Pendekatan Teori Permainan pada Model Pasar Duopoli Cournot dengan Informasi Tak Lengkap

Skripsi
Disusun untuk melengkapi syarat-syarat
guna memperoleh gelar Sarjana Sains

DINAR RIYANDANI
3125081781

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA
2013

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

Pendekatan Teori Permainan pada Model Duopoli Cournot dengan Informasi Tak Lengkap

Nama : Dinar Riyandani

No. Registrasi : 3125081781

		Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab				
Dekan	:	Dra. Marheni, M.Sc.	....	....
		NIP. 19500606 197412 2 001		
Wakil Penanggung Jawab				
Pembantu Dekan I	:	Dr.rer.nat.Apriliana L.F.,M.S.,M.Ed.	....	....
		NIP. 19600408 199003 2 002		
Ketua	:	Prof. Dr. Suyono, M.Si.	....	....
		NIP. 19671218 199303 1 005		
Sekretaris	:	Dian Handayani, M.Si.	....	....
		NIP. 19740415 199803 2 001		
Penguji	:	Ir Fariani Hermin, MT.	....	....
		NIP. 19600211 198703 2 001		
Pembimbing I	:	Drs. Sudarwanto, M.Si., DEA.	....	....
		NIP. 19650325 199303 1 003		
Pembimbing II	:	Ria Arafiyah, M.Si.	....	....
		NIP. 19751121 200501 2 004		

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal: 26 Maret 2013

ABSTRAK

DINAR RIYANDANI, 3125081781. Pendekatan Teori Permainan pada Model Pasar Duopoli Cournot dengan Informasi Tak Lengkap. Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. 2013.

Teori permainan adalah suatu pendekatan matematis yang dikembangkan untuk tujuan menganalisis persaingan yang melibatkan berbagai kepentingan. Berdasarkan kelengkapan informasinya permainan dibagi menjadi dua, yaitu permainan dengan informasi lengkap dan permainan dengan informasi tak lengkap. Permainan dengan informasi tak lengkap atau disebut juga sebagai permainan Bayes adalah model interaksi pengambilan keputusan di mana seorang pemain hanya mengetahui sebagian informasi pemain lainnya. Informasi dalam hal ini misalnya strategi yang tersedia, informasi lain yang dimiliki lawannya dan sebagainya, sehingga mempengaruhi fungsi payoff pemain lainnya. Penerapan permainan bayes salah satunya adalah model interaksi duopoli Cournot. Dalam duopoli Cournot, masing-masing perusahaan hanya mengetahui fungsi biaya marjinalnya sendiri yaitu kemungkinan rendah (L) atau tinggi (H) tapi tidak mengetahui fungsi biaya perusahaan pesaingnya. Informasi ini menghasilkan Situasi persaingan dan interaksi dalam pasar duopoli Cournot yang kemudian dimodelkan dengan teori permainan. Dalam skripsi ini teori permainan Bayes digunakan untuk menentukan titik equilibrium atau solusi optimum dari pasar duopoli Cournot.

Kata kunci : duopoli cournot, teori permainan, keseimbangan bayesian cournot.

ABSTRACT

DINAR RIYANDANI, 3125081781. Game Theory Approach to Cournot Duopoly Market Model with Incomplete Information. Thesis. Faculty of Mathematics and Natural Science, State University of Jakarta. 2013.

Game theory is a mathematical approach that developed for the purpose to analyzing competition involving various interests. Based on the completeness of the information game are consist of two, they are game with complete information and games with incomplete information. Game with incomplete information, also known as Bayesian game is a model of the interaction of decision-making in which a player knows only partial information of the other players. Information in this instance strategies available, any other information possessed his opponent and so on, thus affecting other players payoff functions. Application of Bayes one game is Cournot duopoly model of interaction. In a Cournot duopoly, each firm only knows its own marginal cost function that is likely low (L) or high (H) but did not know the company's competitors cost function. This information and interaction produce a situation of competition in the market Cournot duopoly and then modeled by game theory. In this paper the Bayesian game theory is used to determine the point of equilibrium or optimum solution of the Cournot duopoly market.

Keywords : duopoli cournot, games theory, bayesian equilibrium cournot.

PERSEMBAHANKU...

Skripsi ini ku persembahkan untuk kedua orangtuaku tersayang, kakak dan adik-adikku serta seluruh keluarga besar tercinta *" Terima kasih atas semua doa dan dukungan kalian selama ini "*.

"*Demi masa, sesungguhnya manusia itu benar-benar dalam keadaan merugi (celaka), kecuali orang-orang yang beriman, beramal shalih, saling menasehati dalam kebenaran, dan saling menasehati dalam kesabaran.*" (Al Ashr: 1-3)

Bermimpilah, karena semua berawal dari sebuah mimpi. Jangan takut, karena apapun yang tak mungkin didapat akan didapat jika kita mau bersungguh-sungguh dalam berusaha.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat dalam memperoleh gelar Sarjana Jurusan Matematika Universitas Negeri Jakarta yang berjudul "Pendekatan Teori Permainan pada Model Pasar Duopoli Cournot dengan Informasi Tak Lengkap".

Skripsi ini tidak akan dapat diselesaikan dengan baik tanpa adanya orang-orang yang senantiasa memberikan bantuan kepada penulis. Maka dari itu penulis ingin mengucapkan terima kasih terutama kepada :

1. Bapak Drs. Sudarwanto, M. Si, DEA sebagai dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktunya untuk membimbing penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

2. Ibu Ria Arafiyah, M. Si sebagai dosen pembimbing II yang telah sabar membimbing serta memberikan arahan kepada penulis.

3. Bapak Prof. Dr. Suyono, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNJ.

4. Ibu Dra. Ratna Widyanti, M. Si, selaku Sekretaris Jurusan Matematika serta sebagai Ketua Program Studi Matematika.

5. Ibu Ir. Fariani Hermin, M.T, selaku Dosen Pembimbing Akademis yang telah membimbing penulis dalam menyelesaikan kegiatan akademis.

6. Seluruh Bapak/Ibu dosen atas pengajarannya yang telah diberikan dan karyawan/karyawati FMIPA UNJ yang telah memberikan informasi yang

penulis butuhkan dalam menyelesaikan skripsi.

7. Kedua orangtuaku, terutama ibu yang tiada henti-hentinya memberikan doa kepada penulis hingga saat ini dan selalu memberi dukungan baik material maupun spiritual.

8. Kakak dan kedua adikku yang selalu mendukung penulis.

9. Riska, Zahra, Pipit, Wieke, Indah, Parti, Ernita, Anatri, Richi, Fara, Meta, Cica, Acil, Nia, Pewe, Oyot, dan seluruh teman-teman matematika 2008.

10. Ka Uut, Konnytia, Eka dan Agnia, sahabat terbaik yang selalu memberikan dukungan serta doanya dan mau direpotkan oleh penulis selama penyusunan skripsi ini.

11. Orang-orang tersayang yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini jauh dari kesempurnaan. Maka dari itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembacanya. Akhir kata penulis ucapkan terima kasih

Jakarta, Maret 2013

Dinar Riyandani

DAFTAR ISI

Daftar Tabel

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam kehidupan sehari-hari matematika memiliki peranan yang sangat penting, seperti menghitung jumlah pengeluaran ibu rumah tangga, tarif ongkos angkutan umum, praktek jual beli dan lain sebagainya. Aplikasi matematika sebagai ilmu hitung salah satunya dalam bidang ekonomi khususnya menganalisa suatu persaingan pasar.

Secara umum, pasar merupakan tempat bertemunya pembeli dan penjual, selain itu pasar juga dapat dikatakan sebagai tempat bertemunya penawaran dan permintaan. Berdasarkan strukturnya, yaitu jumlah penjual dan pembeli pasar digolongkan menjadi pasar persaingan sempurna dan pasar persaingan tidak sempurna. Pasar persaingan sempurna adalah pasar yang terbentuk dari penjual dan pembeli yang banyak dimana produk yang dijual bersifat homogen. Harga komoditi hanya ditentukan oleh perpotongan antara kurva permintaan pasar dan kurva penawaran pasar. Dengan demikian perusahaan dalam pasar persaingan sempurna merupakan *price taker* (penerima harga) dan dapat menjual setiap jumlah komoditi pada harga yang telah ditetapkan. Pasar persaingan tidak sempurna adalah pasar dimana produsen mempunyai kekuatan untuk mengatur harga dan barang yang dijual bersifat heterogen, pasar ini terdiri atas monopoli, persaingan monopolistik dan pasar oligopoli.

Pasar oligopoli merupakan mekanisme pasar universal, dimana perdagangan dikuasai oleh sedikit perusahaan yang menghasilkan produk yang sama atau homogen. Perusahaan ini tidak hanya memiliki permintaan pasar namun juga strategi untuk meningkatkan keuntungannya. Salah satu jenis pasar oligopoli adalah oligopoli Cournot. Model Cournot diperkenalkan oleh Augustin Cournot pada tahun 1838 (Sugiarto, dkk 2005). Salah satu ciri dari pasar oligopoli Cournot adalah setiap perusahaan yakin pesaingnya akan tetap mempertahankan output konstan apabila salah satu perusahaan mengubah jumlah outputnya. Situasi dimana tidak ada perusahaan yang ingin mengubah tingkat outputnya disebut keseimbangan Cournot. Salah satu model oligopoli Cournot adalah model duopoli Cournot, yaitu model pasar yang terdiri atas dua perusahaan. Dalam duopoli Cournot dimana terdapat dua perusahaan yang terlibat persaingan dalam merebut pasar, fungsi laba masing-masing perusahaan dapat dimodelkan dalam teori permainan. Amir dan Grilo (1999) menjelaskan tentang model duopoli dalam permainan, dimana terdapat dua model yaitu Cournot dan Stackelberg. Dalam permainan, perusahaan harus memilih dari kedua model tersebut mana yang dapat memberikan imbalan yang maksimum.

Teori permainan merupakan suatu pendekatan matematis yang dikembangkan dengan tujuan menganalisis situasi persaingan yang melibatkan berbagai kepentingan. Beberapa contoh yang nyata dari dua pihak yang bertentangan adalah pertentangan dua partai politik yang saling bersaing, perang antara dua kesatuan, pertentangan antara buruh dan majikan, pertandingan antara dua kesebelasan, pertentangan dua perusahaan untuk merebut pasar, dan lain-lain (Kartono, 1994).

Berdasarkan kelengkapan informasinya teori permainan dibagi atas permainan informasi lengkap dan informasi tak lengkap. Dalam teori permainan umumnya setiap pemain mengetahui strategi dari masing-masing pemain. strategi didefinisikan sebagai suatu siasat atau rencana tertentu dari seorang pemain sebagai reaksi atas aksi yang mungkin dilakukan oleh pemain lain yang menjadi saingannya. Akan tetapi tidak demikian dalam permainan dengan informasi tak lengkap. Permainan ini pertama kali diperkenalkan oleh Harsanyi (1967). Dalam permainan tersebut diasumsikan bahwa ada pemain yang tidak mengetahui beberapa parameter penting pemain lainnya. Misalnya strategi yang tersedia, informasi lain yang dimiliki lawannya dan sebagainya, sehingga mempengaruhi fungsi *payoff* pemain lainnya. Sebagai contoh, sebuah perusahaan mungkin tidak mengetahui biaya produksi pesaingnya.

Permasalahan dalam pasar duopoli cournot adalah memodelkan setiap situasi persaingan dan interaksi dalam pasar tersebut ke dalam suatu model permainan. Setiap perusahaan ingin memaksimalkan *payoff* dengan cara memilih kuantitas yang dapat memberikan maksimum. Masing-masing perusahaan hanya mengetahui biaya produksinya akan tetapi tidak mengetahui biaya produksi pesaingnya. Selanjutnya akan dicari titik ekuilibrium atau solusi optimum dari permainan pasar duopoli Cournot tersebut berdasarkan Mehmet Can (2012) yang menemukan keseimbangan Bayes dalam permainan duopoli cournot demikian pula dengan Scott McCraken dan Rodrigues-Neto (2012). Selain itu akan dicari hubungan probabilitas informasi yang diketahui masing-masing pemain terhadap aksi (strategi) yang dipilihnya dengan manual dan dibandingkan dengan software matlab.

1.2 Perumusan Masalah

Dengan melihat latar belakang yang telah dikemukakan, maka masalah yang dirumuskan dan akan dibahas dalam skripsi ini adalah

- Bagaimanakah memodelkan situasi persaingan pasar duopoli Cournot dengan menggunakan teori permainan?
- Bagaimana mencari solusi optimum dalam interaksi duopoli Cournot?

1.3 Pembatasan Masalah

Dalam penelitian ini diberikan batasan yaitu menerapkan teori permainan dengan pendekatan permainan bayes pada duopoli Cournot.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan yang ingin dicapai dalam penulisan ini adalah memperoleh:

- Model pasar duopoli Cournot dalam teori permainan
- Solusi optimum dalam interaksi duopoli Cournot

1.5 Manfaat Penulisan

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat menjadi referensi aplikasi teori permainan dalam pasar duopoli Cournot. Selain itu juga dapat membantu dan mempermudah dalam menentukan strategi dan perhitungan titik equilibrium pada pasar duopoli Cournot.

1.6 Metode Penelitian

Skripsi ini merupakan kajian teori dalam bidang teori permainan yang didasarkan pada jurnal-jurnal dan buku-buku tentang teori permainan dan pasar duopoli Cournot.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Teori Permainan

Teori permainan *(game theory)* adalah suatu pendekatan matematis yang dikembangkan untuk tujuan menganalisis persaingan yang melibatkan berbagai kepentingan (Dumairy, 2003). Teori ini mengacu dari suatu keadaan di mana terdapat dua orang atau lebih dengan tujuan atau kepentingan yang berbeda terlibat dalam suatu permainan. Tindakan masing-masing pemain turut mempengaruhi hasil akhir dari permainan.

Unsur-unsur dasar dalam teori permainan adalah :

1. Jumlah Pemain

   Permainan diklasifikasikan menurut jumlah kepentingan atau tujuan yang ada dalam permainan tersebut. Akan tetapi pengertian jumlah pemain tidak selalu sama dengan jumlah orang yang terlibat dalam permainan. Jumlah pemain dalam hal ini adalah jumlah kelompok pemain berdasarkan masing-masing kepentingan atau tujuannya. Dengan demikian dua orang atau lebih yang mempunyai kepentingan yang sama diperhitungkan sebagai satu (kelompok) pemain.

2. Pembayaran *(Payoff)*

   Hasil akhir yang terjadi pada suatu permainan disebut pembayaran *(payoff)*.

Berdasarkan pembayaran *(payoff)*, permainan dikelompokkan menjadi dua jenis, yaitu permainan jumlah nol *(zero-sum games)* dan permainan jumlah bukan nol *(non zero-sum games)*. Jika jumlah pembayaran *(payoff)* dari seluruh pemain adalah nol, yaitu dengan memperhitungkan setiap keberuntungan sebagai bilangan positif dan ketidakberuntungan sebagai bilangan negatif, maka permainan demikian adalah permainan jumlah nol *(zero-sum games)*. Selain itu merupakan permainan jumlah bukan nol *(non zero-sum games)*.

3. Strategi Permainan

   Pengertian strategi dalam teori permainan adalah suatu siasat atau rencana tertentu dari seorang pemain sebagai reaksi atas aksi yang mungkin dilakukan oleh pemain lain yang menjadi saingannya.

4. Matriks Permainan

   Setiap persoalan yang dianalisis dengan teori permainan senantiasa dapat disajikan dalam sebuah matriks permainan. Matriks permainan disebut juga matriks pembayaran *(payoff)*, yaitu sebuah matriks yang unsur-unsurnya berupa ganjaran dari para pemain yang terlibat dalam permainan tersebut. Baris-barisnya melambangkan strategi-strategi yang dimiliki pemain pertama, sedangkan kolom-kolomnya melambangkan strategi-strategi yang dimiliki pemain lain. Dengan demikian, permainan berstrategi $m \times n$ dilambangkan oleh matriks permainan $m \times n$.

   Nilai suatu permainan adalah pembayaran rata-rata atau pembayaran yang diharapkan sepanjang rangkaian permainan, dengan menganggap kedua belah pihak pemain senantiasa berupaya memainkan strateginya yang optimum. Permainan dikatakan adil *(fair)* apabila nilainya nol, dimana tak seorang pemain pun memperoleh keuntungan atau kemenangan. Dalam permainan yang tidak adil *(unfair)* seorang pemain akan memperoleh kemenangan atas pemain lain, yakni jika nilai permainan tersebut bukan nol. Dalam hal ini nilai permainan adalah positif jika pemain pertama memperoleh kemenangan, sebaliknya nilai permainan adalah negatif jika pemain lain memperoleh kemenangan.

5. Titik Pelana

   Jika di dalam suatu matriks permainan terdapat sebuah unsur yang merupakan unsur maksimum dari minima baris dan unsur minimum dari maksima kolom sekaligus, maka unsur tersebut dinamakan titik pelana *(saddle point)*. Jadi titik pelana adalah suatu unsur di dalam matriks permainan yang sekaligus merupakan maksimin baris dan minimaks kolom. Permainan dikatakan bersaing ketat *(strictly determined)* jika matriksnya mengandung titik pelana. Strategi yang optimum bagi masing-masing pemain adalah strategi pada baris dan kolom yang mengandung titik pelana tersebut. Dalam hal ini baris yang mengandung titik pelana merupakan strategi optimum bagi pemain pertama, sedangkan kolom yang mengandung titik pelana merupakan strategi optimum bagi pemain lain.

2.1.1 Permainan Dua Pihak Berjumlah Nol

Permainan dua pihak berjumlah nol adalah suatu permainan dengan jumlah kemenangan kedua belah pihak sama dengan nol (Kartono, 1994). Hal ini berarti bahwa jumlah pembayaran yang diterima bagi salah satu pemain yang menang sama dengan jumlah pembayaran yang dibayarkan oleh pihak yang kalah.

