Bab II

LANDASAN TEORI

2.1 Teori Permainan

Teori permainan *(game theory)* adalah suatu pendekatan matematis yang dikembangkan untuk tujuan menganalisis persaingan yang melibatkan berbagai kepentingan (Dumairy, 2003). Teori ini mengacu dari suatu keadaan di mana terdapat dua orang atau lebih dengan tujuan atau kepentingan yang berbeda terlibat dalam suatu permainan. Tindakan masing-masing pemain turut mempengaruhi hasil akhir dari permainan.

Unsur-unsur dasar dalam teori permainan adalah :

1. Jumlah Pemain

   Permainan diklasifikasikan menurut jumlah kepentingan atau tujuan yang ada dalam permainan tersebut. Akan tetapi pengertian jumlah pemain tidak selalu sama dengan jumlah orang yang terlibat dalam permainan. Jumlah pemain dalam hal ini adalah jumlah kelompok pemain berdasarkan masing-masing kepentingan atau tujuannya. Dengan demikian dua orang atau lebih yang mempunyai kepentingan yang sama diperhitungkan sebagai satu (kelompok) pemain.

2. Pembayaran *(Payoff)*

   Hasil akhir yang terjadi pada suatu permainan disebut pembayaran *(payoff)*.

Berdasarkan pembayaran *(payoff)*, permainan dikelompokkan menjadi dua jenis, yaitu permainan jumlah nol *(zero-sum games)* dan permainan jumlah bukan nol *(non zero-sum games)*. Jika jumlah pembayaran *(payoff)* dari seluruh pemain adalah nol, yaitu dengan memperhitungkan setiap keberuntungan sebagai bilangan positif dan ketidakberuntungan sebagai bilangan negatif, maka permainan demikian adalah permainan jumlah nol *(zero-sum games)*. Selain itu merupakan permainan jumlah bukan nol *(non zero-sum games)*.

3. Strategi Permainan

   Pengertian strategi dalam teori permainan adalah suatu siasat atau rencana tertentu dari seorang pemain sebagai reaksi atas aksi yang mungkin dilakukan oleh pemain lain yang menjadi saingannya.

4. Matriks Permainan

   Setiap persoalan yang dianalisis dengan teori permainan senantiasa dapat disajikan dalam sebuah matriks permainan. Matriks permainan disebut juga matriks pembayaran *(payoff)*, yaitu sebuah matriks yang unsur-unsurnya berupa ganjaran dari para pemain yang terlibat dalam permainan tersebut. Baris-barisnya melambangkan strategi-strategi yang dimiliki pemain pertama, sedangkan kolom-kolomnya melambangkan strategi-strategi yang dimiliki pemain lain. Dengan demikian, permainan berstrategi $m \times n$ dilambangkan oleh matriks permainan $m \times n$.

   Nilai suatu permainan adalah pembayaran rata-rata atau pembayaran yang diharapkan sepanjang rangkaian permainan, dengan menganggap kedua belah pihak pemain senantiasa berupaya memainkan strateginya yang optimum. Permainan dikatakan adil *(fair)* apabila nilainya nol, dimana tak seorang pemain pun memperoleh keuntungan atau kemenangan. Dalam permainan yang tidak adil *(unfair)* seorang pemain akan memperoleh kemenangan atas pemain lain, yakni jika nilai permainan tersebut bukan nol. Dalam hal ini nilai permainan adalah positif jika pemain pertama memperoleh kemenangan, sebaliknya nilai permainan adalah negatif jika pemain lain memperoleh kemenangan.

5. Titik Pelana

   Jika di dalam suatu matriks permainan terdapat sebuah unsur yang merupakan unsur maksimum dari minima baris dan unsur minimum dari maksima kolom sekaligus, maka unsur tersebut dinamakan titik pelana *(saddle point)*. Jadi titik pelana adalah suatu unsur di dalam matriks permainan yang sekaligus merupakan maksimin baris dan minimaks kolom. Permainan dikatakan bersaing ketat *(strictly determined)* jika matriksnya mengandung titik pelana. Strategi yang optimum bagi masing-masing pemain adalah strategi pada baris dan kolom yang mengandung titik pelana tersebut. Dalam hal ini baris yang mengandung titik pelana merupakan strategi optimum bagi pemain pertama, sedangkan kolom yang mengandung titik pelana merupakan strategi optimum bagi pemain lain.

2.1.1 Permainan Dua Pihak Berjumlah Nol

Permainan dua pihak berjumlah nol adalah suatu permainan dengan jumlah kemenangan kedua belah pihak sama dengan nol (Kartono, 1994). Hal ini berarti bahwa jumlah pembayaran yang diterima bagi salah satu pemain yang menang sama dengan jumlah pembayaran yang dibayarkan oleh pihak yang kalah.

Dalam hal ini kemenangan dari pihak yang satu merupakan kekalahan bagi pihak lainnya.

Bentuk umum matriks payoff untuk permainan berjumlah nol dari dua pihak adalah sebagai berikut:

			Pemain P_2				
			y_1	y_2	y_3	…	y_n
		j	1	2	3	…	n
		i					
	x_1	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}
	x_2	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}
	x_3	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{3n}
Pemain P_1	.	.					
	.	.					
	.	.					
	x_m	m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	a_{mn}

Tabel 2.1: Matriks Payoff $m \times n$

dimana:

- m adalah banyaknya strategi yang dimiliki pemain P_1
- n adalah banyaknya strategi yang dimiliki pemain P_2
- a_{ij} ; $i = 1, 2, \cdots, m$ dan $j = 1, 2, \cdots, n$ adalah pembayaran (yang di-didefinisikan secara numerik : bilangan positif, bilangan negatif atau nol) yang bersesuaian dengan strategi ke-i bagi pemain P_1 dan strategi ke-j bagi pemain P_2.

Matriks pembayaran $A = (a_{ij})$ menunjukkan pembayaran kepada pemain pertama (P_1). Pembayaran untuk pemain kedua (P_2) merupakan negatif dari pembayaran pemain pertama (P_1). Jika pemain pertama (P_1) menerima pembayaran sebesar a_{ij}, maka pemain kedua (P_2) harus membayar sebesar a_{ij} atau menerima pembayaran sebesar $-a_{ij}$.

Contoh 2.1.1. Pengusaha A dan pengusaha B mengadakan kampanye promosi dalam perebutan persaingan pasar barang-barang elektronik. Pengusaha A menggunakan tiga media promosi, yaitu media televisi, radio dan surat kabar sedangkan pengusaha B hanya menggunakan dua media promosi yaitu media televisi dan radio.

Berdasarkan informasi pasar yang diperoleh dari hasil riset pemasaran diperoleh data sebagai berikut:

- Bila pengusaha A melakukan promosi melalui media televisi dan pengusaha B juga berpromosi dengan media televisi maka pengusaha A memperoleh keuntungan Rp.5.000.000.

