sehingga persamaan pemampatan citra adalah sebagai berikut

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}^T(\mathbf{X} - \mu)$$

Matriks yang telah ditransformasikan untuk pemampatan citra, perlu ditransformasikan kembali untuk mengembalikan hasil transformasi komponen utama yang telah direduksi menjadi matriks citra berdimensi awal untuk kembali direpresentasikan sebagai sebuah citra. Adapun persamaan transformasi balikan Karhunen-Loeve adalah

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{Y} + \mu$$

4.2 Saran

Pada skripsi ini, metode yang digunakan hanya terbatas pada matriks persegi dan citra hitam-putih 8 bit. Pengembangan metode ini bisa dilakukan untuk matriks persegi panjang dan citra warna 24 bit atau lebih.

DAFTAR PUSTAKA

Andleigh, Prabhat K. and Thakhar, Kiran. 1995. *Multimedia System Design*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Anton, Howard. 1998. *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.

Dony, R. D. 2001. *The Transform and Data Compression Handbook*. Boca Raton: CRC Press LLC.

Munir, Rinaldi. 2004. *Pengolahan Citra Digital dengan Pendekatan Algoritmik*. Bandung: Informatika.

Ranade, Abhiram. 2000. *A Variation on SVD Based Image Compression*. Mumbai: Indian Institute of Technology.

Syamsuddin, Muhammad Rusdi. 2006. *Jarak Proyeksi Titik Uji ke Titik Ciri dalam Sistem Penentu Sudut Pandang Menggunakan Metode Nearest Feature Line*. Jakarta: Universitas Indonesia.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

M-File pemampatan citra menggunakan Matlab 7.7

```
%Merepresentasikan Citra ke dalam bentuk Matriks
[fly,map] = imread('lena.bmp');
fly=double(fly);
%-----------------------------------------------
%mendefinisikan ukuran matriks citra
[m n]=size(fly);
%-----------------------------------------------
%menghitung rataan perbaris dari matriks
mn = mean(fly,2);
%-----------------------------------------------
%mengurangkan matriks citra dengan rataannya
X = fly - repmat(mn,1,n);
%-----------------------------------------------
%mendefinisikan matriks Z
Z=1/sqrt(n-1)*X';
%-----------------------------------------------
%mencari matriks kovarian
covZ=Z'*Z;
%-----------------------------------------------
%menghitung SVD dari matriks Z
[U,L,V] = svd(Z);
```

```
%---------------------------------------------------
%menentukan banyaknya komponen utama terbesar
k=100;
%---------------------------------------------------
%Transformasi Karhunen-Loeve
W=V(:,1:k);
Y=W'*X;
%---------------------------------------------------
%mencari proporsi kumulatif
l=diag(L*L');
e=repmat(1,1,n)*l;
ll=l'; ll=ll(:,1:k); ll=ll';
d=repmat(1,1,k)*ll;
ratio = d/e;
%---------------------------------------------------
%Transformasi Balikan Karhunen-Loeve
XX=W*Y;
XX=XX+repmat(mn,1,n);
%---------------------------------------------------
%menampilkan hasil citra
image(XX)
colormap(map)
axis off, axis equal
```

LAMPIRAN 2

M-File nilai eigen menggunakan Matlab 7.7

```
%nilai eigen dari matriks kovarian
eigenkov=eig(covZ);
%nilai eigen dari hasil SVD matriks Z
eigenz=diag(L).*diag(L)

%menampilkan diagram dari nilai eigen
bar(eigenz,'b')
xlim([0 20])
xlabel('Vektor Eigen')
ylabel('Nilai Eigen')
```

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama	:	Adhe Septian Khigansih
No. Registrasi	:	3125081764
Jurusan	:	Matematika
Program Studi	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul "**Pemampatan Citra Digital dengan Metode Dekomposisi Nilai Singular**" adalah :

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, Januari 2013

Yang membuat pernyataan

Adhe Septian Khigansih