Dalam hal ini kemenangan dari pihak yang satu merupakan kekalahan bagi pihak lainnya.

Bentuk umum matriks payoff untuk permainan berjumlah nol dari dua pihak adalah sebagai berikut:

			Pemain P_2				
			y_1	y_2	y_3	…	y_n
		j	1	2	3	…	n
		i					
	x_1	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}
	x_2	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}
	x_3	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{3n}
Pemain P_1	.	.					
	.	.					
	.	.					
	x_m	m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	a_{mn}

Tabel 2.1: Matriks Payoff $m \times n$

dimana:

- m adalah banyaknya strategi yang dimiliki pemain P_1
- n adalah banyaknya strategi yang dimiliki pemain P_2
- a_{ij} ; $i = 1, 2, \cdots, m$ dan $j = 1, 2, \cdots, n$ adalah pembayaran (yang didefinisikan secara numerik : bilangan positif, bilangan negatif atau nol) yang bersesuaian dengan strategi ke-i bagi pemain P_1 dan strategi ke-j bagi pemain P_2.

Matriks pembayaran $A = (a_{ij})$ menunjukkan pembayaran kepada pemain pertama (P_1). Pembayaran untuk pemain kedua (P_2) merupakan negatif dari pembayaran pemain pertama (P_1). Jika pemain pertama (P_1) menerima pembayaran sebesar a_{ij}, maka pemain kedua (P_2) harus membayar sebesar a_{ij} atau menerima pembayaran sebesar $-a_{ij}$.

Contoh 2.1.1. Pengusaha A dan pengusaha B mengadakan kampanye promosi dalam perebutan persaingan pasar barang-barang elektronik. Pengusaha A menggunakan tiga media promosi, yaitu media televisi, radio dan surat kabar sedangkan pengusaha B hanya menggunakan dua media promosi yaitu media televisi dan radio.

Berdasarkan informasi pasar yang diperoleh dari hasil riset pemasaran diperoleh data sebagai berikut:

- Bila pengusaha A melakukan promosi melalui media televisi dan pengusaha B juga berpromosi dengan media televisi maka pengusaha A memperoleh keuntungan Rp.5.000.000.

- Bila pengusaha A melakukan promosi melalui media radio dan pengusaha B berpromosi dengan media televisi maka pengusaha A memperoleh keuntungan Rp.6.000.000.

- Pengusaha A akan rugi sebesar Rp.10.000.000 bila ia berpromosi menggunakan media surat kabar di saat pengusaha B berpromosi menggunakan televisi.

- Bila pengusaha A melakukan promosi melalui media televisi dan pengusaha B berpromosi menggunakan radio maka baik pengusaha A maupun pengusaha B sama-sama tidak akan menikmati keuntungan atau pun kerugian.

- Bila kedua pengusaha tersebut sama-sama menggunakan media radio maka pengusaha B akan memperoleh keuntungan sebesar Rp.2.000.000.
- Pengusaha B juga akan memperoleh keuntungan sebesar Rp.3.000.000 bila ia promosi menggunakan media radio di saat pengusaha A berpromosi menggunakan media surat kabar.

Matriks pembayaran dapat disajikan sebagai berikut:

		Pengusaha B	
		Televisi	Radio
Pengusaha A	Televisi	5	0
	Radio	6	-2
	Surat Kabar	-10	-3

Tabel 2.2: Contoh Matriks Pembayaran dua pihak berjumlah nol

Yang tampak dari matriks pembayaran diatas adalah:

$a_{11} = 5$, berarti keuntungan bagi pengusaha A sebesar 5.

$a_{21} = 6$, berarti keuntungan bagi pengusaha A sebesar 6.

$a_{31} = -10$, berarti keuntungan bagi pengusaha B sebesar 10.

$a_{12} = 0$, berarti tidak ada yang untung atau rugi.

$a_{22} = -2$, berarti keuntungan bagi pengusaha B sebesar 2.

$a_{32} = -3$, berarti keuntungan bagi pengusaha B sebesar 3.

2.1.2 Permainan Dua Pihak Berjumlah Tak Nol

Permainan dengan jumlah tak nol (*non zero sum games*) adalah permainan dengan total pembayaran dari masing-masing pemain pada akhir suatu permainan tidak sama nol.

Pemain P_2

			y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n
		j	1	2	3	$\cdots$	n
		i					
	x_1	1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	(a_{13}, b_{13})	$\cdots$	(a_{1n}, b_{1n})
	x_2	2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	(a_{23}, b_{23})	$\cdots$	(a_{2n}, b_{2n})
	x_3	3	(a_{31}, b_{31})	(a_{32}, b_{32})	(a_{33}, b_{33})	$\cdots$	(a_{3n}, b_{3n})
Pemain P_1	.	.					
	.	.					
	.	.					
	x_m	m	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	(a_{m3}, b_{m3})	$\cdots$	(a_{mn}, b_{mn})

Tabel 2.3: Matriks Pembayaran dua pihak berjumlah tak nol

dimana:

- m adalah banyaknya strategi yang dimiliki oleh pemain P_1
- n adalah banyaknya strategi yang dimiliki oleh pemain P_2
- a_{ij} dengan $i = 1, 2, \cdots, m$ dan $j = 1, 2, \cdots, n$ adalah nilai pembayaran untuk pemain P_1
- b_{ij} dengan $i = 1, 2, \cdots, m$ dan $j = 1, 2, \cdots, n$ adalah nilai pembayaran untuk pemain P_2 yang bersesuaian dengan dengan strategi ke-i bagi pemain P_1 dan strategi ke-j bagi pemain P_2

Contoh 2.1.2. Dimisalkan terdapat dua pengusaha A dan pengusaha B yang bersaing dalam perebutan persaingan pasar barang-barang elektronik. Masing-masing perusahaan bebas menentukan apakah ia akan melakukan promosi atau tidak. Matriks *payoff* disajikan dalam tabel berikut:

		Pengusaha B	
		Promosi	Tidak Promosi
Pengusaha A	Promosi	5 , 5	8 , -18
	Tidak Promosi	-18 , 8	-12 , -12

Tabel 2.4: Contoh matriks Pembayaran dua pihak berjumlah tak nol

Dari tabel di atas maka:

- Bila kedua pengusaha sama-sama melakukan promosi maka kedua perusahaan akan memperoleh keuntungan sebesar 5.

- Bila pengusaha A melakukan promosi dan pengusaha B tidak berpromosi maka perusahaan A akan menerima keuntungan sebesar 8, sedangkan pengusaha B akan memperoleh kerugian sebesar 18.

- Bila pengusaha B melakukan promosi dan pengusaha A tidak berpromosi maka pengusaha B akan menerima keuntungan sebesar 8, sedangkan pengusaha A akan memperoleh kerugian sebesar 18.

- Bila kedua pengusaha sama-sama tidak berpromosi maka kedua pengusaha akan memperoleh kerugian sebesar 12.

Dengan demikian masing-masing pengusaha A dan B lebih baik berpromosi karena akan menerima keuntungan sebesar 8, sekalipun dapat mengalami kerugian 12 tetapi masih lebih baik daripada tidak melakukan promosi dapat mengalami kerugian sebesar 18.

2.1.3 Permainan dengan Strategi Murni

Permainan dengan strategi murni adalah suatu permainan dengan posisi pilihan terbaiknya bagi setiap pemain dicapai dengan memilih satu strategi tunggal (Kartono, 1994). Jadi strategi murni adalah strategi dimana setiap pemainnya hanya mempunyai tepat satu langkah yang terbaik. Dalam permainan dengan strategi murni, pemain pertama (pemain baris) yaitu pemain yang berusaha memaksimumkan kemenangan (keuntungan) yang minimum sehingga kriteria strategi optimumnya adalah kriteria maksimin. Sementara itu, pemain kedua (pemain kolom) yaitu pemain yang berusaha meminimumkan kekalahan (kerugian) yang maksimum sehingga kriteria strategi optimumnya adalah kriteria minimaks.

Apabila nilai maksimin dan minimaks sama, maka permainan ini dapat diselesaikan dengan strategi murni dimana titik keseimbangan (*equilibrium point*) telah tercapai. Titik keseimbangan ini dinamakan titik pelana (*saddle point*).

Pada tabel 2.1, pemain pertama (P_1) mempunyai m langkah strategi i, dimana $i = 1, 2, \cdots, m$ dan pemain kedua (P_2) mempunyai n langkah strategi j, dimana $j = 1, 2, \cdots, n$. Pemain pertama (P_1) merupakan pemain baris yang menerapkan kriteria maksimin, yaitu berusaha memaksimumkan keuntungan (kemenangan) yang minimum sementara pemain kedua (P_2) merupakan pemain kolom yang menerapkan kriteria minimaks, yaitu berusaha meminimumkan kerugian (kekalahan) yang maksimum. Berdasarkan pada kriteria masing-masing pemain maka untuk menentukan titik pelana dapat dijelaskan sebagai berikut:

- Untuk pemain pertama (P_1)

  Apabila pemain pertama (P_1) memilih strategi i maka dia yakin akan memenangkan $\min_y(a_{ij})$ apapun strategi yang dipilih atau digunakan oleh pemain kedua (P_2). Karena pemain pertama (P_1) merupakan pemain yang berusaha memaksimumkan kemenangan (keuntungan) yang minimum maka dia akan memilih strategi yang akan memberikan niali maksimum dari nilai yang minimum, yaitu $\max_x \min_y(a_{ij})$

- Untuk pemain kedua (P_2)

  Pemain kedua (P_2) akan berusaha menekan kemenangan bagi pemain pertama (P_1) sampai sekecil mungkin sehingga jika pemain kedua (P_2) memilih strategi j maka dia yakin bahwa kemenangan yang diperoleh pemain pertama (P_1) tidak lebih dari $\max_x(a_{ij})$ apa pun strategi yang dipilih atau digunakan oleh pemain pertama (P_1). Karena pemain kedua (P_2) merupakan pemain yang berusaha meminimumkan kekalahan (kerugian) yang memaksimukan maka dia akan memilih strategi yang akan memberikan nilai minimum dari nilai maksimum tersebut, yaitu $\min_y \max_x(a_{ij})$.

  Jika dalam suatu matriks pembayaran (a_{ij}), berlaku:

$$\begin{aligned} \max_i \min_j(a_{ij}) &= \min_j \max_i(a_{ij}) \\ &= a_{rs} \end{aligned} \tag{2.1}$$

  maka matriks pembayaran tersebut dikatakan memiliki titik pelana pada (r, s) dan elemen a_{rs} merupakan nilai permainan yang bersesuaian dengan strategi optimum bagi pemain pertama (P_1) yaitu $i = r$ dan strategi optimum bagi pemain kedua (P_2) yaitu $j = s$.

Contoh 2.1.3. Diberikan matriks pembayaran sebagai berikut:

		Pemain P_2 j 1 2 3 4	Minimum tiap baris
Pemain P_1 i	1 2 3	5 -4 -2 -1 3 1 -1 2 2 3 -3 -2	-4 (-1) Maksimin -3
Maksimum tiap kolom		5 3 (-1) 2 Minimaks	

Jika nilai minimum di tiap barisnya diperhatikan, maka nilai maksimum dari minimum tersebut adalah -1. Demikian juga jika nilai maksimum dari setiap kolomnya diperhatikan, maka nilai minimum dari maksimum adalah -1 juga. Terlihat bahwa

$$\begin{aligned} \max_i \min_j (a_{ij}) &= \min_j \max_i (a_{ij}) \\ &= -1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Jadi permainan tersebut dapat diselesaikan dengan strategi murni, yaitu:

- strategi optimum bagi pemain P_1 adalah $i = 2$, dan

- strategi optimum bagi pemain P_2 adalah $j = 3$, dengan

- nilai permainan sebesar -1, yang artinya pemain P_2 memenangkan permainan sebesar 1 (pemain P_1 harus membayar sebesar 1 kepada P_2)

Definisi 2.1.1. Misalkan $f(x, y)$ merupakan fungsi bernilai real dari dua vektor $x \in E_n$ dan $y \in E_m$ dengan E_n dan E_m masing-masing merupakan ruang euclid berdimensi n dan m. Suatu titik $(x_0, y_0), x_0 \in E_n$ dan $y_0 \in E_m$ merupakan suatu titik pelana dari $f(x, y)$ jika $f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y)$

Teorema 2.1.1. Diberikan $f(x, y)$ sedemikian sehingga $\max_x \min_y f(x, y)$ dan $\min_y \max_x f(x, y)$ keduanya ada. Syarat perlu dan syarat cukup untuk keberadaan suatu titik pelana (x_0, y_o) dari $f(x, y)$ adalah bahwa $f(x_0, y_0) = \max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y)$

Bukti:

- Syarat Perlu. Akan dibuktikan jika (x_0, y_0) merupakan titik pelana dari $f(x, y)$ maka $f(x_0, y_0) = \max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y)$. Karena dari definisi, $f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$ untuk semua $x \in E_n$, maka:

$$\max_x f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \tag{2.3}$$

tetapi,

$$\min_y [\max_x f(x, y)] \leq \max_x f(x, y_0) \tag{2.4}$$

Dengan demikian dari persamaan (2.3) dan (2.4) diperoleh bahwa:

$$\begin{aligned} \min_y [\max_x f(x, y)] &\leq \max_x f(x, y_0) \\ &\leq f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa:

$$\min_y[\max_x f(x_0, y)] \leq f(x_0, y_0) \tag{2.5}$$

Menurut definisi, $f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y)$ untuk semua $y \in E_0$ maka:

$$f(x_0, y_0) \leq \min_y f(x_0, y) \tag{2.6}$$

tetapi,

$$\min_y f(x_0, y) \leq \max_x[\min_y f(x, y)] \tag{2.7}$$

Dengan demikian dari (2.6) dan (2.7) dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &\leq \min_y f(x_0, y) \\ &\leq \max_x[\min_y f(x, y)] \end{aligned}$$

Dengan demikian dari (2.5) dan (2.8) dapat disimpulkan bahwa

$$\min_y \max_x f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \leq \max_x \min_y f(x, y) \tag{2.8}$$

Akan tetapi, menurut teorema minimax

$$\max_x \min_y f(x, y) \leq \min_y \max_x f(x, y) \tag{2.9}$$

Berdasarkan persamaan (2.8) dan (2.9) dapat disimpulkan bahwa

$$f(x_0, y_0) = \max_x[\min_y f(x, y)] = \min_y[\max_x f(x, y)] \tag{2.10}$$

- Syarat Cukup. Akan dibuktikan jika $f(x_0, y_0) = \max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y)$ maka (x_0, y_0) merupakan titik pelana dari $f(x, y)$.

  Pandang bahwa maksimum dari $\min_y f(x, y)$ terjadi pada x_0 dan minimum dari $\max_x f(x, y)$ terjadi pada y_0.

  Karena $f(x_0, y_0) = \max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y)$ maka:

$$\min_y f(x_0, y) = \max_x f(x, y_0) \tag{2.11}$$

  Tetapi menurut definisi minimum, $\min_y f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0)$. Maka diperoleh

$$\min_y f(x_0, y) = \max_x f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \tag{2.12}$$

  Sehingga

$$\max_x f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$$

  yang berarti bahwa

$$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \qquad \forall x \in E_n \tag{2.13}$$

  Menurut definisi maksimum, $\max_x f(x_0, y_0) \geq f(x_0, y_0)$. Maka diperoleh $\max_x f(x, y_0) = \min_y f(x_0, y) \geq f(x_0, y_0)$, yang berarti bahwa

$$f(x_0, y) \geq f(x_0, y_0) \qquad \forall y \in E_m \tag{2.14}$$

  Dari persamaan (2.13) dan (2.14) dapat disimpulkan bahwa

$$f(x_0, y) \geq f(x_0, y_0) \geq f(x, y_0) \tag{2.15}$$

Ini berarti menurut definisi di atas dapat disimpulkan (x_0, y_0) merupakan titik pelana dari $f(x, y)$.

2.1.4 Permainan dengan Strategi Campuran

Jika dalam suatu permainan tidak dapat diselesaikan dengan strategi murni karena dalam permainan tersebut tidak diperoleh titik pelana, maka pemain dapat melakukan strategi campuran. Hal ini berarti pemain pertama akan memainkan setiap strategi baris dengan proporsi waktu (probabilitas) tertentu. Oleh karena itu dalam suatu permainan yang diselesaikan dalam strategi campuran, strategi dari setiap pemain akan mempunyai probabilitas yang menunjukkan proporsi waktu (probabilitas) atau banyaknya bagian yang dipergunakan untuk melakukan strategi tersebut. Jadi tugas setiap pemain adalah menentukan proporsi waktu (probabilitas) yang diperlukan untuk memainkan strateginya.

Agar lebih jelas dapat diperhatikan ilustrasi permainan matriks pembayaran 2×2 berikut:

		Pemain P_2	
		j	
Pemain P_1		1	2
i	1	1	5
	2	6	3

Matriks pembayaran dari permainan berjumlah nol dari dua orang diatas tidak mempunyai titik pelana, sehingga strategi murni tidak dapat digunakan. Dengan demikian tugas para pemain adalah menentukan proporsi waktu (probabilitas) yang diperlukan untuk memainkan strategi pada baris bagi pemain P_1 dan strategi kolom bagi pemain P_2.

- Bagi pemain P_1 Misalnya x, dengan $0 \leq x \leq 1$ adalah proporsi waktu (probabilitas) yang diperlukan untuk memainkan strategi pada baris pertama maka proporsi waktu (probabilitas) yang diperlukan untuk memainkan strategi pada baris kedua adalah $1 - x$, sehingga jumlah semua proporsi waktu yang diperlukan untuk memainkan strateginya adalah $x + 1 - x = 1$.

- Bagi pemain P_2 Misalnya y, dengan $0 \leq y \leq 1$ adalah proporsi waktu (probabilitas) yang diperlukan untuk memainkan strategi kolom kedua adalah $1 - y$, sehingga jumlah proporsi waktu yang diperlukan untuk memainkan strateginya adalah $y + 1 - y = 1$.