- Bila pengusaha A melakukan promosi melalui media radio dan pengusaha B berpromosi dengan media televisi maka pengusaha A memperoleh keuntungan Rp.6.000.000.

- Pengusaha A akan rugi sebesar Rp.10.000.000 bila ia berpromosi menggunakan media surat kabar di saat pengusaha B berpromosi menggunakan televisi.

- Bila pengusaha A melakukan promosi melalui media televisi dan pengusaha B berpromosi menggunakan radio maka baik pengusaha A maupun pengusaha B sama-sama tidak akan menikmati keuntungan atau pun kerugian.

- Bila kedua pengusaha tersebut sama-sama menggunakan media radio maka pengusaha B akan memperoleh keuntungan sebesar Rp.2.000.000.
- Pengusaha B juga akan memperoleh keuntungan sebesar Rp.3.000.000 bila ia promosi menggunakan media radio di saat pengusaha A berpromosi menggunakan media surat kabar.

Matriks pembayaran dapat disajikan sebagai berikut:

		Pengusaha B	
		Televisi	Radio
Pengusaha A	Televisi	5	0
	Radio	6	-2
	Surat Kabar	-10	-3

Tabel 2.2: Contoh Matriks Pembayaran dua pihak berjumlah nol

Yang tampak dari matriks pembayaran diatas adalah:

$a_{11} = 5$, berarti keuntungan bagi pengusaha A sebesar 5.

$a_{21} = 6$, berarti keuntungan bagi pengusaha A sebesar 6.

$a_{31} = -10$, berarti keuntungan bagi pengusaha B sebesar 10.

$a_{12} = 0$, berarti tidak ada yang untung atau rugi.

$a_{22} = -2$, berarti keuntungan bagi pengusaha B sebesar 2.

$a_{32} = -3$, berarti keuntungan bagi pengusaha B sebesar 3.

2.1.2 Permainan Dua Pihak Berjumlah Tak Nol

Permainan dengan jumlah tak nol (*non zero sum games*) adalah permainan dengan total pembayaran dari masing-masing pemain pada akhir suatu permainan tidak sama nol.

			Pemain P_2				
			y_1	y_2	y_3	...	y_n
		j	1	2	3	...	n
		i					
	x_1	1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	(a_{13}, b_{13})	...	(a_{1n}, b_{1n})
	x_2	2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	(a_{23}, b_{23})	...	(a_{2n}, b_{2n})
	x_3	3	(a_{31}, b_{31})	(a_{32}, b_{32})	(a_{33}, b_{33})	...	(a_{3n}, b_{3n})
Pemain P_1	.	.					
	.	.					
	.	.					
	x_m	m	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	(a_{m3}, b_{m3})	...	(a_{mn}, b_{mn})

Tabel 2.3: Matriks Pembayaran dua pihak berjumlah tak nol

dimana:

- m adalah banyaknya strategi yang dimiliki oleh pemain P_1
- n adalah banyaknya strategi yang dimiliki oleh pemain P_2
- a_{ij} dengan $i = 1, 2, \cdots, m$ dan $j = 1, 2, \cdots, n$ adalah nilai pembayaran untuk pemain P_1
- b_{ij} dengan $i = 1, 2, \cdots, m$ dan $j = 1, 2, \cdots, n$ adalah nilai pembayaran untuk pemain P_2 yang bersesuaian dengan dengan strategi ke-i bagi pemain P_1 dan strategi ke-j bagi pemain P_2

Contoh 2.1.2. Dimisalkan terdapat dua pengusaha A dan pengusaha B yang bersaing dalam perebutan persaingan pasar barang-barang elektronik. Masing-masing perusahaan bebas menentukan apakah ia akan melakukan promosi atau tidak. Matriks *payoff* disajikan dalam tabel berikut:

		Pengusaha B	
		Promosi	Tidak Promosi
Pengusaha A	Promosi	5 , 5	8 , -18
	Tidak Promosi	-18 , 8	-12 , -12

Tabel 2.4: Contoh matriks Pembayaran dua pihak berjumlah tak nol

Dari tabel di atas maka:

- Bila kedua pengusaha sama-sama melakukan promosi maka kedua perusahaan akan memperoleh keuntungan sebesar 5.
- Bila pengusaha A melakukan promosi dan pengusaha B tidak berpromosi maka perusahaan A akan menerima keuntungan sebesar 8, sedangkan pengusaha B akan memperoleh kerugian sebesar 18.
- Bila pengusaha B melakukan promosi dan pengusaha A tidak berpromosi maka pengusaha B akan menerima keuntungan sebesar 8, sedangkan pengusaha A akan memperoleh kerugian sebesar 18.
- Bila kedua pengusaha sama-sama tidak berpromosi maka kedua pengusaha akan memperoleh kerugian sebesar 12.

Dengan demikian masing-masing pengusaha A dan B lebih baik berpromosi karena akan menerima keuntungan sebesar 8, sekalipun dapat mengalami kerugian 12 tetapi masih lebih baik daripada tidak melakukan promosi dapat mengalami kerugian sebesar 18.

2.1.3 Permainan dengan Strategi Murni

Permainan dengan strategi murni adalah suatu permainan dengan posisi pilihan terbaiknya bagi setiap pemain dicapai dengan memilih satu strategi tunggal (Kartono, 1994). Jadi strategi murni adalah strategi dimana setiap pemainnya hanya mempunyai tepat satu langkah yang terbaik. Dalam permainan dengan strategi murni, pemain pertama (pemain baris) yaitu pemain yang berusaha memaksimumkan kemenangan (keuntungan) yang minimum sehingga kriteria strategi optimumnya adalah kriteria maksimin. Sementara itu, pemain kedua (pemain kolom) yaitu pemain yang berusaha meminimumkan kekalahan (kerugian) yang maksimum sehingga kriteria strategi optimumnya adalah kriteria minimaks.

Apabila nilai maksimin dan minimaks sama, maka permainan ini dapat diselesaikan dengan strategi murni dimana titik keseimbangan (*equilibrium point*) telah tercapai. Titik keseimbangan ini dinamakan titik pelana (*saddle point*).

