Bab III

PEMBAHASAN

3.1 Duopoli Cournot pada Teori Permainan Bayes dalam Teori Permainan

Permainan dengan informasi tak lengkap atau yang sering disebut juga sebagai permainan bayes adalah model interaksi pengambilan keputusan di mana seorang pemain hanya memiliki sebagian informasi tentang pemain lainnya (Shmuel Zamir, 2009). Informasi dalam hal ini misalnya fungsi payoff, strategi yang tersedia, informasi lain yang dimiliki lawannya dan sebagainya, sehingga mempengaruhi fungsi payoff pemain lainnya.

Penerapan permainan bayes salah satunya adalah model duopoli cournot, dimana terdapat dua perusahaan yang terlibat dalam permainan dan output produksi satu perusahaan mempengaruhi output produksi perusahaan lainnya. Masing-masing perusahaan harus menentukan bagaimana ia berproduksi. Secara sederhana mereka dapat menentukan apakah memproduksi dengan output rendah (q_L) atau tinggi (q_H) sehingga mengakibatkan:

1. Jika kedua perusahaan sama-sama menentukan output tinggi (q_H) maka output total (Q) juga tinggi maka harga (P) akan rendah. Dengan demikian laba kedua perusahaan akan sama-sama rendah.

2. Jika perusahaan 1 memproduksi output tinggi (q_H^1) dan perusahaan 2 mem-

produksi output rendah (q_L^2), output total Q akan medium dan harga P juga medium sehingga perusahaan 1 akan memperoleh laba tinggi dan perusahaan 2 mendapat laba rendah. Demikian sebaliknya, jika perusahaan 2 memproduksi output tinggi (q_H^2) dan perusahaan 1 memproduksi output rendah (q_L^1) maka perusahaan 2 akan memperoleh laba tinggi dan perusahaan 1 mendapat laba rendah.

3. Jika kedua perusahaan sama-sama memutuskan output rendah (q_L) maka output total (Q) akan rendah dan harga (P) akan tinggi. Dengan demikian laba kedua perusahaan akan sama-sama tinggi.

Dalam permainan duopoli cournot dengan informasi tak lengkap masing-masing perusahaan tidak mengetahui informasi mengenai perusahaan pesaingnya seperti jumlah pekerja, jumlah bahan baku produksi dan sebagainya. Masing-masing hanya mengetahui biaya marjinalnya sendiri, yaitu kemungkinan rendah (L) atau tinggi (H). Akan tetapi mereka tidak mengetahui biaya pemain lainnya. Dimisalkan $0 \leq c_L < c_H < 1$. Seorang pemain memiliki tipe rendah (L) jika ia memiliki biaya marjinal yang rendah yang dinotasikan c_L. Sebaliknya, tipe tinggi (H) jika biaya marjinalnya tinggi dan dinotasikan sebagai c_H. Informasi mengenai tipe inilah yang mempengaruhi probabilitas perusahaan lainnya dalam menentukan output maksimum agar memperoleh keuntungan yang maksimum pula.

Dimisalkan $\theta^1_{t_1 t_2} > 0$ dinotasikan sebagai probabilitas posterior pemain 1 pada tipe t_1 bahwa pemain lainnya memiliki tipe t_2, demikian juga dengan $\theta^2_{t_1 t_2} > 0$ dinotasikan sebagai probabilitas posterior pemain 2 pada tipe t_2 bahwa pemain lainnya memiliki tipe t_1 untuk $t_n \in \{L, H\}$. Masing-masing tipe perusahaan dapat dilihat sebagai berikut:

		Pemain 2	
		{LL,HL}	{LH,HH}
		L	H
{LL,LH}	L	LL	LH
Pemain 1 {HL,HH}	H	HL	HH

Gambar 3.1: Tipe Pemain

Berdasarkan tabel terlihat bahwa :

- a_{11}=LL yang berarti aksi yang dipilih jika tipe perusahaan 1 adalah L dan perusahaan 2 L.
- a_{21}=HL yang berarti aksi yang dipilih jika tipe perusahaan 1 adalah H dan perusahaan 2 L.
- a_{12}=LH yang berarti aksi yang dipilih jika tipe perusahaan 1 adalah L dan perusahaan 2 H.
- a_{22}=HH yang berarti aksi yang dipilih jika tipe perusahaan 1 adalah H dan perusahaan 2 H.