Perhatikan tabel berikut:

			P_2	
			y	1-y
		j	1	2
		i		
P_1	x	1	1	5
	1-x	2	6	3

Tabel 2.5: Matriks Pembayaran

Dengan demikian tugas dari masing-masing pemain adalah menentukan besarnya pecahan yang tidak diketahui x dan y di mana pemain pertama menginginkan untuk memainkan strategi yang akan memaksimumkan kemenangannya (atau meminimumkan kekalahannya) tanpa memperhatikan langkah yang dilakukan oleh pihak lawan (pesaing), yaitu pemain kedua. Secara logika pemain pertama ingin membagi permainannya di antara baris-barisnya sedemikian rupa sehingga kemenangan atau kekalahan harapannya (*expected*) disaat pemain kedua memainkan kolom pertama akan sama dengan kemenangan atau kekalahan harapannya disaat pemain kedua memainkan kolom kedua. Sudah tentu pemain kedua (yang diasumsikan memiliki kecerdasan yang sama dengan pemain pertama) akan mengikuti langkah yang serupa di dalam perhitungan proporsi waktu yang diperlukan untuk setiap kolomnya yang dilakukan oleh pemain pertama, yaitu pemain kedua akan membagi waktu bermainnya di antara kolom-kolomnya. Sehingga kemenangan atau kekalahan harapannya (*expected*) disaat pemain pertama memainkan baris kesatu akan sama dengan kemenangan atau kekalahannya disaat pemain pertama memainkan baris kedua.

Penyelesaian strategi campuran pada matriks *payoff* pada tabel 2.5 adalah:

- Bagi pemain P_1 agar dapat mencapai strategi optimum maka perlu menyamakan kemenangan harapan yang diperoleh ketika pemain P_2 memainkan strategi ke 1 yaitu $[5x + (1 - x)]$ dengan kemenagan harapan yang diperoleh ketika pemain P_2 memainkan strategi ke 2 yaitu $[3x + 4(1 - x)]$. Dengan demikian berarti bahwa:

$$\begin{aligned} 5x + (1 - x) &= 3x + 4(1 - x) \\ 5x - x - 3x + 4x &= 4 - 1 \\ 5x &= 3 \\ x &= \frac{3}{5} = x_1^* \end{aligned}$$

  karena $x_2^* = 1 - x$ maka $x_2^* = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Jadi strategi optimum bagi pemain

P_1 dicapai bila ia menggunakan $\frac{3}{5}$ waktunya untuk memainkan strategi ke 1 (baris ke 1) dan $\frac{2}{5}$ waktunya untuk memainkan strategi ke 2 (baris ke 2). Jadi strategi optimum bagi pemain P_1 adalah $X^* = \left[\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right]$

- Bagi pemain P_2 agar dapat mencapai strategi optimum ia perlu menyamakan kekalahan harapan yang dideritanya ketika pemain P_1 memainkan strategi ke 1 yaitu $[5y + 3(1 - y)]$ dengan kekalahan yang diderita ketika pemain P_1 memainkan strategi ke 2 yaitu $[y + 4(1 - y)]$. Dengan demikian berarti bahwa:

$$\begin{aligned} 5y + 3(1 - y) &= y + 4(1 - y) \\ 5y - 3y - y + 4y &= 4 - 3 \\ 5y &= 1 \\ y &= \frac{1}{5} = y_1^* \end{aligned}$$

karena $y_2^* = 1 - y$ maka $y_2^* = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Jadi strategi campuran optimum bagi pemain P_2 dicapai bila ia menggunakan $\frac{1}{5}$ waktunya untuk memainkan strategi ke 1 (kolom ke 1) dan $\frac{4}{5}$ waktunya untuk memainkan strategi ke 2 (kolom ke 2). Jadi strategi optimum bagi pemain P_2 adalah $Y^* = \left[\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right]$

Kemenangan harapan bagi pemain P_1 adalah:

$$\begin{aligned} v^* &= \frac{1}{5}\left[5\left(\frac{3}{5}\right) + 1\left(\frac{2}{5}\right)\right] + \frac{4}{5}\left[3\left(\frac{3}{5}\right) + 4\left(\frac{2}{5}\right)\right] \\ &= \frac{1}{25}\left[15 + 2 + 36 + 32\right] \\ &= \frac{85}{25} \\ &= \frac{17}{5} \end{aligned}$$

Hal ini berarti bahwa bila pemain P_1 bermain dengan menggunakan strategi optimumnya, maka ia mendapatkan kemenangan harapan sebesar $\frac{17}{5}$ per permainan. Jika dipandang dari segi pemain P_2 maka kekalahan harapannya adalah:

$$\begin{aligned} v^* &= \frac{3}{5}\left[5\left(\frac{1}{5}\right)+3\left(\frac{4}{5}\right)\right]+\frac{2}{5}\left[1\left(\frac{1}{5}\right)+4\left(\frac{4}{5}\right)\right] \\ &= \frac{1}{25}\left[15+36+2+32\right] \\ &= \frac{85}{25} \\ &= \frac{17}{5} \end{aligned}$$

Karena nilai permainan bertanda positif maka pemain P_1 dinyatakan sebagai pemenang dengan kemenangan harapan sebesar $\frac{17}{5}$.

Definisi 2.1.2. Vektor $X = [x_i]; i = 1, 2, 3, \cdots, m$ dari bilangan tak negatif x_i sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ didefinisikan sebagai strategi campuran bagi pemain P_i.

Vektor $Y = [y_i]; j = 1, 2, 3, \cdots, n$ dari bilangan tak negatif y_j sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$ didefinisikan sebagai strategi campuran bagi pemain P_2

Bila $(m-1)$ komponen dari $X = [x_1, x_2, \cdots, x_m]$ berharga nol yang berarti bahwa hanya ada satu komponen yang berharga satu maka dinamakan strategi murni bagi pemain P_1. Misalnya strategi optimum bagi pemain P_1, yaitu $X = [0, 0, 1, 0, 0, 0]$ begitu juga bila $(n-1)$ komponen dari $Y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$ berharga nol yang berarti hanya ada satu komponen yang berharga satu. Oleh sebab itu dinamakan strategi murni bagi pemain P_2. Misalnya $Y = [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]$.

Definisi 2.1.3. Nilai matematis atau fungsi pembayaran $E(X, Y)$ bagi pemain pertama P_1 dengan matriks pembayaran $A(x_{rj})$ didefinisikan sebagai:

$$E(X,Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = XAY$$

dimana $X = [x_1, x_2, \cdots, x_m]$ adalah vektor baris yang merupakan strategi campuran bagi pemain P_1 dan $Y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$ adalah vektor kolom yang merupakan strategi campuran bagi pemain P_2

Definisi 2.1.4. Jika $\max_x \min_y E(x,y) = \min_y \max_x E(x,y) = E[x_0, y_0]$, maka (X_0, Y_0) didefinisikan sebagai strategi murni dari permainan itu dengan X_0 sebagai strategi optimum bagi pemain P_1 dan Y_0 sebagai strategi optimum bagi pemain P_2 dan $E(X_0, Y_0)$ merupakan nilai permainan.

Definisi 2.1.5. Jika $X^* = [x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*]$ merupakan strategi campuran optimum bagi pemain P_1 dan $Y^* = [y_1^*, y_2^*, \cdots, y_n^*]$ merupakan strategi campuran optimum bagi pemain P_2. Maka nilai permainan harapannya adalah:

$$\begin{aligned} V^* &= E(X^*, Y^*) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i^* a_{ij} y_j^* \\ &= X^* A Y^* \end{aligned} \tag{2.16}$$

dengan $X^* = [x_i^*]; i = 1, 2, 3, \cdots, m$ merupakan vektor baris dan $Y^* = [y_j^*]; j = 1, 2, 3, \cdots, n$ merupakan vektor kolom

Contoh 2.1.4. Diberikan matriks pembayaran berikut ini:

		Pemain P_2	
		j	
Pemain P_1		1	2
i	1	1	6
	2	2	-7
	3	-3	8

Jelas bahwa tabel tersebut tidak dapat diselesaikan dengan strategi murni karena tidak adanya titik pelana. Dimisalkan pemain P_1 memilih strategi campuran $X = (x_1, x_2, x_3)$ dan pemain P_2 memilih strategi campuran $Y = (y_1, y_2)$. Fungsi pembayaran untuk pemain P_1 adalah:

$$\begin{aligned} E(X,Y) &= XAY \\ &= [x_1, x_2, x_3] \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -7 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \binom{y_1}{y_2} \\ &= (x_1 + 2x_2 - 3x_3 6x_1 - 7x_2 + 8x_3) \binom{y_1}{y_2} \\ &= y_1 (x_1 + 2x_2 - 3x_3) + y_2 (6x_1 - 7x_2 + 8x_3) \end{aligned}$$

Misalkan bahwa $X = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$, dan $Y = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ maka:

$$\begin{aligned} E(X,Y) &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{2}\right] + \frac{3}{4}\left[2 - \frac{7}{6} + 4\right] \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{29}{8} \\ &= \frac{27}{8} \end{aligned}$$

Nilai harapan bagi pemain P_1 sebesar $\frac{27}{8}$, yang berarti bahwa secara rata-rata per permainan pemain P_1 akan memperoleh pemainan sebesar $\frac{27}{8}$.

Aturan Dominasi

Sebelum menyelesaikan suatu permainan, perlu dipertimbangkan apakah ada baris atau kolom dalam matriks pembayarannya yanng tidak efektif pengaruhnya di dalam penentuan strategi optimum dan nilai permainan. Bila ada maka baris atau kolom yang seperti itu bisa dihapus atau tidak dipakai. Hal itu berarti probabilitas untuk memilih strategi sesuai baris atau kolom tersebut sama dengan nol. Dengan demikian ukuran matriks pembayaran yang tersisa akan lebih kecil. Hal ini akan lebih mempermudah untuk menyelesaikannya. Aturan demikian ini dinamakan aturan dominasi.

1. Untuk pemain pertama P_1

   Bila terdapat suatu baris dengan semua elemen dari baris tersebut adalah sama (sekolom) dari baris yang lain maka baris tersebut dikatakan didominasi dan baris itu telah dihapus.

2. Untuk pemain kedua P_2

   Bila terdapat suatu kolom dengan semua elemen dari kolom tersebut adalah sama atau lebih besar dari elemen dalam posisi yang sama (sebaris) dari kolom yang lain maka kolom tersebut dikatakan didominasi dan kolom itu dapat dihapus.

2.1.5 Permainan dengan Informasi Tak Lengkap

Dalam permainan dengan informasi lengkap strategi dari masing-masing pemain diketahui, namun tidak dalam permainan dengan informasi tak lengkap.

Dalam permainan dengan informasi tak lengkap, strategi tidak diketahui oleh pemain lainnya. Permainan dengan informasi tak lengkap atau yang sering disebut juga sebagai permainan bayes adalah model interaksi pengambilan keputusan di mana seorang pemain hanya memiliki sebagian informasi tentang pemain lainnya (Zamir, 2009). Contoh umum dalam permainan ini adalah lelang. Pada setiap lelang, umumnya penjual tidak mengetahui bagaimana *bidder* bersedia membayar barang yang akan dijualnya. Masing-masing (*bidder*) mengetahui nilai (*value*) barang yang akan dilelang, tetapi tidak mengetahui *value* yang akan diberikan oleh lawannya. Unsur-unsur dalam permainan bayes adalah:

1. Pemain

   Dimisalkan terdapat K pemain, $K = 1, 2, \cdots, K; \quad K \in N$

2. Aksi *(action)*

   Merupakan strategi yang dipilih oleh tiap pemain.

3. Pembayaran *(Payoff)*

   Merupakan fungsi pembayaran $u_i(a, \omega)$ yang tergantung pada profil aksi dan kondisi dalam suatu permainan. Dalam model duopoli cournot, payoff untuk kedua pemain merupakan fungsi laba.

4. Informasi *(information)*

   Informasi didefinisikan sebagai pengetahuan yang dimiliki oleh pemain di saat mengambil suatu keputusan. Informasi pemain i untuk $i = 1, 2 \cdots K$ diberikan oleh tipe fungsi $\tau_i : \Omega \to T_i$, dimana T_i dinotasikan sebagai ruang tipenya.

5. Keyakinan *(beliefs)*

   Merupakan probabilitas dari strategi yang dipilih oleh tiap-tiap pemain. $\mu = \mu(t)$ dimana $0 < \mu(t) < 1$ dan $\sum_{t \in T} \mu(t) = 1$. Probabilitas bahwa tipe i adalah t_i yang didefinisikan oleh $\mu_i(t_i) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \mu(t_i, t_{-i})$. Probabilitas kondisi t yang diberikan tipe i adalah t_i adalah $\mu(t|t_i)$. Aturan bayes mengakibatkan $\mu(t|t_i) = \frac{\mu(t)}{\mu_i(t_i)}$

Definisi 2.1.6. Didefinisikan suatu permainan bayes

$$G = ((\Omega, \mu), (A_i, u_i, T_i, \tau_i)_{i \in K})$$

Dimisalkan pula $A = A_1 \times \cdots \times A_K$ dan $T = T_1 \times \cdots \times T_K$ yang merupakan notasi untuk himpunan aksi profil dan tipe profil. Maka $\tau : \Omega \to T$ didefinisikan oleh $(\tau(\omega), \cdots, \tau_K(\omega))$

Definisi 2.1.7. Strategi bayes murni untuk pemain i adalah fungsi $s_i : T_i \to A_i$, dimana $s_i(t_i)$ merupakan aksi yang diambil oleh pemain i pada saat ia merealisasikan t_i. Dimisalkan $S = s_i \times \cdots \times s_K$ dinotasikan sebagai himpunan profil dari strategi bayes dan untuk setiap tipe profil $t \in T$, maka dimisalkan pula $s(t) = (s_1(t_i), \cdots, s_K(t_K))$ dinotasikan sebagai profil aksi sebelumnya yang dideskripsikan oleh strategi profil s.

Definisi 2.1.8. Strategi bayes campuran untuk pemain i adalah fungsi $\sigma_i : T_i \to \Delta A_i$ yang merupakan probabilitas aksi *(action)* untuk masing-masing tipe t_i, dimana $\sigma_i(a_i|t_i)$ merupakan probabilitas pemain i memilih aksi a_i pada saat tipe t_i. Dimisalkan $\sum = \sum_i \times \cdots \times \sum_k$ dinotasikan himpunan profil strategi bayes untuk setiap tipe profil $t \in T$ dan $\sigma(t) = (\sigma_1(t_1), \cdots, \sigma_K(t_K))$ dinotasikan sebagai profil aksi yang dideskripsikan oleh strategi profil σ.

Definisi 2.1.9. Diberikan profil strategi σ_{-i} untuk pemain lain, akan didefinisikan pembayaran (*payoff*) untuk pemain i sebagai berikut:
untuk setiap tindakan a_i, jika A_{-i} tak hingga maka didefinisikan:

$$\begin{aligned} U_i(a_i, \sigma_{-i}|\omega) &= E_{\sigma_{-i}}(\cdot|\tau_{-i}(\omega))\left[u(a_i, \sigma_{-i}, \omega)\right] \\ &= \sum_{a_{-i}\in A_{-i}} u(a_i, \sigma_{-i}, \omega)\sigma_{-i}(a_i|\tau_{-i}(\omega)) \end{aligned}$$

menjadi pembayaran (*payoff*) untuk pemain i dalam kondisi ω.

Selanjutnya, dengan mengacu harapan kondisi payoffnya pada $\tau_i = t_i$, maka payoff yang dihasilkan dari aksi (*action*) a_i, tipe t_i dan jika Ω tertentu, maka:

$$\begin{aligned} U_i(a_i, \sigma_{-i}|t_i) &= E_\mu\left[U_i(a_i, \sigma_{-i}, \omega)|\tau_i = t_i\right] \\ &= \frac{\sum_{\omega\in\tau_i^{-1}(t_i)} U_i(a_i, \sigma_{-i}, \omega)\mu(\omega)}{\sum_{\omega\in\tau_i^{-1}(t_i)} \mu(\omega)} \end{aligned} \tag{2.17}$$

untuk strategi $\sigma_i \in \sum_i$, jika A_i tak hingga maka:

$$\begin{aligned} U_i((\sigma(\cdot|t_i), \sigma_{-i}), t_i) &= E_{\sigma_i(\cdot|t_{-i})}\left[U(a_i, \sigma_i, t_i)\right] \\ &= \sum_{a_i\in A_i} U(a_i, \sigma_{-i}, t_i)\sigma_i(a_i|ti) \end{aligned}$$

yang merupakan payoff harapannya pada tipe t_i

Definisi 2.1.10. Dimisalkan untuk setiap $a_i^{'} \in A_i$,

$$BR_i(\sigma_{-i}|t_i) = \Big\{a_i \in A_i : U_i(a_i, \sigma_{-i}, t_i) \geq U_i(a_i^{'}, \sigma_{-i}, t_i)\Big\}$$

yang dinotasikan sebagai himpunan respon terbaik untuk pemain i pada tipe t_i, maka $\sigma_i(\cdot|t_i)$ merupakan respon terbaik untuk pemain tipe i jika dan hanya jika $\sigma_i(a_i|t_i) > 0$ yang mengakibatkan $a_i \in BR_i(\sigma_{-i}|t_i)$.