Pada tabel 2.1, pemain pertama (P_1) mempunyai m langkah strategi i, dimana $i = 1, 2, \cdots, m$ dan pemain kedua (P_2) mempunyai n langkah strategi j, dimana $j = 1, 2, \cdots, n$. Pemain pertama (P_1) merupakan pemain baris yang menerapkan kriteria maksimin, yaitu berusaha memaksimumkan keuntungan (kemenangan) yang minimum sementara pemain kedua (P_2) merupakan pemain kolom yang menerapkan kriteria minimaks, yaitu berusaha meminimumkan kerugian (kekalahan) yang maksimum. Berdasarkan pada kriteria masing-masing pemain maka untuk menentukan titik pelana dapat dijelaskan sebagai berikut:

- Untuk pemain pertama (P_1)

  Apabila pemain pertama (P_1) memilih strategi i maka dia yakin akan memenangkan $\min_y(a_{ij})$ apapun strategi yang dipilih atau digunakan oleh pemain kedua (P_2). Karena pemain pertama (P_1) merupakan pemain yang berusaha memaksimumkan kemenangan (keuntungan) yang minimum maka dia akan memilih strategi yang akan memberikan niali maksimum dari nilai yang minimum, yaitu $\max_x \min_y(a_{ij})$

- Untuk pemain kedua (P_2)

  Pemain kedua (P_2) akan berusaha menekan kemenangan bagi pemain pertama (P_1) sampai sekecil mungkin sehingga jika pemain kedua (P_2) memilih strategi j maka dia yakin bahwa kemenangan yang diperoleh pemain pertama (P_1) tidak lebih dari $\max_x(a_{ij})$ apa pun strategi yang dipilih atau digunakan oleh pemain pertama (P_1). Karena pemain kedua (P_2) merupakan pemain yang berusaha meminimumkan kekalahan (kerugian) yang memaksimukan maka dia akan memilih strategi yang akan memberikan nilai minimum dari nilai maksimum tersebut, yaitu $\min_y \max_x(a_{ij})$.

  Jika dalam suatu matriks pembayaran (a_{ij}), berlaku:

$$\begin{aligned} \max_i \min_j(a_{ij}) &= \min_j \max_i(a_{ij}) \\ &= a_{rs} \qquad (2.1) \end{aligned}$$

  maka matriks pembayaran tersebut dikatakan memiliki titik pelana pada (r, s) dan elemen a_{rs} merupakan nilai permainan yang bersesuaian dengan strategi optimum bagi pemain pertama (P_1) yaitu $i = r$ dan strategi optimum bagi pemain kedua (P_2) yaitu $j = s$.

Contoh 2.1.3. Diberikan matriks pembayaran sebagai berikut:

		Pemain P_2 j 1 2 3 4	Minimum tiap baris
	1	5 -4 -2 -1	-4
Pemain P_1	2	3 1 -1 2	(-1) Maksimin
i	3	2 3 -3 -2	-3
Maksimum tiap kolom		5 3 (-1) 2 Minimaks	

Jika nilai minimum di tiap barisnya diperhatikan, maka nilai maksimum dari minimum tersebut adalah -1. Demikian juga jika nilai maksimum dari setiap kolomnya diperhatikan, maka nilai minimum dari maksimum adalah -1 juga. Terlihat bahwa

$$\begin{aligned} \max_i \min_j (a_{ij}) &= \min_j \max_i (a_{ij}) \\ &= -1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Jadi permainan tersebut dapat diselesaikan dengan strategi murni, yaitu:

- strategi optimum bagi pemain P_1 adalah $i = 2$, dan
- strategi optimum bagi pemain P_2 adalah $j = 3$, dengan

- nilai permainan sebesar -1, yang artinya pemain P_2 memenangkan permainan sebesar 1 (pemain P_1 harus membayar sebesar 1 kepada P_2)

Definisi 2.1.1. Misalkan $f(x,y)$ merupakan fungsi bernilai real dari dua vektor $x \in E_n$ dan $y \in E_m$ dengan E_n dan E_m masing-masing merupakan ruang euclid berdimensi n dan m. Suatu titik $(x_0, y_0), x_0 \in E_n$ dan $y_0 \in E_m$ merupakan suatu titik pelana dari $f(x,y)$ jika $f(x,y_0) \leq f(x_0,y_0) \leq f(x_0,y)$

Teorema 2.1.1. Diberikan $f(x,y)$ sedemikian sehingga $\max_x \min_y f(x,y)$ dan $\min_y \max_x f(x,y)$ keduanya ada. Syarat perlu dan syarat cukup untuk keberadaan suatu titik pelana (x_0, y_o) dari $f(x,y)$ adalah bahwa $f(x_0,y_0) = \max_x \min_y f(x,y) = \min_y \max_x f(x,y)$

Bukti:

- Syarat Perlu. Akan dibuktikan jika (x_0,y_0) merupakan titik pelana dari $f(x,y)$ maka $f(x_0,y_0) = \max_x \min_y f(x,y) = \min_y \max_x f(x,y)$. Karena dari definisi, $f(x,y_0) \leq f(x_0,y_0)$ untuk semua $x \in E_n$, maka:

$$\max_x f(x,y_0) \leq f(x_0,y_0) \tag{2.3}$$

tetapi,

$$\min_y[\max_x f(x,y)] \leq \max_x f(x,y_0) \tag{2.4}$$

Dengan demikian dari persamaan (1.3) dan (1.4) diperoleh bahwa:

$$\begin{aligned} \min_y[\max_x f(x,y)] &\leq \max_x f(x,y_0) \\ &\leq f(x_0,y_0) \end{aligned}$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa:

$$\min_y[\max_x f(x_0, y)] \leq f(x_0, y_0) \tag{2.5}$$

Menurut definisi, $f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y)$ untuk semua $y \in E_0$ maka:

$$f(x_0, y_0) \leq \min_y f(x_0, y) \tag{2.6}$$

tetapi,

$$\min_y f(x_0, y) \leq \max_x[\min_y f(x, y)] \tag{2.7}$$

Dengan demikian dari (1.6) dan (1.7) dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &\leq \min_y f(x_0, y) \\ &\leq \max_x[\min_y f(x, y)] \end{aligned}$$

Dengan demikian dari (1.5) dan (1.8) dapat disimpulkan bahwa

$$\min_y \max_x f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \leq \max_x \min_y f(x, y) \tag{2.8}$$

Akan tetapi, menurut teorema minimax

$$\max_x \min_y f(x, y) \leq \min_y \max_x f(x, y) \tag{2.9}$$

Berdasarkan persamaan (1.8) dan (1.9) dapat disimpulkan bahwa

$$f(x_0, y_0) = \max_x[\min_y f(x, y)] = \min_y[\max_x f(x, y)] \tag{2.10}$$

- Syarat Cukup. Akan dibuktikan jika $f(x_0, y_0) = \max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y)$ maka (x_0, y_0) merupakan titik pelana dari $f(x, y)$.

  Pandang bahwa maksimum dari $\min_y f(x, y)$ terjadi pada x_0 dan minimum dari $\max_x f(x, y)$ terjadi pada y_0.