Diasumsikan fungsi permintaan untuk masing-masing pemain $j \in (1, 2)$ adalah fungsi linier, yaitu

$$P^j = max \left\{1 - q^j - \beta q^k, 0\right\} \tag{3.1}$$

dimana :

- q^j = output yang diproduksi oleh perusahaan j
- q^k = output produksi perusahaan k (perusahaan pesaingnya)

- P^j = harga untuk pemain ke-j

Parameter $\beta \in (0, 1]$ berbanding terbalik pada derajat diferensiasi produk. Diferensiasi produk adalah kegiatan memodifikasi produk agar menjadi lebih menarik. Ketika $\beta = 1$ produk merupakan substitusi sempurna (homogen), β terkecil menyatakan derajat terbesar dari diferensiasi produk.

Sama halnya dengan keseimbangan nash pada permainan lengkap, dimana keseimbangan nash didefinisikan sebagai suatu konsep solusi dari sebuah permainan dimana setiap pemain diasumsikan mengetahui strategi ekuilibrium yang sama dan diasumsikan pula tidak ada pemain yang mendapatkan keuntungan hanya dengan mengubah strategi sendiri secara sepihak, maka dalam permainan tak lengkap pada duopoli cournot terdapat pula keseimbangan nash yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3.1.1. Keseimbangan nash dalam permainan bayesian Cournot adalah profil strategi $(q_L^1, q_H^1, q_L^2, q_H^2)$ sedemikian sehingga untuk semua pemain $j \in (1, 2)$ dan semua tipe $t \in (L, H)$ output q_t^j memaksimalkan laba harapan pemain j pada kondisi keyakinan posteriornya ketika memilih tipe t.

Dimisalkan invers permintaan pada persamaan (3.1) merupakan fungsi linier dan

$$\begin{aligned} \pi_i &= TR - TC \\ &= p_i q_i - c_i q_i \end{aligned}$$

dimana:

- π_i = laba perusahaan i
- TR = penerimaan total yang diterima perusahaan (*total revenue*)

- TC = biaya yang dikeluarkan perusahaan (*total cost*)

maka payoff untuk masing-masing pemain adalah:

$$\begin{aligned} U_t^j(q_j, q_k) &= P_t^j q_t^j - c_t q_t^j \\ &= \left(1 - q_t^j - \beta q^k\right) q_t^j - c_t q_t^j \\ &= \left(1 - q_t^j - \beta q^k - c_t\right) q_t^j \end{aligned}$$

sehingga:

$$\begin{aligned} U_L^1(q_1, q_2) &= \left(1 - q_L^1 - \beta\left(\theta_{LL}^1 q_L^2 + \theta_{LH}^1 q_H^2\right) - c_L\right) q_L^1 \\ U_H^1(q_1, q_2) &= \left(1 - q_H^1 - \beta\left(\theta_{HL}^1 q_L^2 + \theta_{HH}^1 q_H^2\right) - c_H\right) q_H^1 \\ U_L^2(q_1, q_2) &= \left(1 - q_L^2 - \beta\left(\theta_{LL}^2 q_L^1 + \theta_{HL}^2 q_H^1\right) - c_L\right) q_L^2 \\ U_H^2(q_1, q_2) &= \left(1 - q_H^2 - \beta\left(\theta_{LH}^2 q_L^1 + \theta_{HH}^2 q_H^1\right) - c_H\right) q_H^2 \end{aligned}$$

payoff akan maksimum jika $\frac{dU_t^j(q_j, q_k)}{dq_j} = 0$, maka:

output perusahaan 1 dengan tipe L

$$\begin{aligned} \frac{dU_L^1(q^1, q^2)}{q_L^1} &= 1 - 2q_L^1 - \beta\left(\theta_{LL}^1 q_L^2 + \theta_{LH}^1 q_H^2\right) - c_L \\ 0 &= 1 - 2q_L^1 - \beta\left(\theta_{LL}^1 q_L^2 + \theta_{LH}^1 q_H^2\right) - c_L \\ 2q_L^1 &= 1 - c_L - \beta\left(\theta_{LL}^1 q_L^2 + \theta_{LH}^1 q_H^2\right) \\ q_L^1 &= \frac{1 - c_L - \beta\left(\theta_{LL}^1 q_L^2 + \theta_{LH}^1 q_H^2\right)}{2} \qquad (3.2) \end{aligned}$$

output perusahaan 1 dengan tipe H

$$\begin{aligned}
\frac{dU_H^1(q^1,q^2)}{q_H^1} &= 1-2q_H^1-\beta\left(\theta_{HL}^1 q_L^2+\theta_{HH}^1 q_H^2\right)-c_H \\
0 &= 1-2q_H^1-\beta\left(\theta_{HL}^1 q_L^2+\theta_{HH}^1 q_H^2\right)-c_H \\
2q_H^1 &= 1-c_H-\beta\left(\theta_{HL}^1 q_L^2+\theta_{HH}^1 q_H^2\right) \\
q_H^1 &= \frac{1-c_H-\beta\left(\theta_{HL}^1 q_L^2+\theta_{HH}^1 q_H^2\right)}{2} \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

output perusahaan 2 dengan tipe L

$$\begin{aligned}
\frac{dU_L^2(q^1,q^2)}{q_L^2} &= 1-2q_L^2-\beta\left(\theta_{LL}^2 q_L^1+\theta_{HL}^2 q_H^1\right)-c_L \\
0 &= 1-2q_L^2-\beta\left(\theta_{LL}^2 q_L^1+\theta_{HL}^1 q_H^1\right)-c_L \\
2q_L^2 &= 1-c_L-\beta\left(\theta_{LL}^2 q_L^1+\theta_{HL}^2 q_H^1\right) \\
q_L^2 &= \frac{1-c_L-\beta\left(\theta_{LL}^2 q_L^1+\theta_{HL}^2 q_H^1\right)}{2} \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

output perusahaan 2 dengan tipe H

$$\begin{aligned}
\frac{dU_H^2(q^1,q^2)}{q_H^2} &= 1-2q_H^2-\beta\left(\theta_{LH}^2 q_L^1+\theta_{HH}^2 q_H^1\right)-c_H \\
0 &= 1-2q_H^2-\beta\left(\theta_{LH}^2 q_L^1+\theta_{HH}^2 q_H^1\right)-c_H \\
2q_H^2 &= 1-c_H-\beta\left(\theta_{LH}^2 q_L^1+\theta_{HH}^2 q_H^1\right) \\
q_H^2 &= \frac{1-c_H-\beta\left(\theta_{LH}^2 q_L^1+\theta_{HH}^2 q_H^1\right)}{2} \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

dimana $\{q_L^1, q_H^1, q_L^2, q_H^2\}$ merupakan keseimbangan bayesian nash pada model cournot.

Lemma 3.1.1. *Misalkan*

$$c_H \leq 1-\frac{\beta}{2}(1-c_L)$$

maka terdapat keseimbangan nash yang tunggal pada permainan cournot sehingga *untuk setiap* $j \in \{1,2\}$, $q_L^j > q_H^j > 0$ *dan* $P_{HH}^j > P_\omega^j > P_{LL}^j$ *untuk* $\omega \in \{LH, HL\}$.