Profil strategi bayes σ adalah keseimbangan bayes (*bayesian equilibrium*) jika masing-masing $(\sigma_{-i}|t_i)$ merupakan respon terbaik terhadap σ_{-i}, sehingga untuk masing-masing pemain i, untuk setiap $a_i \in A_i$ dan semua $t_i \in T_i$,

$$U_i(\sigma_i(\cdot|t_i), \sigma_{-i}, t_i) \geq U_i(a_i, \sigma_{-i}, t_i)$$

Jika masing-masing $\hat{\mu} > 0$ maka setiap keseimbangan bayes juga merupakan keseimbangan nash dalam permainan strategi $(\sum_i, U_i)_{i\in K}$, dimana fungsi payoff $U_i : \sum \rightarrow \Re$ dan jika A_i hingga untuk masing-masing pemain yang didefinisikan:

$$\begin{aligned} U_i &= E_\mu\left[U_i((\sigma(\cdot|\tau_i), \sigma_{-i}, \tau_i)\right] \\ &= \sum_{t_i \in T_i} U_i((\sigma(\cdot|t_i), \sigma_{-i}), t_i)\hat{\mu}(t_i) \end{aligned}$$

2.2 Struktur Pasar

Pasar adalah suatu institusi atau badan yang menjalankan aktivitas jual beli barang-barang dan atau jasa-jasa (Sugiarto, dkk 2005). Pengertian pasar dibatasi oleh komoditas yang homogen, sehingga dijumpai banyak sekali pasar, seperti pasar emas, pasar valuta asing, pasar wesel luar negeri, pasar tekstil dan sebagainya. Berdasarkan sifat dan bentuknya, pasar dapat diklasifikasikan menjadi dua macam yaitu pasar dengan persaingan sempurna (*perfect competitive market*) dan pasar dengan persaingan tak sempurna(*imperfect competitive market*). Jenis-jenis pasar yang termasuk golongan pasar dengan persaingan tak sempurna antara lain adalah pasar monopoli (*monopoly*), persaingan monopolistik (*monopolistic competition*), dan oligopoli (*oligopoly*).

2.2.1 Pasar Persaingan Sempurna

Suatu pasar disebut sebagai pasar persaingan sempurna, jika:

1. Terdapat sejumlah besar penjual dan pembeli komoditi, sehingga tindakan seorang individu tidak dapat mempengaruhi harga komoditi tersebut.
2. Produk yang dijual adalah homogen.
3. Terdapat mobilitas sumber daya yang sempurna.
4. Konsumen, pemilik sumber daya dan perusahaan dalam pasar mempunyai pengetahuan yang sempurna mengenai harga-harga dan biaya-biaya yang sekarang dan yang akan datang.

Dalam pasar persaingan sempurna, harga komoditi hanya ditentukan oleh perpotongan antara kurva permintaan dan kurva penawaran pasar. Dengan demikian, perusahaan dalam persaingan sempurna merupakan ”penerima harga” (*price taker*) dan dapat menjual setiap jumlah komoditi pada harga yang telah ditetapkan.

2.2.2 Pasar Persaingan Tak Sempurna

Pasar Monopoli

Pasar monopoli dibedakan menjadi bentuk pasar monopoli murni dan pasar mendekati monopoli (*near monopoly*). Pasar monopoli murni adalah pasar dengan pengusaha tunggal, sehingga tidak dimungkinkan terjadinya substitusi yang sempurna terhadap komoditas yang ditawarkan oleh pengusaha monopoli (*monopolis*). Dengan demikian monopolis tersebut tidak memiliki pesaing. Contoh pasar monopoli di Indonesia adalah PLN, PAM, PT Kereta Api, dan lain sebagainya. Pasar yang mendekati monopoli (*near monopoly*) adalah suatu pasar yang hanya terdiri dari satu orang pengusaha (*single producer*) atau satu perusahaan dalam suatu lokasi tertentu (daerah yang membatasi wilayah penjualan komoditas, misalnya satu kecamatan, satu kabupaten, satu negara).

Pasar Persaingan Monopolistis

Pasar persaingan monopolistik didefinisikan sebagai pasar dengan banyak produsen yang menghasilkan komoditas yang berbeda karakteristik (*differentiated product*). Pasar persaingan monopolistik lebih mendekati struktur pasar persaingan sempurna (dicirikan dengan banyak perusahaan yang berpartisipasi di pasar, tanpa batasan masuk industri yang serius) tetapi perusahaan-perusahaan yang berkiprah di pasar tersebut menghasilkan komoditas yang berbeda karakteristik.

Oligopoli

Pasar oligopoli adalah pasar yang terdiri dari beberapa produsen yang menghasilkan seluruh atau sebagian besar total output di pasar (Sugiarto, dkk 2005). Pasar oligopoli lebih menyerupai pasar monopoli murni yang dicirikan oleh sejumlah kecil perusahaan - perusahaan besar yang menghasilkan komoditas homogen seperti baja atau komoditas yang berbeda corak seperti mobil. Dalam hal ini banyaknya pesaing dari suatu perusahaan merupakan karakteristik yang membedakan pasar ini dengan berbagai jenis pasar yang lain. Ada kalanya pasar oligopoli terdiri dari dua produsen saja yang dikenal dengan pasar duopoli.

Dalam pasar oligopoli tidak terdapat keseragaman sifat-sifat perusahaan dalam berbagai industri. Kelakuan perusahaan-perusahaan dalam pasar oligopoli akan sangat berbeda jika dalam pasar hanya terdapat tiga perusahaan, dibandingkan jika dalam pasar terdapat lima belas perusahaan. Bila di pasar hanya dijumpai sejumlah kecil pesaing, keputusan pemasaran dari suatu perusahaan akan berdampak langsung dan dapat dirasakan oleh perusahaan lainnya karena perusahaan-perusahaan yang berada dalam pasar oligopoli mempunyai ketergantungan yang sangat kuat satu sama lainnya. Karakteristik pasar oligopoli yang demikian ini membuat analisis pasar menjadi lebih pelik. Jenis-jenis model oligopoli adalah oligopoli sweezy, oligopoli cournot, oligopoli bertrand dan oligopoli stackelberg. Dalam oligopoli sweezy setiap perusahaan berkeyakinan apabila satu perusahaan menurunkan harga maka akan diikuti oleh perusahaan lainnya, namun tidak demikian halnya jika harga dinaikkan. Dalam model bertrand, perusahaan bersaing dalam harga dan bereaksi secara optimal terhadap harga dari pesaingnya. Dalam model Stackelberg, satu dari perusahaan (yang bertindak sebagai leader) berinisiatif terlebih dahulu memilih jumlah output yang akan dihasilkan sebelum perusahaan-perusahaan lainnya memilih. Sedangkan pada model cournot setiap perusahaan berkeyakinan bahwa jika ia mengubah jumlah outputnya maka perusahaan lain tidak akan mengubahnya.

Oligopoli Cournot merupakan model pasar oligopoli yang pertama diperkenalkan oleh oleh Augustin Cournot seorang ahli ekonomi berkebangsaan Prancis pada tahun 1838. Aturan dasar untuk model Cournot adalah dalam suatu industri terdapat jumlah perusahaan yang tetap, yaitu n perusahaan. Tidak ada perusahaan yang baru masuk ataupun keluar meskipun terdapat perusahaan yang mungkin memilih untuk tidak berproduksi. Asumsi utama dari model ini adalah bahwa jika sebuah perusahaan telah menentukan tingkat produksinya, maka perusahaan tersebut tidak akan mengubahnya. Atas dasar asumsi inilah perusahaan pesaingnya akan meningkatkan tingkat produksinya.

Model duopoli adalah model yang sederhana untuk menjelaskan mengenai model cournot. Duopoli adalah keadaan khusus di mana dalam pasar oligopoli hanya ada dua perusahaan. Model ini dikembangkan untuk melihat lebih tajam interaksi antar perusahaan dalam pasar oligopoli (Rahardja dan Manurung, 2003). Dalam pasar duopoli hanya terdapat dua perusahaan yang menjual produk yang homogen. Harga pasar ditentukan oleh keseimbangan antara jumlah total otput yang dihasilkan oleh dua perusahaan dengan permintaan pasar.

Masing-masing duopolis (perusahaan yang beroperasi dalam pasar duopoli) mempunyai daya monopoli yang sama. Keputusan jumlah output yang diproduksi duopolis berdasarkan asumsi bahwa output duopolis yang satu (saingannya) sudah diputuskan dan tidak akan berubah.

Contoh 2.2.1. Di suatu desa nelayan yang jauh dari kota, terdapat dua perusahaan yang bergerak di bidang penangkapan dan penjualan ikan. Tiap perusahaan memiliki satu kapal untuk menangkap ikan. Masing-masing perusahaan berangkat pada pukul 03.00 untuk menangkap ikan yang akan dijual pada hari ini dan kembali pada pukul 09.00. Nakhoda kapal mengetahui dengan pasti banyak ikan yang akan diperoleh. Hasil tangkapan tergantung dari tiga hal: kapal yang digunakan, jumlah awak kapal, dan waktu penangkapan. Informasi ini menghasilkan fungsi biaya untuk perusahaan pertama $C_1 = 6000 + 16q_1$ dan fungsi biaya perusahaan kedua $C_2 = 9000 + 10q_2$ dengan q adalah jumlah tangkapan atau jumlah output. Setiap perusahaan beranggapan bahwa output yang dipilih lawannya pada saat ini akan sama dengan sebelumnya dan kedua perusahaan memaksimumkan saat ini. Ketika akan berlayar masing-masing perusahaan telah memutuskan jumlah ikan yang ditangkap. Jika setiap perusahaan mengetahui fungsi permintaan pasar, yaitu $P = 100 - 0.1Q = 100 - 0.1(q_1 + q_2)$. Fungsi laba untuk kedua perusahaan adalah:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= q_1 P - C_1 \\
&= q_1(100 - 0.1(q_1 + q_2)) - (600 + 16q_1) \\
&= 100q_1 - 0.1q_1(q_1 + q_2) - 6000 - 16q_1 \\
&= 84q_1 - 0.1q_1^2 - 0.1q_1q_2 - 6000
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\pi_2 &= q_2 P - C_2 \\
&= q_2(100 - 0.1(q_1 + q_2)) - (9000 + 10q_1) \\
&= 100q_1 - 0.1q_1(q_1 + q_2) - 9000 - 10q_1 \\
&= 90q_1 - 0.1q_2^2 - 0.1q_1q_2 - 9000
\end{aligned}$$

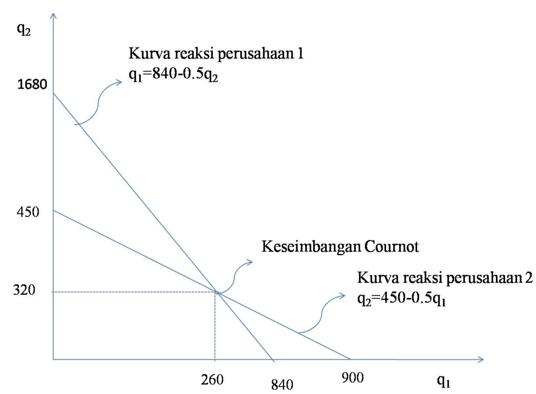
Output kesetimbangan diperoleh jika MR (*Marjinal Revenue*) $= 0$ atau $\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 0$, maka:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} &= 84 - 0.2q_1 - 0.1q_2 \\
0 &= 84 - 0.2q_1 - 0.1q_2 \\
q_1 &= 42 - 0.5q_2 \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} &= 90 - 0.2q_2 - 0.1q_1 \\ 0 &= 90 - 0.2q_2 - 0.1q_1 \\ q_2 &= 45 - 0.5q_1 \end{aligned} \tag{2.19}$$

dimana persamaan (2.18) merupakan fungsi reaksi perusahaan 1 dan persamaan (2.19) reaksi perusahaan 2. Dari kedua persamaan tersebut diperoleh $q_1 = 260$ dan $q_2 = 320$ yang merupakan output masing-masing perusahaan pada keseimbangan cournot, kedua kurva reaksi dapat digambarkan dalam diagram berikut:



Gambar 2.1: Model Keseimbangan Cournot (*Cournot Equilibrium Model*)

Sehingga harga keseimbangan diperoleh

$$\begin{aligned} P &= 100 - 0.1(q_1 + q_2) \\ &= 100 - 0.1(260 + 320) \\ &= 100 - 58 \\ &= 42 \end{aligned}$$

jadi keuntungan maksimum yang diperoleh masing-masing perusahaan adalah

$$\pi_1 = q_1 P - C_1 = 260(42) - (6000 + 16(260)) = 10920 - 10160 = 760$$

$$\pi_2 = q_2 P - C_2 = 320(42) - (9000 + 10(320)) = 13440 - 12200 = 1240$$

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Duopoli Cournot pada Teori Permainan Bayes dalam Teori Permainan

Permainan dengan informasi tak lengkap atau yang sering disebut juga sebagai permainan bayes adalah model interaksi pengambilan keputusan di mana seorang pemain hanya memiliki sebagian informasi tentang pemain lainnya (Shmuel Zamir, 2009). Informasi dalam hal ini misalnya fungsi payoff, strategi yang tersedia, informasi lain yang dimiliki lawannya dan sebagainya, sehingga mempengaruhi fungsi payoff pemain lainnya.

Penerapan permainan bayes salah satunya adalah model duopoli cournot, dimana terdapat dua perusahaan yang terlibat dalam permainan dan output produksi satu perusahaan mempengaruhi output produksi perusahaan lainnya. Masing-masing perusahaan harus menentukan bagaimana ia berproduksi. Secara sederhana mereka dapat menentukan apakah memproduksi dengan output rendah (q_L) atau tinggi (q_H) sehingga mengakibatkan:

1. Jika kedua perusahaan sama-sama menentukan output tinggi (q_H) maka output total (Q) juga tinggi maka harga (P) akan rendah. Dengan demikian laba kedua perusahaan akan sama-sama rendah.

2. Jika perusahaan 1 memproduksi output tinggi (q_H^1) dan perusahaan 2 mem-

produksi output rendah (q_L^2), output total Q akan medium dan harga P juga medium sehingga perusahaan 1 akan memperoleh laba tinggi dan perusahaan 2 mendapat laba rendah. Demikian sebaliknya, jika perusahaan 2 memproduksi output tinggi (q_H^2) dan perusahaan 1 memproduksi output rendah (q_L^1) maka perusahaan 2 akan memperoleh laba tinggi dan perusahaan 1 mendapat laba rendah.

3. Jika kedua perusahaan sama-sama memutuskan output rendah (q_L) maka output total (Q) akan rendah dan harga (P) akan tinggi. Dengan demikian laba kedua perusahaan akan sama-sama tinggi.

Dalam permainan duopoli cournot dengan informasi tak lengkap masing-masing perusahaan tidak mengetahui informasi mengenai perusahaan pesaingnya seperti jumlah pekerja, jumlah bahan baku produksi dan sebagainya. Masing-masing hanya mengetahui biaya marjinalnya sendiri, yaitu kemungkinan rendah (L) atau tinggi (H). Akan tetapi mereka tidak mengetahui biaya pemain lainnya. Dimisalkan $0 \leq c_L < c_H < 1$. Seorang pemain memiliki tipe rendah (L) jika ia memiliki biaya marjinal yang rendah yang dinotasikan c_L. Sebaliknya, tipe tinggi (H) jika biaya marjinalnya tinggi dan dinotasikan sebagai c_H. Informasi mengenai tipe inilah yang mempengaruhi probabilitas perusahaan lainnya dalam menentukan output maksimum agar memperoleh keuntungan yang maksimum pula.

Dimisalkan $\theta^1_{t_1 t_2} > 0$ dinotasikan sebagai probabilitas posterior pemain 1 pada tipe t_1 bahwa pemain lainnya memiliki tipe t_2, demikian juga dengan $\theta^2_{t_1 t_2} > 0$ dinotasikan sebagai probabilitas posterior pemain 2 pada tipe t_2 bahwa pemain lainnya memiliki tipe t_1 untuk $t_n \in \{L, H\}$. Masing-masing tipe perusahaan dapat dilihat sebagai berikut:

			Pemain 2	
			{LL,HL}	{LH,HH}
			L	H
	{LL,LH}	L	LL	LH
Pemain 1	{HL,HH}	H	HL	HH

Gambar 3.1: Tipe Pemain

Berdasarkan tabel terlihat bahwa :

- a_{11}=LL yang berarti aksi yang dipilih jika tipe perusahaan 1 adalah L dan perusahaan 2 L.
- a_{21}=HL yang berarti aksi yang dipilih jika tipe perusahaan 1 adalah H dan perusahaan 2 L.
- a_{12}=LH yang berarti aksi yang dipilih jika tipe perusahaan 1 adalah L dan perusahaan 2 H.
- a_{22}=HH yang berarti aksi yang dipilih jika tipe perusahaan 1 adalah H dan perusahaan 2 H.

Diasumsikan fungsi permintaan untuk masing-masing pemain $j \in (1, 2)$ adalah fungsi linier, yaitu

$$P^j = max\left\{1 - q^j - \beta q^k, 0\right\} \tag{3.1}$$

dimana :

- q^j = output yang diproduksi oleh perusahaan j
- q^k = output produksi perusahaan k (perusahaan pesaingnya)

- P^j = harga untuk pemain ke-j

Parameter $\beta \in (0, 1]$ berbanding terbalik pada derajat diferensiasi produk. Diferensiasi produk adalah kegiatan memodifikasi produk agar menjadi lebih menarik. Ketika $\beta = 1$ produk merupakan substitusi sempurna (homogen), β terkecil menyatakan derajat terbesar dari diferensiasi produk.

Sama halnya dengan keseimbangan nash pada permainan lengkap, dimana keseimbangan nash didefinisikan sebagai suatu konsep solusi dari sebuah permainan dimana setiap pemain diasumsikan mengetahui strategi ekuilibrium yang sama dan diasumsikan pula tidak ada pemain yang mendapatkan keuntungan hanya dengan mengubah strategi sendiri secara sepihak, maka dalam permainan tak lengkap pada duopoli cournot terdapat pula keseimbangan nash yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3.1.1. Keseimbangan nash dalam permainan bayesian Cournot adalah profil strategi $(q_L^1, q_H^1, q_L^2, q_H^2)$ sedemikian sehingga untuk semua pemain $j \in (1, 2)$ dan semua tipe $t \in (L, H)$ output q_t^j memaksimalkan laba harapan pemain j pada kondisi keyakinan posteriornya ketika memilih tipe t.