  Karena $f(x_0, y_0) = \max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y)$ maka:

$$\min_y f(x_0, y) = \max_x f(x, y_0) \tag{2.11}$$

Tetapi menurut definisi minimum, $\min_y f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0)$. Maka diperoleh

$$\min_y f(x_0, y) = \max_x f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \tag{2.12}$$

Sehingga

$$\max_x f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$$

yang berarti bahwa

$$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \qquad \forall x \in E_n \tag{2.13}$$

Menurut definisi maksimum, $\max_x f(x_0, y_0) \geq f(x_0, y_0)$. Maka diperoleh $\max_x f(x, y_0) = \min_y f(x_0, y) \geq f(x_0, y_0)$, yang berarti bahwa

$$f(x_0, y) \geq f(x_0, y_0) \qquad \forall y \in E_m \tag{2.14}$$

Dari persamaan (1.13) dan (1.14) dapat disimpulkan bahwa

$$f(x_0, y) \geq f(x_0, y_0) \geq f(x, y_0) \tag{2.15}$$

Ini berarti menurut definisi di atas dapat disimpulkan (x_0, y_0) merupakan titik pelana dari $f(x, y)$.

2.1.4 Permainan dengan Strategi Campuran

Jika dalam suatu permainan tidak dapat diselesaikan dengan strategi murni karena dalam permainan tersebut tidak diperoleh titik pelana, maka pemain dapat melakukan strategi campuran. Hal ini berarti pemain pertama akan memainkan setiap strategi baris dengan proporsi waktu (probabilitas) tertentu. Oleh karena itu dalam suatu permainan yang diselesaikan dalam strategi campuran, strategi dari setiap pemain akan mempunyai probabilitas yang menunjukkan proporsi waktu (probabilitas) atau banyaknya bagian yang dipergunakan untuk melakukan strategi tersebut. Jadi tugas setiap pemain adalah menentukan proporsi waktu (probabilitas) yang diperlukan untuk memainkan strateginya.

Agar lebih jelas dapat diperhatikan ilustrasi permainan matriks pembayaran 2×2 berikut:

		Pemain P_2	
		j	
Pemain P_1		1	2
i	1	1	5
	2	6	3

Matriks pembayaran dari permainan berjumlah nol dari dua orang diatas tidak mempunyai titik pelana, sehingga strategi murni tidak dapat digunakan. Dengan demikian tugas para pemain adalah menentukan proporsi waktu (probabilitas) yang diperlukan untuk memainkan strategi pada baris bagi pemain P_1 dan strategi kolom bagi pemain P_2.

- Bagi pemain P_1 Misalnya x, dengan $0 \leq x \leq 1$ adalah proporsi waktu (probabilitas) yang diperlukan untuk memainkan strategi pada baris pertama maka proporsi waktu (probabilitas) yang diperlukan untuk memainkan strategi pada baris kedua adalah $1 - x$, sehingga jumlah semua proporsi waktu yang diperlukan untuk memainkan strateginya adalah $x + 1 - x = 1$.

- Bagi pemain P_2 Misalnya y, dengan $0 \leq y \leq 1$ adalah proporsi waktu (probabilitas) yang diperlukan untuk memainkan strategi kolom kedua adalah $1 - y$, sehingga jumlah proporsi waktu yang diperlukan untuk memainkan strateginya adalah $y + 1 - y = 1$.

Perhatikan tabel berikut:

			P_2	
			y	1-y
		j	1	2
		i		
P_1	x	1	1	5
	1-x	2	6	3

Tabel 2.5: Matriks Pembayaran

Dengan demikian tugas dari masing-masing pemain adalah menentukan besarnya pecahan yang tidak diketahui x dan y di mana pemain pertama menginginkan untuk memainkan strategi yang akan memaksimumkan kemenangannya (atau meminimumkan kekalahannya) tanpa memperhatikan langkah yang dilakukan oleh pihak lawan (pesaing), yaitu pemain kedua. Secara logika pemain pertama ingin membagi permainannya di antara baris-barisnya sedemikian rupa sehingga kemenangan atau kekalahan harapannya (*expected*) disaat pemain kedua memainkan kolom pertama akan sama dengan kemenangan atau kekalahan harapannya disaat pemain kedua memainkan kolom kedua. Sudah tentu pemain kedua (yang diasumsikan memiliki kecerdasan yang sama dengan pemain pertama) akan mengikuti langkah yang serupa di dalam perhitungan proporsi waktu yang diperlukan untuk setiap kolomnya yang dilakukan oleh pemain pertama, yaitu pemain kedua akan membagi waktu bermainnya di antara kolom-kolomnya. Sehingga kemenangan atau kekalahan harapannya (*expected*) disaat pemain pertama memainkan baris kesatu akan sama dengan kemenangan atau kekalahannya disaat pemain pertama memainkan baris kedua.

Penyelesaian strategi campuran pada matriks *payoff* pada tabel 2.5 adalah:

- Bagi pemain P_1 agar dapat mencapai strategi optimum maka perlu menyamakan kemenangan harapan yang diperoleh ketika pemain P_2 memainkan strategi ke 1 yaitu $[5x + (1 - x)]$ dengan kemenagan harapan yang diperoleh ketika pemain P_2 memainkan strategi ke 2 yaitu $[3x + 4(1 - x)]$. Dengan demikian berarti bahwa:

$$\begin{aligned} 5x + (1 - x) &= 3x + 4(1 - x) \\ 5x - x - 3x + 4x &= 4 - 1 \\ 5x &= 3 \\ x &= \frac{3}{5} = x_1^* \end{aligned}$$

karena $x_2^* = 1 - x$ maka $x_2^* = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Jadi strategi optimum bagi pemain

P_1 dicapai bila ia menggunakan $\frac{3}{5}$ waktunya untuk memainkan strategi ke 1 (baris ke 1) dan $\frac{2}{5}$ waktunya untuk memainkan strategi ke 2 (baris ke 2). Jadi strategi optimum bagi pemain P_1 adalah $X^* = \left[\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right]$

- Bagi pemain P_2 agar dapat mencapai strategi optimum ia perlu menyamakan kekalahan harapan yang dideritanya ketika pemain P_1 memainkan strategi ke 1 yaitu $[5y + 3(1 - y)]$ dengan kekalahan yang diderita ketika pemain P_1 memainkan strategi ke 2 yaitu $[y + 4(1 - y)]$. Dengan demikian berarti bahwa:

$$\begin{aligned}
5y + 3(1 - y) &= y + 4(1 - y) \\
5y - 3y - y + 4y &= 4 - 3 \\
5y &= 1 \\
y &= \frac{1}{5} = y_1^*
\end{aligned}$$

  karena $y_2^* = 1 - y$ maka $y_2^* = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Jadi strategi campuran optimum bagi pemain P_2 dicapai bila ia menggunakan $\frac{1}{5}$ waktunya untuk memainkan strategi ke 1 (kolom ke 1) dan $\frac{4}{5}$ waktunya untuk memainkan strategi ke 2 (kolom ke 2). Jadi strategi optimum bagi pemain P_2 adalah $Y^* = \left[\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right]$