Bukti: Persamaan (3.2), (3.3), (3.4), dan (3.5) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} 2q_L^1 + \beta\left(\theta_{LL}^1 q_L^2 + \theta_{LH}^1 q_H^2\right) &= 1 - c_L \\ 2q_H^1 + \beta\left(\theta_{HL}^1 q_L^2 + \theta_{HH}^1 q_H^2\right) &= 1 - c_H \\ 2q_L^2 + \beta\left(\theta_{LL}^2 q_L^1 + \theta_{HL}^2 q_H^1\right) &= 1 - c_L \\ 2q_H^2 + \beta\left(\theta_{LH}^2 q_L^1 + \theta_{HH}^2 q_H^1\right) &= 1 - c_H \end{aligned} \tag{3.6}$$

dan persamaan (3.6) diubah ke bentuk matriks

$$Wq = d, \tag{3.7}$$

dimana

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \beta\theta_{LL}^1 & \beta\theta_{LH}^1 \\ 0 & 2 & \beta\theta_{HL}^1 & \beta\theta_{HH}^1 \\ \beta\theta_{LL}^2 & \beta\theta_{HL}^2 & 2 & 0 \\ \beta\theta_{LH}^2 & \beta\theta_{HH}^2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_L^1 \\ q_H^1 \\ q_L^2 \\ q_H^2 \end{pmatrix} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 - c_L \\ 1 - c_H \\ 1 - c_L \\ 1 - c_H \end{pmatrix}$$

Penyelesaian persamaan (3.7) akan memperoleh solusi yang positif untuk setiap q_t^j. Berdasarkan teorema Kaykobad (1985) solusi akan positif jika memenuhi teorema :

Teorema 3.1.1. *Jika*

$$A = (a_{ij}) \geq 0, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n, \quad i \neq j \tag{3.9}$$

$$a_{ii} > 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{3.10}$$

$$b = (b_j) > 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.11}$$

dan untuk setiap $i, i = 1, 2, \cdots, n,$

$$b_i > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \frac{b_j}{a_{jj}} \tag{3.12}$$

maka A *inversibel dan* $A^{-1}b > 0.$

Koefisien baris i dan kolom j pada matriks (3.8) dinotasikan w_{ij} dan d_i dinotasikan sebagai elemen pada d. Dimana $w_{ij} \geq 0$ untuk semua $i \neq j \in \{1, 2, 3, 4\}$ dan $w_{ii} = 2 > 0$ dan $d_i > 0$ untuk $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Kondisi ini memenuhi persamaan dalam teorema kaykobad, yaitu:

$$d_i > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} w_{ij} \frac{d_j}{w_{jj}} \tag{3.13}$$

untuk setiap $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Matriks (3.8) dapat diselesaikan dengan persamaan (3.13) sebagai berikut:

- untuk $i = 1$

$$\begin{aligned} d_1 &> w_{12} \frac{d_2}{w_{22}} + w_{13} \frac{d_3}{w_{33}} + w_{14} \frac{d_4}{w_{44}} \\ (1 - c_L) &> 0 \frac{(1 - c_H)}{2} + \beta\theta_{LL}^1 \frac{(1 - c_L)}{2} + \beta\theta_{LH}^1 \frac{(1 - c_H)}{2} \\ (1 - c_L) &> \frac{\beta\theta_{LL}^1 (1 - c_L) + \beta\theta_{LH}^1 (1 - c_H)}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2(1-c_L) &> \beta\theta^1_{LL}(1-c_L) + \beta\theta^1_{LH}(1-c_H) \\
2(1-c_L) - \beta\theta^1_{LL}(1-c_L) - \beta\theta^1_{LH}(1-c_H) &> 0 \\
(2-\beta\theta^1_{LL})(1-c_L) - \beta\theta^1_{LH}(1-c_H) &> 0 \\
(2-\beta\theta^1_{LL})(1-c_L) &> \beta\theta^1_{LH}(1-c_H) \\
\frac{(2-\beta\theta^1_{LL})(1-c_L)}{\beta\theta^1_{LH}} &> (1-c_H) \\
c_H &> 1 - \frac{(2-\beta\theta^1_{LL})}{\beta\theta^1_{LH}}(1-c_L) \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