Dimisalkan invers permintaan pada persamaan (3.1) merupakan fungsi linier dan

$$\begin{aligned} \pi_i &= TR - TC \\ &= p_i q_i - c_i q_i \end{aligned}$$

dimana:

- π_i = laba perusahaan i
- TR = penerimaan total yang diterima perusahaan (*total revenue*)

- TC = biaya yang dikeluarkan perusahaan (*total cost*)

maka payoff untuk masing-masing pemain adalah:

$$\begin{aligned} U_t^j(q_j, q_k) &= P_t^j q_t^j - c_t q_t^j \\ &= \left(1 - q_t^j - \beta q^k\right) q_t^j - c_t q_t^j \\ &= \left(1 - q_t^j - \beta q^k - c_t\right) q_t^j \end{aligned}$$

sehingga:

$$\begin{aligned} U_L^1(q_1, q_2) &= \left(1 - q_L^1 - \beta\left(\theta_{LL}^1 q_L^2 + \theta_{LH}^1 q_H^2\right) - c_L\right) q_L^1 \\ U_H^1(q_1, q_2) &= \left(1 - q_H^1 - \beta\left(\theta_{HL}^1 q_L^2 + \theta_{HH}^1 q_H^2\right) - c_H\right) q_H^1 \\ U_L^2(q_1, q_2) &= \left(1 - q_L^2 - \beta\left(\theta_{LL}^2 q_L^1 + \theta_{HL}^2 q_H^1\right) - c_L\right) q_L^2 \\ U_H^2(q_1, q_2) &= \left(1 - q_H^2 - \beta\left(\theta_{LH}^2 q_L^1 + \theta_{HH}^2 q_H^1\right) - c_H\right) q_H^2 \end{aligned}$$

payoff akan maksimum jika $\frac{dU_t^j(q_j, q_k)}{dq_j} = 0$, maka:

output perusahaan 1 dengan tipe L

$$\begin{aligned} \frac{dU_L^1(q^1, q^2)}{q_L^1} &= 1 - 2q_L^1 - \beta\left(\theta_{LL}^1 q_L^2 + \theta_{LH}^1 q_H^2\right) - c_L \\ 0 &= 1 - 2q_L^1 - \beta\left(\theta_{LL}^1 q_L^2 + \theta_{LH}^1 q_H^2\right) - c_L \\ 2q_L^1 &= 1 - c_L - \beta\left(\theta_{LL}^1 q_L^2 + \theta_{LH}^1 q_H^2\right) \\ q_L^1 &= \frac{1 - c_L - \beta\left(\theta_{LL}^1 q_L^2 + \theta_{LH}^1 q_H^2\right)}{2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

output perusahaan 1 dengan tipe H

$$\begin{aligned}
\frac{dU_H^1(q^1,q^2)}{q_H^1} &= 1-2q_H^1-\beta\left(\theta_{HL}^1 q_L^2+\theta_{HH}^1 q_H^2\right)-c_H \\
0 &= 1-2q_H^1-\beta\left(\theta_{HL}^1 q_L^2+\theta_{HH}^1 q_H^2\right)-c_H \\
2q_H^1 &= 1-c_H-\beta\left(\theta_{HL}^1 q_L^2+\theta_{HH}^1 q_H^2\right) \\
q_H^1 &= \frac{1-c_H-\beta\left(\theta_{HL}^1 q_L^2+\theta_{HH}^1 q_H^2\right)}{2} \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

output perusahaan 2 dengan tipe L

$$\begin{aligned}
\frac{dU_L^2(q^1,q^2)}{q_L^2} &= 1-2q_L^2-\beta\left(\theta_{LL}^2 q_L^1+\theta_{HL}^2 q_H^1\right)-c_L \\
0 &= 1-2q_L^2-\beta\left(\theta_{LL}^2 q_L^1+\theta_{HL}^1 q_H^1\right)-c_L \\
2q_L^2 &= 1-c_L-\beta\left(\theta_{LL}^2 q_L^1+\theta_{HL}^2 q_H^1\right) \\
q_L^2 &= \frac{1-c_L-\beta\left(\theta_{LL}^2 q_L^1+\theta_{HL}^2 q_H^1\right)}{2} \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

output perusahaan 2 dengan tipe H

$$\begin{aligned}
\frac{dU_H^2(q^1,q^2)}{q_H^2} &= 1-2q_H^2-\beta\left(\theta_{LH}^2 q_L^1+\theta_{HH}^2 q_H^1\right)-c_H \\
0 &= 1-2q_H^2-\beta\left(\theta_{LH}^2 q_L^1+\theta_{HH}^2 q_H^1\right)-c_H \\
2q_H^2 &= 1-c_H-\beta\left(\theta_{LH}^2 q_L^1+\theta_{HH}^2 q_H^1\right) \\
q_H^2 &= \frac{1-c_H-\beta\left(\theta_{LH}^2 q_L^1+\theta_{HH}^2 q_H^1\right)}{2} \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

dimana $\{q_L^1, q_H^1, q_L^2, q_H^2\}$ merupakan keseimbangan bayesian nash pada model cournot.

Lemma 3.1.1. *Misalkan*

$$c_H \leq 1-\frac{\beta}{2}(1-c_L)$$

maka terdapat keseimbangan nash yang tunggal pada permainan cournot sehingga *untuk setiap* $j \in \{1,2\}$, $q_L^j > q_H^j > 0$ *dan* $P_{HH}^j > P_\omega^j > P_{LL}^j$ *untuk* $\omega \in \{LH, HL\}$.

Bukti: Persamaan (3.2), (3.3), (3.4), dan (3.5) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} 2q_L^1 + \beta\left(\theta_{LL}^1 q_L^2 + \theta_{LH}^1 q_H^2\right) &= 1 - c_L \\ 2q_H^1 + \beta\left(\theta_{HL}^1 q_L^2 + \theta_{HH}^1 q_H^2\right) &= 1 - c_H \\ 2q_L^2 + \beta\left(\theta_{LL}^2 q_L^1 + \theta_{HL}^2 q_H^1\right) &= 1 - c_L \\ 2q_H^2 + \beta\left(\theta_{LH}^2 q_L^1 + \theta_{HH}^2 q_H^1\right) &= 1 - c_H \end{aligned} \tag{3.6}$$

dan persamaan (3.6) diubah ke bentuk matriks

$$Wq = d, \tag{3.7}$$

dimana

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \beta\theta_{LL}^1 & \beta\theta_{LH}^1 \\ 0 & 2 & \beta\theta_{HL}^1 & \beta\theta_{HH}^1 \\ \beta\theta_{LL}^2 & \beta\theta_{HL}^2 & 2 & 0 \\ \beta\theta_{LH}^2 & \beta\theta_{HH}^2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_L^1 \\ q_H^1 \\ q_L^2 \\ q_H^2 \end{pmatrix} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 - c_L \\ 1 - c_H \\ 1 - c_L \\ 1 - c_H \end{pmatrix}$$

Penyelesaian persamaan (3.7) akan memperoleh solusi yang positif untuk setiap q_t^j. Berdasarkan teorema Kaykobad (1985) solusi akan positif jika memenuhi teorema :

Teorema 3.1.1. *Jika*

$$A = (a_{ij}) \geq 0, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n, \quad i \neq j \tag{3.9}$$

$$a_{ii} > 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{3.10}$$

$$b = (b_j) > 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.11}$$

dan untuk setiap $i, i = 1, 2, \cdots, n,$

$$b_i > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \frac{b_j}{a_{jj}} \tag{3.12}$$

maka A *inversibel dan* $A^{-1}b > 0.$

Koefisien baris i dan kolom j pada matriks (3.8) dinotasikan w_{ij} dan d_i dinotasikan sebagai elemen pada d. Dimana $w_{ij} \geq 0$ untuk semua $i \neq j \in \{1, 2, 3, 4\}$ dan $w_{ii} = 2 > 0$ dan $d_i > 0$ untuk $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Kondisi ini memenuhi persamaan dalam teorema kaykobad, yaitu:

$$d_i > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} w_{ij} \frac{d_j}{w_{jj}} \tag{3.13}$$

untuk setiap $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Matriks (3.8) dapat diselesaikan dengan persamaan (3.13) sebagai berikut:

- untuk $i = 1$

$$\begin{aligned} d_1 &> w_{12}\frac{d_2}{w_{22}} + w_{13}\frac{d_3}{w_{33}} + w_{14}\frac{d_4}{w_{44}} \\ (1 - c_L) &> 0\frac{(1 - c_H)}{2} + \beta\theta^1_{LL}\frac{(1 - c_L)}{2} + \beta\theta^1_{LH}\frac{(1 - c_H)}{2} \\ (1 - c_L) &> \frac{\beta\theta^1_{LL}(1 - c_L) + \beta\theta^1_{LH}(1 - c_H)}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2(1-c_L) &> \beta\theta^1_{LL}(1-c_L) + \beta\theta^1_{LH}(1-c_H) \\
2(1-c_L) - \beta\theta^1_{LL}(1-c_L) - \beta\theta^1_{LH}(1-c_H) &> 0 \\
(2-\beta\theta^1_{LL})(1-c_L) - \beta\theta^1_{LH}(1-c_H) &> 0 \\
(2-\beta\theta^1_{LL})(1-c_L) &> \beta\theta^1_{LH}(1-c_H) \\
\frac{(2-\beta\theta^1_{LL})(1-c_L)}{\beta\theta^1_{LH}} &> (1-c_H) \\
c_H &> 1 - \frac{(2-\beta\theta^1_{LL})}{\beta\theta^1_{LH}}(1-c_L)
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

- untuk $i = 2$

$$
\begin{aligned}
d_2 &> w_{21}\frac{d_1}{w_{11}} + w_{23}\frac{d_3}{w_{33}} + w_{24}\frac{d_4}{w_{44}} \\
(1-c_H) &> 0\frac{(1-c_L)}{2} + \beta\theta^1_{HL}\frac{(1-c_L)}{2} + \beta\theta^1_{HH}\frac{(1-c_H)}{2} \\
(1-c_H) &> \frac{\beta\theta^1_{HL}(1-c_L) + \beta\theta^1_{HH}(1-c_H)}{2} \\
2(1-c_H) &> \beta\theta^1_{HL}(1-c_L) + \beta\theta^1_{HH}(1-c_H) \\
2(1-c_H) - \beta\theta^1_{HL}(1-c_L) - \beta\theta^1_{HH}(1-c_H) &> 0 \\
(2-\beta\theta^1_{HH})(1-c_H) - \beta\theta^1_{HL}(1-c_L) &> 0 \\
(2-\beta\theta^1_{HH})(1-c_H) > \beta\theta^1_{HL}(1-c_L)(1-c_H) &> \frac{\beta\theta^1_{HL}(1-c_L)}{(2-\beta\theta^1_{HH})} \\
c_H &< 1 - \frac{\beta\theta^1_{HL}}{2-\beta\theta^1_{HH}}(1-c_L)
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

- untuk $i = 3$

$$
\begin{aligned}
d_3 &> w_{31}\frac{d_1}{w_{11}} + w_{32}\frac{d_2}{w_{22}} + w_{34}\frac{d_4}{w_{44}} \\
(1-c_L) &> \beta\theta^2_{LL}\frac{(1-c_L)}{2} + \beta\theta^2_{HL}\frac{(1-c_H)}{2} + 0\frac{(1-c_H)}{2} \\
(1-c_L) &> \frac{\beta\theta^2_{LL}(1-c_L) + \beta\theta^2_{HL}(1-c_H)}{2}
\end{aligned}
$$

$$2(1-c_L) > \beta\theta^2_{LL}(1-c_L) + \beta\theta^2_{HL}(1-c_H)$$
$$2(1-c_L) - \beta\theta^2_{LL}(1-c_L) - \beta\theta^2_{HL}(1-c_H) > 0$$
$$(2-\beta\theta^2_{LL})(1-c_L) - \beta\theta^2_{HL}(1-c_H) > 0$$
$$(2-\beta\theta^2_{LL})(1-c_L) > \beta\theta^2_{HL}(1-c_H)$$
$$\frac{(2-\beta\theta^2_{LL})(1-c_L)}{\beta\theta^2_{HL}} > (1-c_H)$$
$$c_H > 1 - \frac{(2-\beta\theta^2_{LL})}{\beta\theta^2_{HL}}(1-c_L) \qquad (3.16)$$

- untuk $i = 4$

$$d_4 > w_{41}\frac{d_1}{w_{11}} + w_{42}\frac{d_2}{w_{22}} + w_{43}\frac{d_3}{w_{33}}$$
$$(1-c_H) > \beta\theta^2_{LH}\frac{(1-c_L)}{2} + \beta\theta^2_{HH}\frac{(1-c_H)}{2} + 0\frac{(1-c_L)}{2}$$
$$(1-c_H) > \frac{\beta\theta^2_{LH}(1-c_L) + \beta\theta^2_{HH}1-c_H)}{2}$$
$$2(1-c_H) > \beta\theta^2_{LH}(1-c_L) + \beta\theta^2_{HH}(1-c_H)$$
$$2(1-c_H) - \beta\theta^2_{LH}(1-c_L) - \beta\theta^2_{HH}(1-c_H) > 0$$
$$(2-\beta\theta^2_{HH})(1-c_H) - \beta\theta^2_{LH}(1-c_L) > 0$$
$$(2-\beta\theta^2_{HH})(1-c_H) > \beta\theta^2_{LH}(1-c_L)$$
$$(1-c_H) > \frac{\beta\theta^2_{LH}(1-c_L)}{(2-\beta\theta^2_{HH})}$$
$$c_H < 1 - \frac{\beta\theta^2_{LH}}{(2-\beta\theta^2_{HH})}(1-c_L) \qquad (3.17)$$

kondisi yang memenuhi untuk penyelesaian positif adalah persamaan (3.15) dan (3.17), sehingga persamaannya menjadi

$$c_H < min\left\{1 - \frac{\beta(\theta^1_{HL})}{2-\beta\theta^1_{HH}}(1-c_L), 1 - \frac{\beta(\theta^2_{LH})}{2-\beta\theta^2_{HH}}(1-c_L)\right\} \qquad (3.18)$$

karena $\theta^1_{HL} + \theta^1_{HH} = 1$ dan $\theta^2_{LH} + \theta^2_{HH} = 1$, maka persamaan (3.18) menjadi

$$c_H < min\left\{1 - \frac{\beta(1-\theta^1_{HH})}{2-\beta\theta^1_{HH}}(1-c_L), 1 - \frac{\beta(1-\theta^2_{HH})}{2-\beta\theta^2_{HH}}(1-c_L)\right\} \tag{3.19}$$

sementara $(1-\theta^1_{HH})/(2-\beta\theta^1_{HH})$ merupakan fungsi turun pada θ^1_{HH} sebab:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\frac{(1-\theta^1_{HH})}{2-\beta\theta^1_{HH}})}{d(\theta^1_{HH})} &= \frac{-1\,(2-\beta\theta^1_{HH}) + \beta\,(1-\theta^1_{HH})}{4-4\beta\theta^1_{HH}+\beta^2(\theta^1_{HH})^2} \\
&= \frac{\beta\theta^1_{HH} - \theta^1_{HH} - 1}{4-4\beta\theta^1_{HH}+\beta^2(\theta^1_{HH})^2} \\
&= -\frac{1}{4} < 0
\end{aligned}$$

dan $(1-\theta^2_{HH})/(2-\beta\theta^2_{HH})$ fungsi turun pada θ^2_{HH}, sebab

$$\begin{aligned}
\frac{d(\frac{(1-\theta^2_{HH}}{2-\beta\theta^2_{HH}})}{d(\theta^2_{HH})} &= \frac{-1\,(2-\beta\theta^2_{HH}) + \beta\,(1-\theta^2_{HH})}{4-4\beta\theta^2_{HH}+\beta^2(\theta^2_{HH})^2} \\
&= \frac{\beta\theta^2_{HH} - \theta^2_{HH} - 1}{4-4\beta\theta^2_{HH}+\beta^2(\theta^2_{HH})^2} \\
&= -\frac{1}{4} < 0
\end{aligned}$$

selanjutnya:

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta^1_{HH}\to 0} \frac{1-\theta^1_{HH}}{2-\beta\theta^1_{HH}} &= \frac{1-0}{2-\beta(0)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

dan

$$\begin{aligned}\lim_{\theta^2_{HH}\to 0}\frac{1-\theta^2_{HH}}{2-\beta\theta^2_{HH}} &= \frac{1-0}{2-\beta(0)}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{3.21}$$

dengan demikian persamaan (3.19) akan berlaku:

$$c_H < 1-\frac{\beta}{2}(1-c_L)$$

Selanjutnya, dimisalkan $X^1 = q^1_L - q^1_H$ dan $X^2 = q^2_L - q^2_H$ dan $\theta^1_{LH}+\theta^1_{LL} = 1$, $\theta^1_{HL}+\theta^1_{HH} = 1$, $\theta^2_{HL}+\theta^2_{LL} = 1$, dan $\theta^2_{HH}+\theta^2_{LH} = 1$ dan $S^j = \theta^j_{LL}+\theta^j_{HH}$ untuk setiap $j \in \{1,2\}$ maka persamaan (3.6) dapat ditulis kembali menjadi:

$$2q^1_L = 1-c_L-\beta\left(\theta^1_{LL}q^2_L+\theta^1_{LH}q^2_H\right)\tag{3.22}$$

$$2q^1_H = 1-c_H-\beta\left(\theta^1_{HL}q^2_L+\theta^1_{HH}q^2_H\right)\tag{3.23}$$

$$2q^2_L = 1-c_L-\beta\left(\theta^2_{LL}q^1_L+\theta^2_{HL}q^1_H\right)\tag{3.24}$$

$$2q^2_H = 1-c_H-\beta\left(\theta^2_{LH}q^1_L+\theta^2_{HH}q^1_H\right)\tag{3.25}$$

persamaan (3.22) dikurang persamaan (3.23) maka diperoleh:

$$\begin{aligned}2q^1_L-2q^1_H &= -c_L+c_H-\beta\left(\theta^1_{LL}q^2_L+\theta^1_{LH}q^2_H\right)+\beta\left(\theta^1_{HL}q^2_L+\theta^1_{HH}q^2_H\right)\\ c_H-c_L &= 2q^1_L-2q^1_H+\beta\left(\theta^1_{LL}q^2_L+\theta^1_{LH}q^2_H\right)-\beta\left(\theta^1_{HL}q^2_L+\theta^1_{HH}q^2_H\right)\\ c_H-c_L &= 2q^1_L-2q^1_H+\beta\theta^1_{LL}q^2_L+\beta\theta^1_{LH}q^2_H-\beta\theta^1_{HL}q^2_L-\beta\theta^1_{HH}q^2_H\\ c_H-c_L &= 2q^1_L-2q^1_H+\beta\theta^1_{LL}q^2_L-\beta\theta^1_{HL}q^2_L+\beta\theta^1_{LH}q^2_H-\beta\theta^1_{HH}q^2_H\\ c_H-c_L &= 2(q^1_L-q^1_H)+\beta q^2_L(\theta^1_{LL}-\theta^1_{HL})-\beta q^2_H(\theta^1_{HH}-\theta^1_{LH})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_H - c_L &= 2(q_L^1 - q_H^1) + \beta q_L^2(\theta_{LL}^1 - 1 + \theta_{HH}^1) - \beta q_H^2(\theta_{HH}^1 - 1 + \theta_{LL}^1) \\
c_H - c_L &= 2(q_L^1 - q_H^1) + \beta q_L^2(S^1 - 1) - \beta q_H^2(S^1 - 1) \\
c_H - c_L &= 2(q_L^1 - q_H^1) + \beta(S^1 - 1)(q_L^2 - q_H^2) \\
c_H - c_L &= 2X^1 + \beta(S^1 - 1)X^2
\end{aligned} \tag{3.26}$$

dan persamaan (3.24) dikurang persamaan (3.25)

$$\begin{aligned}
2q_L^2 - 2q_H^2 &= -c_L + c_H - \beta\left(\theta_{LL}^2 q_L^1 + \theta_{HL}^2 q_H^1\right) + \beta\left(\theta_{LH}^2 q_L^1 + \theta_{HH}^1 q_H^1\right) \\
c_H - c_L &= 2q_L^1 - 2q_H^1 + \beta\left(\theta_{LL}^2 q_L^1 + \theta_{LH}^2 q_H^1\right) - \beta\left(\theta_{LH}^2 q_L^1 + \theta_{HH}^2 q_H^1\right) \\
c_H - c_L &= 2(q_L^2 - q_H^2) + \beta\theta_{LL}^2 q_L^1 + \beta\theta_{HL}^2 q_H^1 - \beta\theta_{LH}^2 q_L^1 - \beta\theta_{HH}^2 q_H^1 \\
c_H - c_L &= 2(q_L^2 - q_H^2) + \beta\theta_{LL}^2 q_L^1 - \beta\theta_{LH}^2 q_L^1 + \beta\theta_{HL}^2 q_H^1 - \beta\theta_{HH}^2 q_H^1 \\
c_H - c_L &= 2(q_L^2 - q_H^2) + \beta q_L^1(\theta_{LL}^2 - \theta_{LH}^2) - \beta q_H^1(\theta_{HH}^2 - \theta_{HL}^2) \\
c_H - c_L &= 2(q_L^2 - q_H^2) + \beta q_L^1(\theta_{LL}^2 - 1 + \theta_{LH}^2) - \beta q_H^1(\theta_{HH}^2 - 1 + \theta_{LL}^2) \\
c_H - c_L &= 2(q_L^2 - q_H^2) + \beta(S^2 - 1)(q_L^1 - q_H^1) \\
c_H - c_L &= 2X^2 + \beta(S^2 - 1)X^1 \\
c_H - c_L &= \beta(S^2 - 1)X^1 + 2X^2
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Untuk memperoleh penyelesaian maka persamaan linier untuk X^1 dan X^2 diperoleh dengan mengeliminasi persamaan (3.26) dan (3.27).

Untuk X^1, dengan mengalikan persamaan (3.26) dengan 1 dan (3.27) dengan $\frac{1}{2}\beta(S^1 - 1)$, maka kedua persamaan menjadi

$$2X^1 + \beta(S^1 - 1)X^2 = c_H - c_L \tag{3.28}$$

dan

$$\frac{\beta^2(S^1-1)(S^2-1)X^1}{2} + \beta(S^1-1)X^2 = \frac{\beta(S^1-1)(c_H-c_L)}{2} \tag{3.29}$$

dengan mengeliminasi persamaan (3.28) dan (3.29) diperoleh:

$$\begin{aligned}
2X^1 - \frac{\beta^2(S^1-1)(S^2-1)X^1}{2} &= (c_H-c_L) - \frac{\beta(S^1-1)(c_H-c_L)}{2} \\
\Rightarrow \frac{4X^1 - \beta^2(S^1-1)(S^2-1)X^1}{2} &= \frac{2(c_H-c_L) - \beta(S^1-1)(c_H-c_L)}{2} \\
\Rightarrow \left[4-\beta^2(S^1-1)(S^2-1)\right] X^1 &= \left[2-\beta^2(S^1-1)\right](c_H-c_L) \\
\Rightarrow \left[4-\beta(1-S^1)(1-S^2)\right] X^1 &= \left[2+\beta^2(1-S^1)\right](c_H-c_L) \\
X^1 &= \frac{\left[2+\beta^2(1-S^1)\right](c_H-c_L)}{\left[4-\beta^2(1-S^1)(1-S^2)\right]} \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

dan untuk X^2, dengan mengalikan persamaan (3.26) dengan $\frac{1}{2}\beta(S^2-1)$ dan (3.27) dengan 1, maka kedua persamaan menjadi

$$\beta(S^2-1)X^1 + \frac{\beta^2(S^1-1)(S^2-1)X^2}{2} = \frac{\beta(S^2-1)(c_H-c_L)}{2} \tag{3.31}$$

dan

$$\beta(S^2-1)X^1 + 2X^2 = c_H - c_L \tag{3.32}$$

dengan mengeliminasi persamaan (3.31) dan (3.32) diperoleh:

$$\begin{aligned}
2X^2 - \frac{\beta^2(S^1-1)(S^2-1)X^2}{2} &= (c_H-c_L) - \frac{\beta(S^1-1)(c_H-c_L)}{2} \\
\Rightarrow \frac{4X^2 - \beta^2(S^1-1)(S^2-1)X^2}{2} &= \frac{2(c_H-c_L) - \beta(S^2-1)(c_H-c_L)}{2} \\
\Rightarrow \left[4-\beta^2(S^1-1)(S^2-1)\right] X^2 &= \left[2-\beta^2(S^2-1)\right](c_H-c_L)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[4-\beta^2(1-S^1)(1-S^2)\right] X^2 = \left[2+\beta^2(1-S^2)\right](c_H-c_L)$$
$$X^2 = \frac{\left[2+\beta^2(1-S^2)\right](c_H-c_L)}{\left[4-\beta^2(1-S^1)(1-S^2)\right]} \tag{3.33}$$

karena $c_H > c_L$, $\beta = 1$, dan $S^j \leq 1$ maka mengakibatkan $X^1, X^2 > 0$ sehingga $q_L^j > q_H^j$ untuk setiap $j \in \{1,2\}$. Jadi invers fungsi permintaan mengakibatkan $P_{HH}^j > P_{LH}^j > P_{LL}^j$ dan $P_{HH}^j > P_{HL}^j > P_{LL}^j$ untuk setiap $j \in \{1,2\}$

Lema tersebut membuktikan kondisi pada c_H menjamin persamaan (3.6) memiliki solusi yang tunggal dimana semua kuantitas positif. Selain itu, masing-masing pemain memilih output tertinggi ketika memiliki biaya rendah dibanding mereka memiliki biaya tinggi. Hal ini mengakibatkan bahwa harga tertinggi ketika kedua pemain dengan tipe tinggi. Terendah ketika kedua pemain dengan tipe rendah, dan medium ketika mereka memilih tipe yang berbeda. P_ω^j dinotasikan sebagai harga pemain $j \in \{1,2\}$ pada kondisi $\omega \in \Omega$

Definisi 3.1.2. Keyakinan (*belief*) pada dasarnya sama jika setidaknya satu dari pasangan berikut berlaku

$$(i)\begin{cases} \theta_{LL}^1 = \theta_{LL}^2 \\ \theta_{LH}^1 = \theta_{HL}^2 \\ \theta_{HL}^1 = \theta_{LH}^2 \\ \theta_{HH}^1 = \theta_{HH}^2 \end{cases}, (ii)\begin{cases} \theta_{LL}^1 = \theta_{HH}^2 \\ \theta_{LH}^1 = \theta_{LH}^2 \\ \theta_{HL}^1 = \theta_{HL}^2 \\ \theta_{HH}^1 = \theta_{LL}^2 \end{cases}$$

kondisi (i) pasangan pertama memenuhi bahwa keyakinan simetri ketika pemain memiliki tipe t_1, ia yakin bahwa tipe pemain kedua adalah t_2 sama dengan tipe t_1. Demikian juga pemain kedua menganggap bahwa pemain pertama dengan tipe t_2. Kondisi (ii) sama dengan kondisi (i) kecuali L dan H pada pemain kedua berubah.

Definisi 3.1.3. Pemain pertama memiliki keyakinan yang independen (*independent belief*) jika posteriornya tentang tipe pemain lain tidak tergantung pada tipenya sendiri.

$$\theta^1_{LL} = \theta^1_{HL}, \qquad dan \qquad \theta^1_{LH} = \theta^1_{HH}$$

demikian juga dengan pemain kedua,

$$\theta^2_{LL} = \theta^2_{LH}, \qquad dan \qquad \theta^2_{HL} = \theta^2_{HH}$$

Lemma 3.1.2. *Pemain $j \in \{1,2\}$ memiliki keyakinan yang independen jika dan hanya jika*

$$\theta^j_{LL} + \theta^j_{HH} = 1$$

Bukti: Berdasarkan definisi (3.1.3) dan $\theta^1_{LH} + \theta^1_{LL} = 1$, $\theta^1_{HL} + \theta^1_{HH} = 1$, $\theta^2_{HL} + \theta^2_{LL} = 1$, dan $\theta^2_{HH} + \theta^2_{LH} = 1$ maka untuk pemain pertama

$$\begin{aligned} \theta^1_{LL} &= \theta^1_{HL} \\ \theta^1_{LL} &= 1 - \theta^1_{HH} \\ \theta^1_{LL} + \theta^1_{HH} &= 1 \end{aligned} \tag{3.34}$$

dan untuk pemain kedua

$$\begin{aligned} \theta^2_{LL} &= \theta^2_{LH} \\ \theta^2_{LL} &= 1 - \theta^2_{HH} \\ \theta^2_{LL} + \theta^2_{HH} &= 1 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Δ didefinisikan sebagai $\Delta = \theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1 - \theta^2_{LL} - \theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1 - \theta^1_{LL} -$

θ^1_{HH}). Secara intuisi Δ mengukur sejauh mana keyakinan berasal dari kekonsistenan probabilitas priornya.

Lemma 3.1.3. *Dalam model cournot, keyakinan konsisten jika dan hanya jika* $\Delta = 0$

Bukti: Menurut Rodrigues-Neto (2006) siklus persamaan yang berlaku untuk model Cournot adalah

$$\theta^1_{LH}\theta^2_{HH}\theta^1_{HL}\theta^2_{LL} = \theta^2_{HL}\theta^1_{HH}\theta^2_{LH}\theta^1_{LL}$$

sehingga persamaan tersebut dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{\theta^1_{LH}\theta^1_{HL}}{\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}} = \frac{\theta^2_{HL}\theta^2_{LH}}{\theta^2_{LL}\theta^2_{HH}}$$

substitusi $\theta^1_{LH} = 1 - \theta^1_{LL}$, $\theta^1_{HL} = 1 - \theta^1_{HH}$, $\theta^2_{HL} = 1 - \theta^2_{LL}$, dan $\theta^2_{LH} = 1 - \theta^2_{HH}$, maka didapat

$$\begin{aligned}
\tfrac{(1-\theta^1_{LL})(1-\theta^1_{HH})}{\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}} &= \tfrac{(1-\theta^2_{LL})(1-\theta^2_{HH})}{\theta^2_{LL}\theta^2_{HH}} \\
\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL})(1-\theta^2_{HH}) &= \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL})(1-\theta^1_{HH}) \\
\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}\theta^1_{LL}\theta^1_{HH} &= \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}\theta^1_{LL}\theta^1_{HH} \\
\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) &= \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) \\
\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) &= 0 \\
\Delta &= 0
\end{aligned}$$

Definisi 3.1.4. Aksi dikatakan simetri jika $Q_{LH} = Q_{HL}$

Aksi dikatakan simetri jika output total tidak tergantung pada perusahaan mana yang memiliki biaya rendah atau pun yang memiliki biaya tinggi.

Dalam hal ini berarti strategi yang dipilih oleh tiap perusahaan akan simetri tanpa memperhatikan mana perusahaan yang memiliki fungsi biaya rendah atau tinggi. Dengan jumlah output yang dihasilkan sama maka dalam hal ini juga berakibat bahwa harga untuk output perusahaan akan sama yaitu $P_{LH}^{j} = P_{HL}^{k}$ untuk setiap $j, k \in \{1, 2\}$.

Lemma 3.1.4. *Rasio selisih antara* Q_{LH} dan Q_{HL} *dengan selisih antara biaya marjinal yang tinggi dan rendah diberikan oleh*:

$$\frac{Q_{LH} - Q_{HL}}{c_H - c_L} = \frac{\beta\left[(\theta_{LL}^2 + \theta_{HH}^2) - (\theta_{LL}^1 + \theta_{HH}^1)\right]}{4 - \beta^2(1 - \theta_{LL}^1 - \theta_{HH}^1)(1 - \theta_{LL}^2 - \theta_{HH}^2)} \tag{3.36}$$

terutama, aksi simetri berlaku jika dan hanya jika

$$\theta_{LL}^1 + \theta_{HH}^1 = \theta_{LL}^2 + \theta_{HH}^2 \tag{3.37}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \frac{Q_{LH} - Q_{HL}}{c_H - c_L} &= \frac{q_L^1 + q_H^2 - (q_H^1 + q_L^2)}{c_H - c_L} \\ &= \frac{X^1 - X^2}{c_H - c_L} \end{aligned}$$

substitusi dari persamaan (3.30) dan (3.33)

$$\begin{aligned} \frac{Q_{LH} - Q_{HL}}{c_H - c_L} &= \frac{\frac{\left[2+\beta(1-S^1)\right](c_H - c_L) - \left[2+\beta(1-S^2)\right](c_H - c_L)}{4-\beta^2(1-S^1)(1-S^2)}}{c_H - c_L} \\ &= \frac{\frac{\left[2+\beta(1-S^1)-2-\beta(1-S^2)\right](c_H - c_L)}{4-\beta^2(1-S^1)(1-S^2)}}{c_H - c_L} \\ &= \frac{2 + \beta - \beta S^1 - 2 + \beta S^2}{4 - \beta^2(1 - S^1)(1 - S^2)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\beta S^2 - \beta S^1}{4-\beta^2(1-S^1)(1-S^2)} \\
&= \frac{\beta (S^2 - S^1)}{4-\beta^2(1-S^1)(1-S^2)}
\end{aligned}
$$

dengan $S^j = \theta^j_{LL} + \theta^j_{HH}$ maka

$$
\frac{Q_{LH} - Q_{HL}}{c_H - c_L} = \frac{\beta\left[(\theta^2_{LL} + \theta^2_{HH}) - (\theta^1_{LL} + \theta^1_{HH})\right]}{4-\beta^2(1-\theta^1_{LL} - \theta^1_{HH})(1-\theta^2_{LL} - \theta^2_{HH})}
$$

berdasarkan definisi (3.1.4) bahwa $Q_{LH} = Q_{HL}$ maka $Q_{LH} - Q_{HL} = 0$ sehingga

$$
\begin{aligned}
\frac{0}{c_H - c_L} &= \frac{\beta\left[(\theta^2_{LL} + \theta^2_{HH}) - (\theta^1_{LL} + \theta^1_{HH})\right]}{4-\beta^2(1-\theta^1_{LL} - \theta^1_{HH})(1-\theta^2_{LL} - \theta^2_{HH})} \\
0 &= \frac{\beta\left[(\theta^2_{LL} + \theta^2_{HH}) - (\theta^1_{LL} + \theta^1_{HH})\right]}{4-\beta^2(1-\theta^1_{LL} - \theta^1_{HH})(1-\theta^2_{LL} - \theta^2_{HH})} \\
\beta\left[(\theta^2_{LL} + \theta^2_{HH}) - (\theta^1_{LL} + \theta^1_{HH})\right] &= 0
\end{aligned}
$$

untuk $\beta = 1$, maka

$$
\begin{aligned}
(\theta^2_{LL} + \theta^2_{HH}) - (\theta^1_{LL} + \theta^1_{HH}) &= 0 \\
\theta^1_{LL} + \theta^1_{HH} &= \theta^2_{LL} + \theta^2_{HH}
\end{aligned}
$$

Proposisi 3.1.1. *Aksi simetri dan keyakinan simetri jika dan hanya jika keyakinan sama atau kedua pemain memilliki keyakinan independen.*

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa aksi simetri. Jika aksi simetri maka haruslah $\Delta = 0$ dan $S^1 = S^2$. Andaikan $S^1 = 1$ maka $S^2 = 1$. Berdasarkan lemma (3.1.2) maka dapat disimpulkan bahwa kedua pemain memiliki keyakinan yang independen. Jika $S^1 \neq 1$ maka $S^2 \neq 1$, dengan $\Delta = 0$ akan ditunjukkan bahwa

$M^1 = M^2$:

$$\begin{aligned}
\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) &= 0 \\
\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) &= \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) \\
M^1(1-S^2) &= M^2(1-S^1) \\
M^1 &= M^2
\end{aligned} \tag{3.38}$$

karena $M^1 = M^2$ maka keyakinan kedua pemain sama.

Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa keyakinan sama atau kedua pemain memiliki keyakinan yang independen. Pertama diasumsikan keyakinan sama, yakni $M^1 = M^2$ maka

$$\begin{aligned}
M^1 &= M^2 \\
M^1(1-S^2) &= M^2(1-S^1) \\
\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) &= \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) \\
\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) &= 0 \\
\Delta &= 0
\end{aligned}$$

karena $\Delta = 0$ maka keyakinan konsisten. Karena $M^1 = M^2$ pula maka

$$\begin{aligned}
M^1 &= M^2 \\
M^1(1-S^2) &= M^2(1-S^1) \\
1-S^2 &= 1-S^1 \\
S^1 &= S^2
\end{aligned}$$

maka aksi simetri.

Proposisi 3.1.2. *Pemain memiliki keyakinan yang independen dan keyakinannya konsisten jika dan hanya jika pemain lainnya memiliki keyakinan independen dan aksi simetri.*

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa keyakinan pemain kedua independen dan aksi simetri. Karena keyakinan pemain pertama independen maka $S^1 = 1$ dan keyakinannya konsisten maka $\Delta = 0$, sehingga:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) \\
0 &= \theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) \\
0 &= M^1(1-S^2) - M^2(1-S^1) \\
0 &= M^1(1-S^2)
\end{aligned}$$

jika $M^1 > 0$ maka $1 - S^2 = 0$ sehingga $S^2 = 1$ yang artinya keyakinan pemain kedua independen. Karena $S^1 = S^2$, berdasarkan lemma (3.1.4) maka aksi simetri.

Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa keyakinan pemain pertama independen dan aksi simetri. Berdasarkan lemma (3.1.2) jika keyakinan pemain kedua independen, maka $S^2 = 1$ dan keyakinannya konsisten maka $\Delta = 0$, sehingga:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) \\
0 &= \theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) \\
0 &= M^1(1-S^2) - M^2(1-S^1) \\
0 &= M^2(1-S^1)
\end{aligned}$$

jika $M^2 > 0$ maka $1 - S^1 = 0$ sehingga $S^1 = 1$ yang artinya keyakinan pemain pertama independen. Karena $S^1 = S^2$, berdasarkan lemma (3.1.4) maka aksi simetri.

Akibat 3.1.1. 1. *Jika seorang pemain memiliki keyakinan independen maka konsistensi keyakinan, aksi simetri dan keindependenan pemain lainnya equivalen.*

2. *Jika keyakinan konsisten dan keyakinan tak sama (keyakinan kedua pemain tidak independen), maka aksi simetri dan keindependenan kedua pemain equivalen.*

3. *Jika aksi simetri dan keyakinan tak sama, maka konsistensi dan keindependenan kedua pemain equivalen.*

3.2 Contoh Kasus

Di suatu kota terdapat dua perusahaan yang bergerak di bidang makanan cepat saji. Kedua perusahaan memproduksi barang yang homogen. Tidak ada informasi yang diketahui masing-masing perusahaan seperti waktu berproduksi, jumlah pekerja, jumlah bahan baku, dan sebagainya sehingga jumlah output yang dihasilkan pun tak dapat diprediksi. Masing-masing perusahaan hanya mengetahui dengan pasti biaya marjinalnya sendiri, tetapi tidak mengetahui biaya perusahaan pesaingnya. Ia beranggapan bahwa perusahaan pesaingnya memiliki biaya marjinal yang kemungkinan rendah atau tinggi. Setiap perusahaan beranggapan bahwa output yang dipilih lawannya pada saat ini akan sama dengan sebelumnya dan kedua perusahaan memaksimumkan saat ini. Jika setiap perusahaan mengetahui fungsi permintaan pasar adalah $P = 1 - Q = 1 - q_1 - q_2$ dan probabilitas bersyarat masing-masing perusahaan memilih tipenya adalah jika kedua perusahaan memilih tipe yang sama adalah $\frac{3}{8}$ dan kedua perusahaan ketika tipe berbeda adalah $\frac{1}{8}$ yang disajikan pada tabel berikut :

		Perusahaan 2	
		L	H
	L	3/8	1/8
Perusahaan 1	H	1/8	3/8

Tabel 3.1: Probabilitas masing-masing tipe pemain

1. Bagaimana keseimbangan bayesian cournotnya?

2. Apakah kedua perusahaan memiliki keyakinan yang independen

3. Apakah aksi yang dilakukan kedua perusahaan simetri?

4. Apakah keyakinan kedua perusahaan konsisten?

Penyelesaian:

Model permainan duopoli cournot:

	Pemain pertama	Pemain kedua
T_i	$\{L, H\}$	$\{L, H\}$
τ_i	L, H	L, H
A_i	$\Re_+, q_1 \in A_1$	$\Re_+, q_2 \in A_2$
u_i	$u_i(q_1, q_2, c_t) = q_1(1 - q_1 - q_2 - c_t)$ $t = L, H$	$u_i(q_1, q_2, c_t) = q_2(1 - q_1 - q_2 - c_t)$ $t = L, H$

$\Omega = \{LL, LH, HL, HH\}$ dan $\mu(c_L) = \mu(c_H) = \frac{1}{2}$ dimisalkan pula c_t merupakan tipe perusahaan pertama dan C_t tipe perusahaan kedua dimana $t \in (L, H)$

Probabilitas posterior untuk masing-masing tipe:

$$\begin{aligned}
\theta^1_{LL} = \mu(c_L|C_L) &= \frac{\mu(C_L|c_L)\mu(c_L)}{\mu(C_L|c_L)\mu(c_L)+\mu(C_L|c_H)\mu(c_H)} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{3}{4} \\
\theta^1_{LH} = \mu(c_L|C_H) &= \frac{\mu(C_H|c_L)\mu(c_L)}{\mu(C_H|c_L)\mu(c_L)+\mu(C_H|c_H)\mu(c_H)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{1}{4} \\
\theta^1_{HL} = \mu(c_H|C_L) &= \frac{\mu(C_L|c_H)\mu(c_H)}{\mu(C_L|c_H)\mu(c_H)+\mu(C_L|c_L)\mu(c_L)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{1}{4} \\
\theta^1_{HH} = \mu(c_H|C_H) &= \frac{\mu(C_H|c_H)\mu(c_H)}{\mu(C_H|c_H)\mu(c_H)+\mu(C_H|c_L)\mu(c_L)} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{16}} = \frac{3}{4} \\
\theta^2_{LL} = \mu(C_L|c_L) &= \frac{\mu(c_L|C_L)\mu(C_L)}{\mu(c_L|C_L)\mu(C_L)+\mu(c_L|C_H)\mu(C_H)} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{3}{4} \\
\theta^2_{HL} = \mu(C_L|c_H) &= \frac{\mu(c_H|C_L)\mu(C_L)}{\mu(c_H|C_L)\mu(C_L)+\mu(c_H|C_H)\mu(C_H)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{1}{4} \\
\theta^2_{LH} = \mu(C_H|c_L) &= \frac{\mu(c_L|C_H)\mu(C_H)}{\mu(c_L|C_H)\mu(C_H)+\mu(c_L|C_L)\mu(C_L)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta^2_{HH} = \mu(C_H|c_H) &= \frac{\mu(c_H|C_H)\mu(C_H)}{\mu(c_H|C_H)\mu(C_H) + \mu(c_H|C_L)\mu(C_L)} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

1. Berdasarkan persamaan (3.2), (3.3), (3.4), dan (3.5) keseimbangan bayes dalam kasus ini adalah :

   - Output perusahaan 1 dengan tipe L

$$\begin{aligned}
q^1_L &= \frac{1 - c_L - \beta\left(\theta^1_{LL} q^2_L + \theta^1_{LH} q^2_H\right)}{2} \\
&= \frac{1 - c_L - (1)\left(\frac{3}{4} q^2_L + \frac{1}{4} q^2_H\right)}{2} \\
&= \frac{1 - c_L - \left(\frac{3}{4} q^2_L + \frac{1}{4} q^2_H\right)}{2}
\end{aligned}$$

   - Output perusahaan 1 dengan tipe H

$$\begin{aligned}
q^1_H &= \frac{1 - c_H - \beta\left(\theta^1_{HL} q^2_L + \theta^1_{HH} q^2_H\right)}{2} \\
&= \frac{1 - c_H - (1)\left(\frac{1}{4} q^2_L + \frac{3}{4} q^2_H\right)}{2} \\
&= \frac{1 - c_H - \left(\frac{1}{4} q^2_L + \frac{3}{4} q^2_H\right)}{2}
\end{aligned}$$

   - Output perusahaan 2 dengan tipe L

$$\begin{aligned}
q^2_L &= \frac{1 - c_L - \beta\left(\theta^2_{LL} q^1_L + \theta^2_{HL} q^1_H\right)}{2} \\
&= \frac{1 - c_L - (1)\left(\frac{3}{4} q^1_L + \frac{1}{4} q^1_H\right)}{2} \\
&= \frac{1 - c_L - \left(\frac{3}{4} q^1_L + \frac{1}{4} q^1_H\right)}{2}
\end{aligned}$$

- Output perusahaan 2 dengan tipe H

$$\begin{aligned} q_H^2 &= \frac{1-c_H-\beta\left(\theta_{LH}^1 q_L^1+\theta_{HH}^1 q_H^1\right)}{2} \\ &= \frac{1-c_H-(1)\left(\frac{1}{4}q_L^1+\frac{3}{4}q_H^1\right)}{2} \\ &= \frac{1-c_H-\left(\frac{1}{4}q_L^1+\frac{3}{4}q_H^1\right)}{2} \end{aligned}$$

substitusi keempat persamaan tersebut sehigga menghasilkan:

$$\begin{aligned} 2q_L^1 &= 1-c_L-\frac{3}{4}\left(\frac{1-c_L-\frac{3}{4}q_L^1-\frac{1}{4}q_H^1}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1-c_H-\frac{1}{4}q_L^1-\frac{3}{4}q_H^1}{2}\right) \\ 2q_L^1 &= 1-c_L-\frac{3}{8}\left(1-c_L-\frac{3}{4}q_L^1-\frac{1}{4}q_H^1\right)-\frac{1}{8}\left(1-c_H-\frac{1}{4}q_L^1-\frac{3}{4}q_H^1\right) \\ 2q_L^1 &= 1-c_L-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}c_L+\frac{9}{32}q_L^1+\frac{3}{32}q_H^1-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}c_H+\frac{1}{32}q_L^1+\frac{3}{32}q_H^1 \\ 2q_L^1 &= \frac{1}{2}-\frac{5}{8}c_L+\frac{1}{8}c_H+\frac{10}{32}q_L^1+\frac{6}{32}q_H^1 \\ 2q_L^1-\frac{10}{32}q_L^1-\frac{6}{32}q_H^1 &= \frac{1}{2}-\frac{5}{8}c_L+\frac{1}{8}c_H \\ \frac{54}{32}q_L^1-\frac{6}{32}q_H^1 &= \frac{1}{2}-\frac{5}{8}c_L+\frac{1}{8}c_H \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned} 2q_H^1 &= 1-c_H-\frac{1}{4}\left(\frac{1-c_L-\frac{3}{4}q_L^1-\frac{3}{4}q_H^1}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1-c_H-\frac{1}{4}q_L^1-\frac{3}{4}q_H^1}{2}\right) \\ 2q_H^1 &= 1-c_H-\frac{1}{8}\left(1-c_L-\frac{3}{4}q_L^1-\frac{1}{4}q_H^1\right)-\frac{3}{8}\left(1-c_H-\frac{1}{4}q_L^1-\frac{3}{4}q_H^1\right) \\ 2q_H^1 &= 1-c_L-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}c_L+\frac{3}{32}q_L^1+\frac{1}{32}q_H^1-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}c_H+\frac{3}{32}q_L^1+\frac{9}{32}q_H^1 \\ 2q_H^1 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{8}c_L-\frac{5}{8}c_H+\frac{6}{32}q_L^1+\frac{10}{32}q_H^1 \\ 2q_H^1-\frac{10}{32}q_H^1-\frac{6}{32}q_L^1 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{8}c_L-\frac{5}{8}c_H \end{aligned}$$

$$\frac{54}{32}q_H^1 - \frac{6}{32}q_L^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}c_L - \frac{5}{8}c_H \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
2q_L^2 &= 1 - c_L - \frac{3}{4}\left(\frac{1 - c_L - \frac{3}{4}q_L^2 - \frac{1}{4}q_H^2}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1 - c_H - \frac{1}{4}q_L^2 - \frac{3}{4}q_H^2}{2}\right)\\
2q_L^2 &= 1 - c_L - \frac{3}{8}\left(1 - c_L - \frac{3}{4}q_L^2 - \frac{1}{4}q_H^2\right) - \frac{1}{8}\left(1 - c_H - \frac{1}{4}q_L^2 - \frac{3}{4}q_H^2\right)\\
2q_L^2 &= 1 - c_L - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}c_L + \frac{9}{32}q_L^2 + \frac{3}{32}q_H^2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}c_H + \frac{1}{32}q_L^2 + \frac{3}{32}q_H^2\\
2q_L^2 &= \frac{1}{2} - \frac{5}{8}c_L + \frac{1}{8}c_H + \frac{10}{32}q_L^2 + \frac{6}{32}q_H^2\\
2q_L^2 - \frac{10}{32}q_L^2 - \frac{6}{32}q_H^2 &= \frac{1}{2} - \frac{5}{8}c_L + \frac{1}{8}c_H\\
\frac{54}{32}q_L^1 - \frac{6}{32}q_H^1 &= \frac{1}{2} - \frac{5}{8}c_L + \frac{1}{8}c_H
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
2q_H^2 &= 1 - c_H - \frac{1}{4}\left(\frac{1 - c_L - \frac{3}{4}q_L^2 - \frac{3}{4}q_H^2}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1 - c_H - \frac{1}{4}q_L^2 - \frac{3}{4}q_H^2}{2}\right)\\
2q_H^2 &= 1 - c_H - \frac{1}{8}\left(1 - c_L - \frac{3}{4}q_L^2 - \frac{1}{4}q_H^2\right) - \frac{3}{8}\left(1 - c_H - \frac{1}{4}q_L^2 - \frac{3}{4}q_H^2\right)\\
2q_H^2 &= 1 - c_L - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}c_L + \frac{3}{32}q_L^2 + \frac{1}{32}q_H^2 - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}c_H + \frac{3}{32}q_L^2 + \frac{9}{32}q_H^2\\
2q_H^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}c_L - \frac{5}{8}c_H + \frac{6}{32}q_L^2 + \frac{10}{32}q_H^2\\
2q_H^2 - \frac{10}{32}q_H^2 - \frac{6}{32}q_L^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}c_L - \frac{5}{8}c_H\\
\frac{54}{32}q_H^2 - \frac{6}{32}q_L^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}c_L - \frac{5}{8}c_H
\end{aligned} \tag{3.42}$$

substitusi persamaan (3.39) dengan (3.40) dan (3.41) dengan (3.42), sehingga diperoleh :

$$q_L^1 = \frac{1}{3} - \frac{11}{30}c_L + \frac{1}{30}c_H$$
$$q_H^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{30}c_L - \frac{11}{30}c_H$$
$$q_L^2 = \frac{1}{3} - \frac{11}{30}c_L + \frac{1}{30}c_H$$
$$q_H^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{30}c_L - \frac{11}{30}c_H$$

2. Karena

$$\theta_{HH}^1 + \theta_{LL}^1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$
$$\theta_{HH}^2 + \theta_{LL}^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

berdasarkan lemma (3.1.2) maka keyakinan masing-masing tak independen.

3. Karena

$$\theta_{HH}^1 + \theta_{LL}^1 = \theta_{HH}^2 + \theta_{LL}^2$$

berdasarkan lemma (3.1.4) maka aksi yang dipilih kedua pemain simetri.

4. Karena

$$\begin{aligned}
\Delta &= \theta_{LL}^1\theta_{HH}^1(1 - \theta_{LL}^2 - \theta_{HH}^2) - \theta_{LL}^2\theta_{HH}^2(1 - \theta_{LL}^1 - \theta_{HH}^1) \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

berdasarkan lemma (3.1.3) maka keyakinan konsisten.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari penulisan skripsi ini adalah:

- Fungsi payoff untuk pasar duopoli cournot dengan informasi tak lengkap dimana kedua pemain hanya mengetahui biaya marjinalnya rendah (L) atau tinggi (H) adalah:

  $$U_t^j(q_j, q_k) = \left(1 - q_t^j - \beta q^k - c_t\right) q_t^j$$

  dimana q_j adalah output produksi perusahaan j dan q_t output perusahaan k (perusahaan pesaingnya).

- Keseimbangan nash dalam permainan bayes cournot dengan $\theta^1_{t_1 t_2} > 0$ dinotasikan sebagai probabilitas posterior pemain 1 pada tipe $t_1 \in \{L, H\}$ bahwa pemain lainnya memiliki tipe $t_2 \in \{L, H\}$. Demikian juga dengan $\theta^2_{t_1 t_2} > 0$ dinotasikan sebagai probabilitas posterior pemain 2 pada tipe $t_2 \in \{L, H\}$ bahwa pemain lainnya memiliki tipe $t_1 \in \{L, H\}$ adalah profil strategi

$(q_L^1, q_H^1, q_L^2, q_H^2)$ dimana:

$$
\begin{aligned}
q_L^1 &= \frac{1 - c_L - \beta\,(\theta_{LL}^1 q_L^2 + \theta_{LH}^1 q_H^2)}{2} \\
q_H^1 &= \frac{1 - c_H - \beta\,(\theta_{HL}^1 q_L^2 + \theta_{HH}^1 q_H^2)}{2} \\
q_L^2 &= \frac{1 - c_L - \beta\,(\theta_{LL}^2 q_L^1 + \theta_{HL}^2 q_H^1)}{2} \\
q_H^2 &= \frac{1 - c_H - \beta\,(\theta_{LH}^2 q_L^1 + \theta_{HH}^2 q_H^1)}{2}
\end{aligned}
$$

4.2 Saran

Penelitian ini hanya menggunakan dua tipe pemain yaitu L dan H dimana fungsi permintaan linier dengan strategi murni. Untuk penelitian lebih lanjut dapat menggunakan tipe pemain lebih dari dua dan fungsi permintaan yang non linier.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Amir, Rabah dan Grilo. 1999. "Stackelberg Versus Cournot Equilibrium". *Games Economic Behaviour* 26 : 1-21.