Kemenangan harapan bagi pemain P_1 adalah:

$$\begin{aligned}
v^* &= \frac{1}{5}\left[5\left(\frac{3}{5}\right) + 1\left(\frac{2}{5}\right)\right] + \frac{4}{5}\left[3\left(\frac{3}{5}\right) + 4\left(\frac{2}{5}\right)\right] \\
&= \frac{1}{25}\left[15 + 2 + 36 + 32\right] \\
&= \frac{85}{25} \\
&= \frac{17}{5}
\end{aligned}$$

Hal ini berarti bahwa bila pemain P_1 bermain dengan menggunakan strategi optimumnya, maka ia mendapatkan kemenangan harapan sebesar $\frac{17}{5}$ per permainan. Jika dipandang dari segi pemain P_2 maka kekalahan harapannya adalah:

$$\begin{aligned} v^* &= \frac{3}{5}\left[5\left(\frac{1}{5}\right)+3\left(\frac{4}{5}\right)\right]+\frac{2}{5}\left[1\left(\frac{1}{5}\right)+4\left(\frac{4}{5}\right)\right] \\ &= \frac{1}{25}[15+36+2+32] \\ &= \frac{85}{25} \\ &= \frac{17}{5} \end{aligned}$$

Karena nilai permainan bertanda positif maka pemain P_1 dinyatakan sebagai pemenang dengan kemenangan harapan sebesar $\frac{17}{5}$.

Definisi 2.1.2. Vektor $X = [x_i]; i = 1, 2, 3, \cdots, m$ dari bilangan tak negatif x_i sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ didefinisikan sebagai strategi campuran bagi pemain P_i.

Vektor $Y = [y_i]; j = 1, 2, 3, \cdots, n$ dari bilangan tak negatif y_j sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$ didefinisikan sebagai strategi campuran bagi pemain P_2

Bila $(m-1)$ komponen dari $X = [x_1, x_2, \cdots, x_m]$ berharga nol yang berarti bahwa hanya ada satu komponen yang berharga satu maka dinamakan strategi murni bagi pemain P_1. Misalnya strategi optimum bagi pemain P_1, yaitu $X = [0, 0, 1, 0, 0, 0]$ begitu juga bila $(n-1)$ komponen dari $Y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$ berharga nol yang berarti hanya ada satu komponen yang berharga satu. Oleh sebab itu dinamakan strategi murni bagi pemain P_2. Misalnya $Y = [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$.

Definisi 2.1.3. Nilai matematis atau fungsi pembayaran $E(X, Y)$ bagi pemain pertama P_1 dengan matriks pembayaran $A(x_{rj})$ didefinisikan sebagai:

$$E(X,Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = XAY$$

dimana $X = [x_1, x_2, \cdots, x_m]$ adalah vektor baris yang merupakan strategi campuran bagi pemain P_1 dan $Y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$ adalah vektor kolom yang merupakan strategi campuran bagi pemain P_2

Definisi 2.1.4. Jika $\max_x \min_y E(x,y) = \min_y \max_x E(x,y) = E[x_0, y_0]$, maka (X_0, Y_0) didefinisikan sebagai strategi murni dari permainan itu dengan X_0 sebagai strategi optimum bagi pemain P_1 dan Y_0 sebagai strategi optimum bagi pemain P_2 dan $E(X_0, Y_0)$ merupakan nilai permainan.

Definisi 2.1.5. Jika $X^* = [x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*]$ merupakan strategi campuran optimum bagi pemain P_1 dan $Y^* = [y_1^*, y_2^*, \cdots, y_n^*]$ merupakan strategi campuran optimum bagi pemain P_2. Maka nilai permainan harapannya adalah:

$$\begin{aligned} V^* &= E(X^*, Y^*) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i^* a_{ij} y_j^* \\ &= X^*AY^* \end{aligned} \tag{2.16}$$

dengan $X^* = [x_i^*]; i = 1, 2, 3, \cdots, m$ merupakan vektor baris dan $Y^* = [y_j^*]; j = 1, 2, 3, \cdots, n$ merupakan vektor kolom

Contoh 2.1.4. Diberikan matriks pembayaran berikut ini:

		Pemain P_2	
		j	
Pemain P_1		1	2
i	1	1	6
	2	2	-7
	3	-3	8

Jelas bahwa tabel tersebut tidak dapat diselesaikan dengan strategi murni karena tidak adanya titik pelana. Dimisalkan pemain P_1 memilih strategi campuran $X = (x_1, x_2, x_3)$ dan pemain P_2 memilih strategi campuran $Y = (y_1, y_2)$. Fungsi pembayaran untuk pemain P_1 adalah:

$$
\begin{aligned}
E(X,Y) &= XAY \\
&= [x_1, x_2, x_3] \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -7 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= (x_1 + 2x_2 - 3x_3 6x_1 - 7x_2 + 8x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= y_1 (x_1 + 2x_2 - 3x_3) + y_2 (6x_1 - 7x_2 + 8x_3)
\end{aligned}
$$

Misalkan bahwa $X = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$, dan $Y = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ maka:

$$
\begin{aligned}
E(X,Y) &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{2}\right] + \frac{3}{4}\left[2 - \frac{7}{6} + 4\right] \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{29}{8} \\
&= \frac{27}{8}
\end{aligned}
$$

Nilai harapan bagi pemain P_1 sebesar $\frac{27}{8}$, yang berarti bahwa secara rata-rata per permainan pemain P_1 akan memperoleh pemainan sebesar $\frac{27}{8}$.

Aturan Dominasi

Sebelum menyelesaikan suatu permainan, perlu dipertimbangkan apakah ada baris atau kolom dalam matriks pembayarannya yanng tidak efektif pengaruhnya di dalam penentuan strategi optimum dan nilai permainan. Bila ada maka baris atau kolom yang seperti itu bisa dihapus atau tidak dipakai. Hal itu berarti probabilitas untuk memilih strategi sesuai baris atau kolom tersebut sama dengan nol. Dengan demikian ukuran matriks pembayaran yang tersisa akan lebih kecil. Hal ini akan lebih mempermudah untuk menyelesaikannya. Aturan demikian ini dinamakan aturan dominasi.

1. Untuk pemain pertama P_1

   Bila terdapat suatu baris dengan semua elemen dari baris tersebut adalah sama (sekolom) dari baris yang lain maka baris tersebut dikatakan didominasi dan baris itu telah dihapus.