- untuk $i = 2$

$$
\begin{aligned}
d_2 &> w_{21}\frac{d_1}{w_{11}} + w_{23}\frac{d_3}{w_{33}} + w_{24}\frac{d_4}{w_{44}} \\
(1-c_H) &> 0\frac{(1-c_L)}{2} + \beta\theta^1_{HL}\frac{(1-c_L)}{2} + \beta\theta^1_{HH}\frac{(1-c_H)}{2} \\
(1-c_H) &> \frac{\beta\theta^1_{HL}(1-c_L) + \beta\theta^1_{HH}(1-c_H)}{2} \\
2(1-c_H) &> \beta\theta^1_{HL}(1-c_L) + \beta\theta^1_{HH}(1-c_H) \\
2(1-c_H) - \beta\theta^1_{HL}(1-c_L) - \beta\theta^1_{HH}(1-c_H) &> 0 \\
(2-\beta\theta^1_{HH})(1-c_H) - \beta\theta^1_{HL}(1-c_L) &> 0 \\
(2-\beta\theta^1_{HH})(1-c_H) > \beta\theta^1_{HL}(1-c_L)(1-c_H) &> \frac{\beta\theta^1_{HL}(1-c_L)}{(2-\beta\theta^1_{HH})} \\
c_H &< 1 - \frac{\beta\theta^1_{HL}}{2-\beta\theta^1_{HH}}(1-c_L) \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

- untuk $i = 3$

$$
\begin{aligned}
d_3 &> w_{31}\frac{d_1}{w_{11}} + w_{32}\frac{d_2}{w_{22}} + w_{34}\frac{d_4}{w_{44}} \\
(1-c_L) &> \beta\theta^2_{LL}\frac{(1-c_L)}{2} + \beta\theta^2_{HL}\frac{(1-c_H)}{2} + 0\frac{(1-c_H)}{2} \\
(1-c_L) &> \frac{\beta\theta^2_{LL}(1-c_L) + \beta\theta^2_{HL}(1-c_H)}{2}
\end{aligned}
$$

$$2(1-c_L) > \beta\theta^2_{LL}(1-c_L) + \beta\theta^2_{HL}(1-c_H)$$
$$2(1-c_L) - \beta\theta^2_{LL}(1-c_L) - \beta\theta^2_{HL}(1-c_H) > 0$$
$$(2-\beta\theta^2_{LL})(1-c_L) - \beta\theta^2_{HL}(1-c_H) > 0$$
$$(2-\beta\theta^2_{LL})(1-c_L) > \beta\theta^2_{HL}(1-c_H)$$
$$\frac{(2-\beta\theta^2_{LL})(1-c_L)}{\beta\theta^2_{HL}} > (1-c_H)$$
$$c_H > 1 - \frac{(2-\beta\theta^2_{LL})}{\beta\theta^2_{HL}}(1-c_L) \tag{3.16}$$

- untuk $i = 4$

$$d_4 > w_{41}\frac{d_1}{w_{11}} + w_{42}\frac{d_2}{w_{22}} + w_{43}\frac{d_3}{w_{33}}$$
$$(1-c_H) > \beta\theta^2_{LH}\frac{(1-c_L)}{2} + \beta\theta^2_{HH}\frac{(1-c_H)}{2} + 0\frac{(1-c_L)}{2}$$
$$(1-c_H) > \frac{\beta\theta^2_{LH}(1-c_L) + \beta\theta^2_{HH}1-c_H)}{2}$$
$$2(1-c_H) > \beta\theta^2_{LH}(1-c_L) + \beta\theta^2_{HH}(1-c_H)$$
$$2(1-c_H) - \beta\theta^2_{LH}(1-c_L) - \beta\theta^2_{HH}(1-c_H) > 0$$
$$(2-\beta\theta^2_{HH})(1-c_H) - \beta\theta^2_{LH}(1-c_L) > 0$$
$$(2-\beta\theta^2_{HH})(1-c_H) > \beta\theta^2_{LH}(1-c_L)$$
$$(1-c_H) > \frac{\beta\theta^2_{LH}(1-c_L)}{(2-\beta\theta^2_{HH})}$$
$$c_H < 1 - \frac{\beta\theta^2_{LH}}{(2-\beta\theta^2_{HH})}(1-c_L) \tag{3.17}$$