[2] Can, Mehmet. 2012. *Cournot Model of Duopoly with Incomplete Information*. Bosnia. www.ius.edu.ba/mcan/CPAPERS/CPDF/dubrovnik.pdf. diakses 26 september 2012 pukul 22.45 WIB

[3] Dumairy. 2003. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. PT BPFE : Yogyakarta.

[4] Friedman. 1986. *Oligopoly Theory*. Cambridge University Press: New York.

[5] Kartono. 1994. *Teori Permainan*. Andi Offset : Yogyakarta.

[6] Kaykobad, M. 1985. "Positif Solution of Positive Linear Systems". *Linier Algebra and its Aplications* 64 : 133-140.

[7] McCraken, S and Rodrigues-Neto. 2012. *The role of Incomplete Information in The Cournot Duopoly*. Australia. $http : //scottmccracken.weebly.com/uploads/9/0/6/6/9066859/cournot_duopoly.pdf$. diakses 27 september 2012 pukul 09.37 WIB

[8] Rahardja, Pratama dan Mandala Manurung. 2003. *Teori Mikroekonomi (Suatu Pengantar)*. Lembaga Penerbit FE UI.

[9] Rodrigues-Neto. 2006. *From Posteriors to Prior Via Cycles*. University of Wisconsin-Madison and Brazilian Central Bank.

[10] Sugiarto, dkk. 2005. *Ekonomi Mikro : Sebuah Kajian Komprehensif.* Gramedia Pustaka Utama : Jakarta

[11] Wilson. 2012. *Bayesian Games.* Advance Game Theory. New York University. *https://files.nyu.edu/caw1/public/ADGame/Handouts/adf12h16bayesian-games.pdf* diakses 26 September 2012 pukul 22.46 WIB

[12] Zamir, Shmuel. 2009. *Bayesian Games: Games with Incomplete Information.* Center for the Study of Rationality, Hebrew University, Jerusalem, Israel. *http://www.ma.huji.ac.il/ zamir/documents/BayesianGames$_S$hmuelZamir.pdf.* diakses 26 September 2012 pukul 23.03 WIB

[13] http://www2.ucy.ac.cy/˜kgmarina/classes/files/150/Handout%2007%20-%20Game%20Theory.pdf . diakses 10 Oktober 2012. Pukul 12.56 WIB.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

LAMPIRAN A

Daftar Notasi

a_i	=	aksi yang dipilih oleh tiap pemain
t	=	tipe pemain
T_i	=	ruang tipe pemain
μ	=	probabilitas yang dipilih masing-masing pemain i
τ_i	=	fungsi tipe pemain i
Ω	=	himpunan fungsi tipe pemain i
$u_i(a, \omega)$	=	fungsi payoff pada aksi a dan kondisiω
c_L	=	biaya marjinal perusahaan rendah (tipe rendah)
c_H	=	biaya marjinal perusahaan tinggi (tipe tinggi)
c_t	=	tipe perusahaan 1 dimana$t \in (L, H)$
C_t	=	tipe perusahaan 2 dimana$t \in (L, H)$
q_L^1	=	output rendah untuk perusahaan 1
q_H^1	=	output tinggi untuk perusahaan 1
q_L^2	=	output rendah untuk perusahaan 2
q_H^2	=	output tinggi untuk perusahaan 2
P	=	harga

P^j_{HH} = harga output perusahaan$j \in (1,2)$jika tipe perusahaan tersebut H dan pesaingnya H

P^j_{LH} = harga output perusahaan$j \in (1,2)$jika tipe perusahaan tersebut L dan pesaingnya H

P^j_{LL} = harga output perusahaan$j \in (1,2)$jika tipe perusahaan tersebut L dan pesaingnya L

P^j_{ω} = harga output perusahaan$j \in (1,2)$pada kondisiω

Q = output total

$\theta^1_{t_1 t_2}$ = probabilitas posterior pemain 1 pada tipe$t_1$bahwa pemain lainnya memiliki tipe$t_2$dimana$t \in (L,H)$

$\theta^2_{t_1 t_2}$ = probabilitas posterior pemain 2 pada tipe$t_2$bahwa pemain lainnya memiliki tipe$t_1$dimana$t \in (L,H)$

π_i = laba perusahaan i

TR = penerimaan total yang diterima perusahaan (*total revenue*)

TC = biaya yang dikeluarkan perusahaan (*total cost*)

β = parameter derajat diferensiasi produk

LAMPIRAN B

List program untuk fungsi menggunakan matlab

1. Program menghitung kekonsistenan keyakinan

```
%-------------------------------------------
%Program Menghitung Kekonsistenan keyakinan
%-------------------------------------------

clear all
clc

disp('-----------------------------------------')
disp('Program Menghitung kekonsistenan keyakinan')
disp('-----------------------------------------')

teta_1_cLCL = input('Masukan probabilitas teta_1_cLCL =');
teta_1_cHCH = input('Masukan probabilitas teta_1_cHCH =');
teta_2_CLcL = input('Masukan probabilitas teta_2_CLcL =');
teta_2_CHcH = input('Masukan probabilitas teta_2_CHcH =');
delta = (teta_1_cLCL*teta_1_cHCH)*(1-teta_2_CLcL-teta_2_CHcH)-
(teta_2_CLcL*teta_2_CHcH)*(1-teta_1_cLCL-teta_1_cHCH);
disp (['Nilai delta =' num2str(delta)]);

if delta > 0
    disp('Keyakinan tak konsisten');
else
```

```
    disp('Keyakinan konsisten');
end;
```

2. Program menghitung kesimetrian aksi

```
%-------------------------------------------
%Program menghitung kesimetrian aksi
%-------------------------------------------

clear all
clc

disp('-------------------------------------------')
disp('Program menghitung kesimetrian aksi')
disp('-------------------------------------------')

teta_1_cLCL = input('Masukan probabilitas teta_1_cLCL =');
teta_1_cHCH = input('Masukan probabilitas teta_1_cHCH =');
teta_2_CLcL = input('Masukan probabilitas teta_2_CLcL =');
teta_2_CHcH = input('Masukan probabilitas teta_2_CHcH =');
S1 = teta_1_cLCL + teta_1_cHCH;
disp (['Nilai S1 =' num2str(S1)]);
S2 = teta_2_CLcL + teta_2_CHcH;
disp (['Nilai S2 =' num2str(S2)]);

if S1 > S1
    disp('Aksi tak simetri');
```

```
else
    disp('Aksi Simetri');
end;
```

3. Program menghitung keindependenan probabilitas posterior

```
%-------------------------------------------
%Program Menghitung Keindependenan Probabilitas Posterior
%-------------------------------------------

clear all
clc

disp('-------------------------------------------')
disp('Program Menghitung Keindependenan Probabilitas Posterior')
disp('-------------------------------------------')

cL = input('Masukan probabilitas prior perusahaan 1 tipe L=');
cH = input('Masukan probabilitas prior perusahaan 1 tipe H =');
teta_CLcL = input('Masukan probabilitas P2L_P1L =');
teta_CHcL = input('Masukan probabilitas P2H_P1L =');
teta_CLcH = input('Masukan probabilitas P2L_P1H =');
teta_CHcH = input('Masukan probabilitas P2H_P1H =');
teta_cLCL = (teta_CLcL*cL)/((teta_CLcL*cL)+(teta_CLcH*cH)) ;
disp (['Nilai teta_cLCL =' num2str(teta_cLCL)]);
teta_cLCH = (teta_CHcL*cL)/((teta_CHcL *cL)+(teta_CHcH *cH)) ;
disp (['Nilai teta_cLCH =' num2str(teta_cLCH)]);
```

```
teta_cHCL = (teta_CLcH*cH)/((teta_CLcH*cH)+(teta_CLcL*cL));
disp (['Nilai teta_cHCL =' num2str(teta_cHCL)]);
teta_cHCH = (teta_CHcH*cH)/((teta_CHcH *cH)+(teta_CHcL * cL)) ;
disp (['Nilai teta_cHCH =' num2str(teta_cHCH)]);
S1 = teta_cLCL+teta_cHCH;
disp (['Nilai S1 =' num2str(S1)]);

if S1 > 1
    disp('keyakinan tak independen');
else
    disp('keyakinan independen');
end;
```

4. Program menghitung nilai q_L^1, q_H^1, q_L^2 dan q_H^2

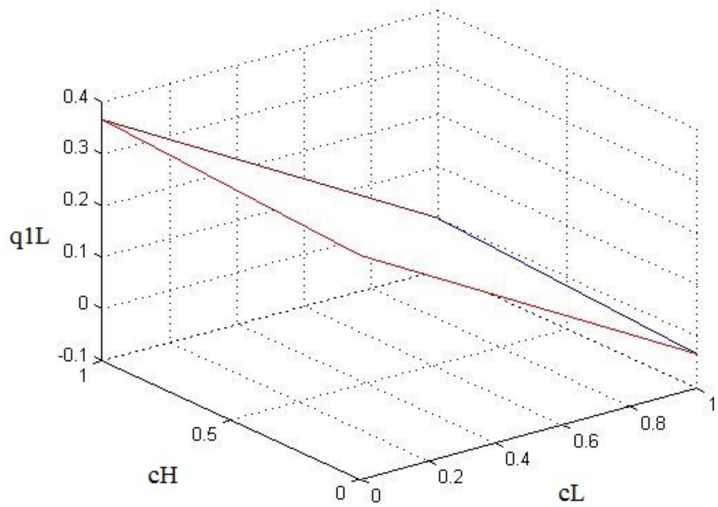
```
%----------------------------------
%Program menghitung nilai q
%----------------------------------
clear all
clc

disp('----------------------------------')
disp('Program menghitung nilai q')
disp('----------------------------------')
```

```
cL = input('Masukan nilai cL =');
cH = input('Masukan nilai cH =');
q1L = (1/3)-((((11/30))*cL)+((1/30)*cH);
disp(['Nilai q1L =' num2str(q1L)]);
q1H = (1/3)+((((1/30)*cL))-((11/30)*cH);
disp(['Nilai q1H =' num2str(q1H)]);
q2L = (1-cL-((3/4)*q1L)-((1/4)*q1H))/2;
disp(['Nilai q2L =' num2str(q2L)]);
q2H = (1-cH-((1/4)*q1L)-((3/4)*q1H))/2;
disp(['Nilai q2H =' num2str(q2H)]);
```

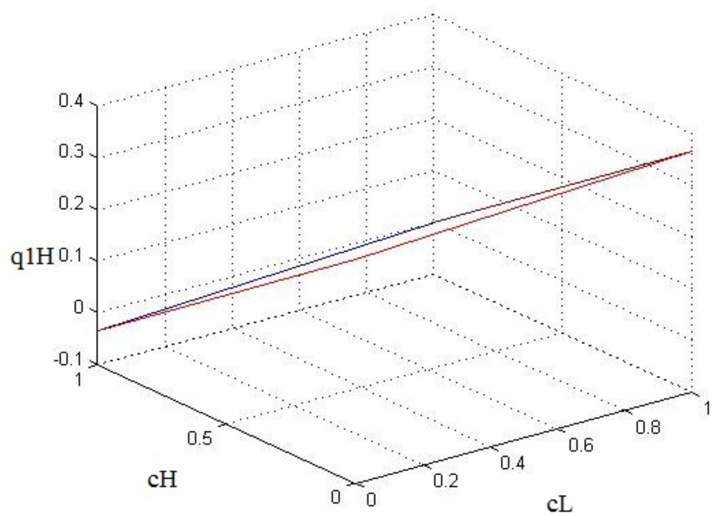
5. Program memunculkan plot hubungan q_L^1, q_H^1, q_L^2 dan q_H^2 terhadap c_L dan c_H

```
%memunculkan plot untuk q1L terhadap cL dan cH
figure;
cL =[0:0,01:1];
cH =[0:0,01:1];
[cL,cH]= meshgrid(cL,cH);
q1L = (1/3-((11/30)*cL)+((1/30)*cH));
mesh(cL,cH,q1L);

%memunculkan plot untuk q1H terhadap cL dan cH
figure;
cL =[0:0,01:1];
cH =[0:0,01:1];
```

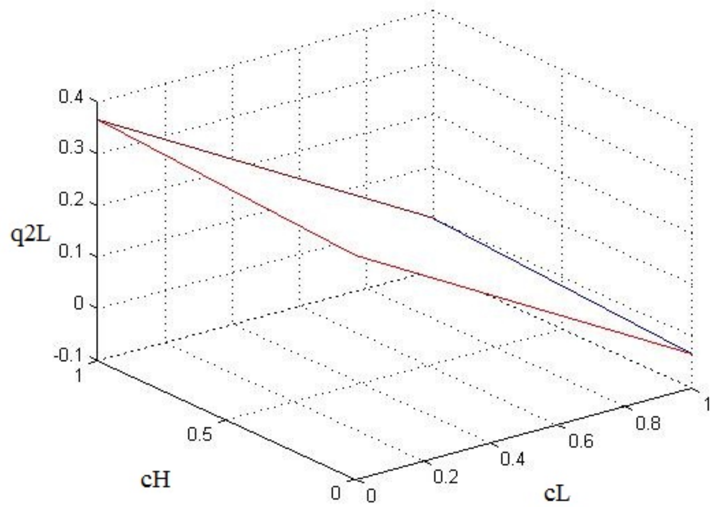
```
[cL,cH]= meshgrid(cL,cH);
q1H = (1/3+((1/30)*cL)-((11/30)*cH));
mesh(cL,cH,q1H);

%memunculkan plot untuk q1L terhadap cL dan cH
figure;
cL =[0:0,01:1];
cH =[0:0,01:1];
[cL,cH]= meshgrid(cL,cH);
q2L = (1/3-((11/30)*cL)+((1/30)*cH));
mesh(cL,cH,q2L);

%memunculkan plot untuk q1H terhadap cL dan cH
figure;
cL =[0:0,01:1];
cH =[0:0,01:1];
[cL,cH]= meshgrid(cL,cH);
q2H = (1/3+((1/30)*cL)-((11/30)*cH));
mesh(cL,cH,q2H);
```



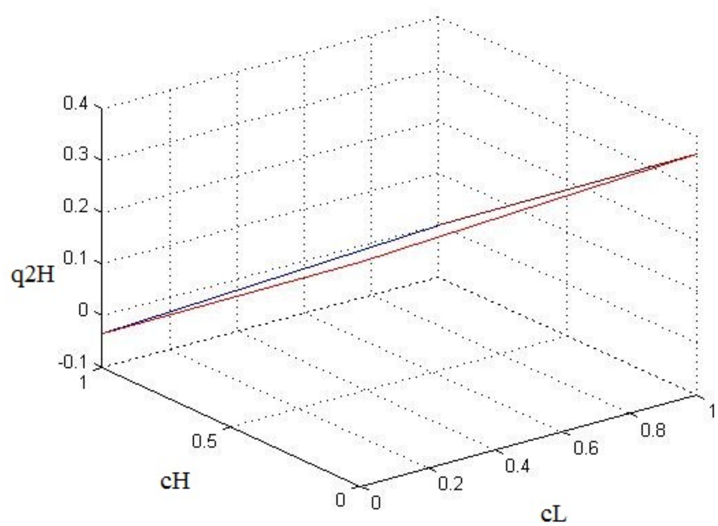
Gambar 1: Grafik hubungan antara q_L^1, c_L dan c_H



Gambar 2: Grafik hubungan antara q_H^1, c_L dan c_H



Gambar 3: Grafik hubungan antara q_L^2, c_L dan c_H



Gambar 4: Grafik hubungan antara q_H^2, c_L dan c_H

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama	:	Dinar Riyandani
No. Registrasi	:	3125081781
Jurusan	:	Matematika
Program Studi	:	Matematika

Menyatakan bahwa skripsi ini yang saya buat dengan judul "**Pendekatan Teori Permainan pada Model Pasar Duopoli Cournot dengan Informasi Tak Lengkap**" adalah :

1. Dibuat dan diselesaikan oleh saya sendiri.
2. Bukan merupakan duplikat skripsi yang pernah dibuat oleh orang lain atau jiplakan karya tulis orang lain.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, 19 April 2013

Yang membuat pernyataan

Dinar Riyandani

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Dinar Riyandani. Lahir di Depok, 11 Maret 1990. Anak kedua dari pasangan Bapak Katno Sahid dan Ibu Muntarsih, yang bertempat tinggal di Depok, Jawa Barat.

Pendidikan formal. Penulis mengawali pendidikan di SD Negeri Mampang 2 selama 6 tahun dan lulus tahun 2002. Setelah itu melanjutkan ke SMP Negeri 13 Depok sampai tahun 2005. Di tahun 2005 penulis melanjutkan ke SMA Negeri 1 Depok dan lulus tahun 2008. Di tahun 2008 penulis mengikuti UMB dan mendapat Jurusan Matematika, Universitas Negeri Jakarta (UNJ) untuk mengambil jenjang Strata 1. Di tahun 2013, penulis telah memperoleh gelar Sarjana Sains untuk Jurusan Matematika, Program Studi Matematika, FMIPA, UNJ.

Selama di bangku perkuliahan, penulis pernah menjadi staff Entrepreneur Badan Eksekutif Mahasiswa Jurusan (BEMJ) Matematika periode tahun 2009-2010. Selain itu, penulis juga aktif mengikuti kepantian Masa Pengenalan Akademik (MPA) Jurusan Matematika pada periode 2009-2010. Selain aktif dalam kepanitian MPA, penulis juga aktif mengikuti kepanitian berbagai program kerja BEMJ Matematika periode 2009-2010, seperti Pelangi Matematika, dan sebagainya.