2. Untuk pemain kedua P_2

   Bila terdapat suatu kolom dengan semua elemen dari kolom tersebut adalah sama atau lebih besar dari elemen dalam posisi yang sama (sebaris) dari kolom yang lain maka kolom tersebut dikatakan didominasi dan kolom itu dapat dihapus.

2.1.5 Permainan dengan Informasi Tak Lengkap

Dalam permainan dengan informasi lengkap strategi dari masing-masing pemain diketahui, namun tidak dalam permainan dengan informasi tak lengkap.

Dalam permainan dengan informasi tak lengkap, strategi tidak diketahui oleh pemain lainnya. Permainan dengan informasi tak lengkap atau yang sering disebut juga sebagai permainan bayes adalah model interaksi pengambilan keputusan di mana seorang pemain hanya memiliki sebagian informasi tentang pemain lainnya (Zamir, 2009). Contoh umum dalam permainan ini adalah lelang. Pada setiap lelang, umumnya penjual tidak mengetahui bagaimana *bidder* bersedia membayar barang yang akan dijualnya. Masing-masing (*bidder*) mengetahui nilai (*value*) barang yang akan dilelang, tetapi tidak mengetahui *value* yang akan diberikan oleh lawannya. Unsur-unsur dalam permainan bayes adalah:

1. Pemain

   Dimisalkan terdapat K pemain, $K = 1, 2, \cdots, K; \quad K \in N$

2. Aksi *(action)*

   Merupakan strategi yang dipilih oleh tiap pemain.

3. Pembayaran *(Payoff)*

   Merupakan fungsi pembayaran $u_i(a, \omega)$ yang tergantung pada profil aksi dan kondisi dalam suatu permainan. Dalam model duopoli cournot, payoff untuk kedua pemain merupakan fungsi laba.

4. Informasi *(information)*

   Informasi didefinisikan sebagai pengetahuan yang dimiliki oleh pemain di saat mengambil suatu keputusan. Informasi pemain i untuk $i = 1, 2 \cdots K$ diberikan oleh tipe fungsi $\tau_i : \Omega \rightarrow T_i$, dimana T_i dinotasikan sebagai ruang tipenya.

5. Keyakinan *(beliefs)*

   Merupakan probabilitas dari strategi yang dipilih oleh tiap-tiap pemain. $\mu = \mu(t)$ dimana $0 < \mu(t) < 1$ dan $\sum_{t\in T} \mu(t) = 1$. Probabilitas bahwa tipe i adalah t_i yang didefinisikan oleh $\mu_i(t_i) = \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} \mu(t_i, t_{-i})$. Probabilitas kondisi t yang diberikan tipe i adalah t_i adalah $\mu(t|t_i)$. Aturan bayes mengakibatkan $\mu(t|t_i) = \frac{\mu(t)}{\mu_i(t_i)}$

Definisi 2.1.6. Didefinisikan suatu permainan bayes

$$G = ((\Omega, \mu), (A_i, u_i, T_i, \tau_i)_{i\in K})$$

Dimisalkan pula $A = A_1 \times \cdots \times A_K$ dan $T = T_1 \times \cdots \times T_K$ yang merupakan notasi untuk himpunan aksi profil dan tipe profil. Maka $\tau : \Omega \to T$ didefinisikan oleh $(\tau(\omega), \cdots, \tau_K(\omega))$

Definisi 2.1.7. Strategi bayes murni untuk pemain i adalah fungsi $s_i : T_i \to A_i$, dimana $s_i(t_i)$ merupakan aksi yang diambil oleh pemain i pada saat ia merealisasikan t_i. Dimisalkan $S = s_i \times \cdots \times s_K$ dinotasikan sebagai himpunan profil dari strategi bayes dan untuk setiap tipe profil $t \in T$, maka dimisalkan pula $s(t) = (s_1(t_i), \cdots, s_K(t_K))$ dinotasikan sebagai profil aksi sebelumnya yang dideskripsikan oleh strategi profil s.

Definisi 2.1.8. Strategi bayes campuran untuk pemain i adalah fungsi $\sigma_i : T_i \to \Delta A_i$ yang merupakan probabilitas aksi *(action)* untuk masing-masing tipe t_i, dimana $\sigma_i(a_i|t_i)$ merupakan probabilitas pemain i memilih aksi a_i pada saat tipe t_i. Dimisalkan $\sum = \sum_i \times \cdots \times \sum_k$ dinotasikan himpunan profil strategi bayes untuk setiap tipe profil $t \in T$ dan $\sigma(t) = (\sigma_1(t_1), \cdots, \sigma_K(t_K))$ dinotasikan sebagai profil aksi yang dideskripsikan oleh strategi profil σ.

Definisi 2.1.9. Diberikan profil strategi σ_{-i} untuk pemain lain, akan didefinisikan pembayaran (*payoff*) untuk pemain i sebagai berikut:
untuk setiap tindakan a_i, jika A_{-i} tak hingga maka didefinisikan:

$$\begin{aligned} U_i(a_i, \sigma_{-i}|\omega) &= E_{\sigma_{-i}}(\cdot|\tau_{-i}(\omega))\,[u(a_i, \sigma_{-i}, \omega)] \\ &= \sum_{a_{-i}\in A_{-i}} u(a_i, \sigma_{-i}, \omega)\sigma_{-i}(a_i|\tau_{-i}(\omega)) \end{aligned}$$

menjadi pembayaran (*payoff*) untuk pemain i dalam kondisi ω.

Selanjutnya, dengan mengacu harapan kondisi payoffnya pada $\tau_i = t_i$, maka payoff yang dihasilkan dari aksi (*action*) a_i, tipe t_i dan jika Ω tertentu, maka:

$$\begin{aligned} U_i(a_i, \sigma_{-i}|t_i) &= E_\mu\,[U_i(a_i, \sigma_{-i}, \omega)|\tau_i = t_i] \\ &= \frac{\sum_{\omega\in\tau_i^{-1}(t_i)} U_i(a_i, \sigma_{-i}, \omega)\mu(\omega)}{\sum_{\omega\in\tau_i^{-1}(t_i)} \mu(\omega)} \end{aligned} \tag{2.17}$$

untuk strategi $\sigma_i \in \sum_i$, jika A_i tak hingga maka:

$$\begin{aligned} U_i((\sigma(\cdot|t_i), \sigma_{-i}), t_i) &= E_{\sigma_i(\cdot|t_{-i})}\,[U(a_i, \sigma_i, t_i)] \\ &= \sum_{a_i\in A_i} U(a_i, \sigma_{-i}, t_i)\sigma_i(a_i|ti) \end{aligned}$$

yang merupakan payoff harapannya pada tipe t_i

Definisi 2.1.10. Dimisalkan untuk setiap $a_i^{'} \in A_i$,

$$BR_i(\sigma_{-i}|t_i) = \Big\{a_i \in A_i : U_i(a_i, \sigma_{-i}, t_i) \geq U_i(a_i^{'}, \sigma_{-i}, t_i)\Big\}$$

yang dinotasikan sebagai himpunan respon terbaik untuk pemain i pada tipe t_i, maka $\sigma_i(\cdot|t_i)$ merupakan respon terbaik untuk pemain tipe i jika dan hanya jika $\sigma_i(a_i|t_i) > 0$ yang mengakibatkan $a_i \in BR_i(\sigma_{-i}|t_i)$.