kondisi yang memenuhi untuk penyelesaian positif adalah persamaan (3.15) dan (3.17), sehingga persamaannya menjadi

$$c_H < min\left\{1 - \frac{\beta(\theta^1_{HL})}{2-\beta\theta^1_{HH}}(1-c_L), 1 - \frac{\beta(\theta^2_{LH})}{2-\beta\theta^2_{HH}}(1-c_L)\right\} \tag{3.18}$$

karena $\theta^1_{HL} + \theta^1_{HH} = 1$ dan $\theta^2_{LH} + \theta^2_{HH} = 1$, maka persamaan (3.18) menjadi

$$c_H < min\left\{1 - \frac{\beta(1-\theta^1_{HH})}{2-\beta\theta^1_{HH}}(1-c_L), 1 - \frac{\beta(1-\theta^2_{HH})}{2-\beta\theta^2_{HH}}(1-c_L)\right\} \tag{3.19}$$

sementara $(1-\theta^1_{HH})/(2-\beta\theta^1_{HH})$ merupakan fungsi turun pada θ^1_{HH} sebab:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\frac{(1-\theta^1_{HH})}{2-\beta\theta^1_{HH}})}{d(\theta^1_{HH})} &= \frac{-1\,(2-\beta\theta^1_{HH}) + \beta\,(1-\theta^1_{HH})}{4-4\beta\theta^1_{HH}+\beta^2(\theta^1_{HH})^2} \\
&= \frac{\beta\theta^1_{HH} - \theta^1_{HH} - 1}{4-4\beta\theta^1_{HH}+\beta^2(\theta^1_{HH})^2} \\
&= -\frac{1}{4} < 0
\end{aligned}$$

dan $(1-\theta^2_{HH})/(2-\beta\theta^2_{HH})$ fungsi turun pada θ^2_{HH}, sebab

$$\begin{aligned}
\frac{d(\frac{(1-\theta^2_{HH}}{2-\beta\theta^2_{HH}})}{d(\theta^2_{HH})} &= \frac{-1\,(2-\beta\theta^2_{HH}) + \beta\,(1-\theta^2_{HH})}{4-4\beta\theta^2_{HH}+\beta^2(\theta^2_{HH})^2} \\
&= \frac{\beta\theta^2_{HH} - \theta^2_{HH} - 1}{4-4\beta\theta^2_{HH}+\beta^2(\theta^2_{HH})^2} \\
&= -\frac{1}{4} < 0
\end{aligned}$$

selanjutnya:

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta^1_{HH}\to 0} \frac{1-\theta^1_{HH}}{2-\beta\theta^1_{HH}} &= \frac{1-0}{2-\beta(0)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

dan

$$\lim_{\theta^2_{HH}\to 0} \frac{1-\theta^2_{HH}}{2-\beta\theta^2_{HH}} = \frac{1-0}{2-\beta(0)} = \frac{1}{2} \tag{3.21}$$

dengan demikian persamaan (3.19) akan berlaku:

$$c_H < 1 - \frac{\beta}{2}(1-c_L)$$

Selanjutnya, dimisalkan $X^1 = q^1_L - q^1_H$ dan $X^2 = q^2_L - q^2_H$ dan $\theta^1_{LH} + \theta^1_{LL} = 1$, $\theta^1_{HL} + \theta^1_{HH} = 1$, $\theta^2_{HL} + \theta^2_{LL} = 1$, dan $\theta^2_{HH} + \theta^2_{LH} = 1$ dan $S^j = \theta^j_{LL} + \theta^j_{HH}$ untuk setiap $j \in \{1,2\}$ maka persamaan (3.6) dapat ditulis kembali menjadi:

$$2q^1_L = 1 - c_L - \beta\left(\theta^1_{LL}q^2_L + \theta^1_{LH}q^2_H\right) \tag{3.22}$$