Profil strategi bayes σ adalah keseimbangan bayes (*bayesian equilibrium*) jika masing-masing $(\sigma_{-i}|t_i)$ merupakan respon terbaik terhadap σ_{-i}, sehingga untuk masing-masing pemain i, untuk setiap $a_i \in A_i$ dan semua $t_i \in T_i$,

$$U_i(\sigma_i(\cdot|t_i), \sigma_{-i}, t_i) \geq U_i(a_i, \sigma_{-i}, t_i)$$

Jika masing-masing $\hat{\mu} > 0$ maka setiap keseimbangan bayes juga merupakan keseimbangan nash dalam permainan strategi $(\sum_i, U_i)_{i \in K}$, dimana fungsi payoff $U_i : \sum \rightarrow \Re$ dan jika A_i hingga untuk masing-masing pemain yang didefinisikan:

$$\begin{aligned} U_i &= E_\mu \left[U_i((\sigma(\cdot|\tau_i), \sigma_{-i}, \tau_i) \right] \\ &= \sum_{t_i \in T_i} U_i((\sigma(\cdot|t_i), \sigma_{-i}), t_i)\hat{\mu}(t_i) \end{aligned}$$

2.2 Struktur Pasar

Pasar adalah suatu institusi atau badan yang menjalankan aktivitas jual beli barang-barang dan atau jasa-jasa (Sugiarto, dkk 2005). Pengertian pasar dibatasi oleh komoditas yang homogen, sehingga dijumpai banyak sekali pasar, seperti pasar emas, pasar valuta asing, pasar wesel luar negeri, pasar tekstil dan sebagainya. Berdasarkan sifat dan bentuknya, pasar dapat diklasifikasikan menjadi dua macam yaitu pasar dengan persaingan sempurna (*perfect competitive market*) dan pasar dengan persaingan tak sempurna(*imperfect competitive market*). Jenis-jenis pasar yang termasuk golongan pasar dengan persaingan tak sempurna antara lain adalah pasar monopoli (*monopoly*), persaingan monopolistik (*monopolistic competition*), dan oligopoli (*oligopoly*).

2.2.1 Pasar Persaingan Sempurna

Suatu pasar disebut sebagai pasar persaingan sempurna, jika:

1. Terdapat sejumlah besar penjual dan pembeli komoditi, sehingga tindakan seorang individu tidak dapat mempengaruhi harga komoditi tersebut.
2. Produk yang dijual adalah homogen.
3. Terdapat mobilitas sumber daya yang sempurna.
4. Konsumen, pemilik sumber daya dan perusahaan dalam pasar mempunyai pengetahuan yang sempurna mengenai harga-harga dan biaya-biaya yang sekarang dan yang akan datang.

Dalam pasar persaingan sempurna, harga komoditi hanya ditentukan oleh perpotongan antara kurva permintaan dan kurva penawaran pasar. Dengan demikian, perusahaan dalam persaingan sempurna merupakan ”penerima harga” (*price taker*) dan dapat menjual setiap jumlah komoditi pada harga yang telah ditetapkan.

2.2.2 Pasar Persaingan Tak Sempurna

Pasar Monopoli

Pasar monopoli dibedakan menjadi bentuk pasar monopoli murni dan pasar mendekati monopoli (*near monopoly*). Pasar monopoli murni adalah pasar dengan pengusaha tunggal, sehingga tidak dimungkinkan terjadinya substitusi yang sempurna terhadap komoditas yang ditawarkan oleh pengusaha monopoli (*monopolis*). Dengan demikian monopolis tersebut tidak memiliki pesaing. Contoh pasar monopoli di Indonesia adalah PLN, PAM, PT Kereta Api, dan lain sebagainya. Pasar yang mendekati monopoli (*near monopoly*) adalah suatu pasar yang hanya terdiri dari satu orang pengusaha (*single producer*) atau satu perusahaan dalam suatu lokasi tertentu (daerah yang membatasi wilayah penjualan komoditas, misalnya satu kecamatan, satu kabupaten, satu negara).

Pasar Persaingan Monopolistis

Pasar persaingan monopolistik didefinisikan sebagai pasar dengan banyak produsen yang menghasilkan komoditas yang berbeda karakteristik (*differentiated product*). Pasar persaingan monopolistik lebih mendekati struktur pasar persaingan sempurna (dicirikan dengan banyak perusahaan yang berpartisipasi di pasar, tanpa batasan masuk industri yang serius) tetapi perusahaan-perusahaan yang berkiprah di pasar tersebut menghasilkan komoditas yang berbeda karakteristik.

Oligopoli

Pasar oligopoli adalah pasar yang terdiri dari beberapa produsen yang menghasilkan seluruh atau sebagian besar total output di pasar (Sugiarto, dkk 2005). Pasar oligopoli lebih menyerupai pasar monopoli murni yang dicirikan oleh sejumlah kecil perusahaan - perusahaan besar yang menghasilkan komoditas homogen seperti baja atau komoditas yang berbeda corak seperti mobil. Dalam hal ini banyaknya pesaing dari suatu perusahaan merupakan karakteristik yang membedakan pasar ini dengan berbagai jenis pasar yang lain. Ada kalanya pasar oligopoli terdiri dari dua produsen saja yang dikenal dengan pasar duopoli.

Dalam pasar oligopoli tidak terdapat keseragaman sifat-sifat perusahaan dalam berbagai industri. Kelakuan perusahaan-perusahaan dalam pasar oligopoli akan sangat berbeda jika dalam pasar hanya terdapat tiga perusahaan, dibandingkan jika dalam pasar terdapat lima belas perusahaan. Bila di pasar hanya dijumpai sejumlah kecil pesaing, keputusan pemasaran dari suatu perusahaan akan berdampak langsung dan dapat dirasakan oleh perusahaan lainnya karena perusahaan-perusahaan yang berada dalam pasar oligopoli mempunyai ketergantungan yang sangat kuat satu sama lainnya. Karakteristik pasar oligopoli yang demikian ini membuat analisis pasar menjadi lebih pelik. Jenis-jenis model oligopoli adalah oligopoli sweezy, oligopoli cournot, oligopoli bertrand dan oligopoli stackelberg. Dalam oligopoli sweezy setiap perusahaan berkeyakinan apabila satu perusahaan menurunkan harga maka akan diikuti oleh perusahaan lainnya, namun tidak demikian halnya jika harga dinaikkan. Dalam model bertrand, perusahaan bersaing dalam harga dan bereaksi secara optimal terhadap harga dari pesaingnya. Dalam model Stackelberg, satu dari perusahaan (yang bertindak sebagai leader) berinisiatif terlebih dahulu memilih jumlah output yang akan dihasilkan sebelum perusahaan-perusahaan lainnya memilih. Sedangkan pada model cournot setiap perusahaan berkeyakinan bahwa jika ia mengubah jumlah outputnya maka perusahaan lain tidak akan mengubahnya.

Oligopoli Cournot merupakan model pasar oligopoli yang pertama diperkenalkan oleh oleh Augustin Cournot seorang ahli ekonomi berkebangsaan Prancis pada tahun 1838. Aturan dasar untuk model Cournot adalah dalam suatu industri terdapat jumlah perusahaan yang tetap, yaitu n perusahaan. Tidak ada perusahaan yang baru masuk ataupun keluar meskipun terdapat perusahaan yang mungkin memilih untuk tidak berproduksi. Asumsi utama dari model ini adalah bahwa jika sebuah perusahaan telah menentukan tingkat produksinya, maka perusahaan tersebut tidak akan mengubahnya. Atas dasar asumsi inilah perusahaan pesaingnya akan meningkatkan tingkat produksinya.

Model duopoli adalah model yang sederhana untuk menjelaskan mengenai model cournot. Duopoli adalah keadaan khusus di mana dalam pasar oligopoli hanya ada dua perusahaan. Model ini dikembangkan untuk melihat lebih tajam interaksi antar perusahaan dalam pasar oligopoli (Rahardja dan Manurung, 2003). Dalam pasar duopoli hanya terdapat dua perusahaan yang menjual produk yang homogen. Harga pasar ditentukan oleh keseimbangan antara jumlah total otput yang dihasilkan oleh dua perusahaan dengan permintaan pasar.

Masing-masing duopolis (perusahaan yang beroperasi dalam pasar duopoli) mempunyai daya monopoli yang sama. Keputusan jumlah output yang diproduksi duopolis berdasarkan asumsi bahwa output duopolis yang satu (saingannya) sudah diputuskan dan tidak akan berubah.

Contoh 2.2.1. Di suatu desa nelayan yang jauh dari kota, terdapat dua perusahaan yang bergerak di bidang penangkapan dan penjualan ikan. Tiap perusahaan memiliki satu kapal untuk menangkap ikan. Masing-masing perusahaan berangkat pada pukul 03.00 untuk menangkap ikan yang akan dijual pada hari ini dan kembali pada pukul 09.00. Nakhoda kapal mengetahui dengan pasti banyak ikan yang akan diperoleh. Hasil tangkapan tergantung dari tiga hal: kapal yang digunakan, jumlah awak kapal, dan waktu penangkapan. Informasi ini menghasilkan fungsi biaya untuk perusahaan pertama $C_1 = 6000 + 16q_1$ dan fungsi biaya perusahaan kedua $C_2 = 9000 + 10q_2$ dengan q adalah jumlah tangkapan atau jumlah output. Setiap perusahaan beranggapan bahwa output yang dipilih lawannya pada saat ini akan sama dengan sebelumnya dan kedua perusahaan memaksimumkan saat ini. Ketika akan berlayar masing-masing perusahaan telah memutuskan jumlah ikan yang ditangkap. Jika setiap perusahaan mengetahui fungsi permintaan pasar, yaitu $P = 100 - 0.1Q = 100 - 0.1(q_1 + q_2)$. Fungsi laba untuk kedua perusahaan adalah:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= q_1 P - C_1 \\
&= q_1(100 - 0.1(q_1 + q_2)) - (600 + 16q_1) \\
&= 100q_1 - 0.1q_1(q_1 + q_2) - 6000 - 16q_1 \\
&= 84q_1 - 0.1q_1^2 - 0.1q_1q_2 - 6000
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\pi_2 &= q_2 P - C_2 \\
&= q_2(100 - 0.1(q_1 + q_2)) - (9000 + 10q_1) \\
&= 100q_1 - 0.1q_1(q_1 + q_2) - 9000 - 10q_1 \\
&= 90q_1 - 0.1q_2^2 - 0.1q_1q_2 - 9000
\end{aligned}$$

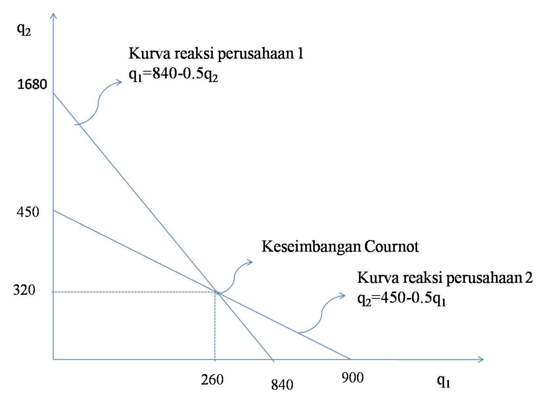
Output kesetimbangan diperoleh jika MR (*Marjinal Revenue*) = 0 atau $\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 0$, maka:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} &= 84 - 0.2q_1 - 0.1q_2 \\
0 &= 84 - 0.2q_1 - 0.1q_2 \\
q_1 &= 42 - 0.5q_2 \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

dan

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} &= 90 - 0.2q_2 - 0.1q_1 \\
0 &= 90 - 0.2q_2 - 0.1q_1 \\
q_2 &= 45 - 0.5q_1 \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

dimana persamaan (1.18) merupakan fungsi reaksi perusahaan 1 dan persamaan (1.19) reaksi perusahaan 2. Dari kedua persamaan tersebut diperoleh $q_1 = 260$ dan $q_2 = 320$ yang merupakan output masing-masing perusahaan pada keseimbangan cournot, kedua kurva reaksi dapat digambarkan dalam diagram berikut:



Gambar 2.1: Model Keseimbangan Cournot (*Cournot Equilibrium Model*)

Sehingga harga keseimbangan diperoleh

$$
\begin{aligned}
P &= 100 - 0.1(q_1 + q_2) \\
&= 100 - 0.1(260 + 320) \\
&= 100 - 58 \\
&= 42
\end{aligned}
$$

jadi keuntungan maksimum yang diperoleh masing-masing perusahaan adalah

$$\pi_1 = q_1 P - C_1 = 260(42) - (6000 + 16(260)) = 10920 - 10160 = 760$$

$$\pi_2 = q_2 P - C_2 = 320(42) - (9000 + 10(320)) = 13440 - 12200 = 1240$$