$$2q^1_H = 1 - c_H - \beta\left(\theta^1_{HL}q^2_L + \theta^1_{HH}q^2_H\right) \tag{3.23}$$

$$2q^2_L = 1 - c_L - \beta\left(\theta^2_{LL}q^1_L + \theta^2_{HL}q^1_H\right) \tag{3.24}$$

$$2q^2_H = 1 - c_H - \beta\left(\theta^2_{LH}q^1_L + \theta^2_{HH}q^1_H\right) \tag{3.25}$$

persamaan (3.22) dikurang persamaan (3.23) maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
2q^1_L - 2q^1_H &= -c_L + c_H - \beta\left(\theta^1_{LL}q^2_L + \theta^1_{LH}q^2_H\right) + \beta\left(\theta^1_{HL}q^2_L + \theta^1_{HH}q^2_H\right)\\
c_H - c_L &= 2q^1_L - 2q^1_H + \beta\left(\theta^1_{LL}q^2_L + \theta^1_{LH}q^2_H\right) - \beta\left(\theta^1_{HL}q^2_L + \theta^1_{HH}q^2_H\right)\\
c_H - c_L &= 2q^1_L - 2q^1_H + \beta\theta^1_{LL}q^2_L + \beta\theta^1_{LH}q^2_H - \beta\theta^1_{HL}q^2_L - \beta\theta^1_{HH}q^2_H\\
c_H - c_L &= 2q^1_L - 2q^1_H + \beta\theta^1_{LL}q^2_L - \beta\theta^1_{HL}q^2_L + \beta\theta^1_{LH}q^2_H - \beta\theta^1_{HH}q^2_H\\
c_H - c_L &= 2(q^1_L - q^1_H) + \beta q^2_L(\theta^1_{LL} - \theta^1_{HL}) - \beta q^2_H(\theta^1_{HH} - \theta^1_{LH})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_H - c_L &= 2(q_L^1 - q_H^1) + \beta q_L^2(\theta_{LL}^1 - 1 + \theta_{HH}^1) - \beta q_H^2(\theta_{HH}^1 - 1 + \theta_{LL}^1) \\
c_H - c_L &= 2(q_L^1 - q_H^1) + \beta q_L^2(S^1 - 1) - \beta q_H^2(S^1 - 1) \\
c_H - c_L &= 2(q_L^1 - q_H^1) + \beta(S^1 - 1)(q_L^2 - q_H^2) \\
c_H - c_L &= 2X^1 + \beta(S^1 - 1)X^2
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

dan persamaan (3.24) dikurang persamaan (3.25)

$$
\begin{aligned}
2q_L^2 - 2q_H^2 &= -c_L + c_H - \beta\left(\theta_{LL}^2 q_L^1 + \theta_{HL}^2 q_H^1\right) + \beta\left(\theta_{LH}^2 q_L^1 + \theta_{HH}^1 q_H^1\right) \\
c_H - c_L &= 2q_L^1 - 2q_H^1 + \beta\left(\theta_{LL}^2 q_L^1 + \theta_{LH}^2 q_H^1\right) - \beta\left(\theta_{LH}^2 q_L^1 + \theta_{HH}^2 q_H^1\right) \\
c_H - c_L &= 2(q_L^2 - q_H^2) + \beta\theta_{LL}^2 q_L^1 + \beta\theta_{HL}^2 q_H^1 - \beta\theta_{LH}^2 q_L^1 - \beta\theta_{HH}^2 q_H^1 \\
c_H - c_L &= 2(q_L^2 - q_H^2) + \beta\theta_{LL}^2 q_L^1 - \beta\theta_{LH}^2 q_L^1 + \beta\theta_{HL}^2 q_H^1 - \beta\theta_{HH}^2 q_H^1 \\
c_H - c_L &= 2(q_L^2 - q_H^2) + \beta q_L^1(\theta_{LL}^2 - \theta_{LH}^2) - \beta q_H^1(\theta_{HH}^2 - \theta_{HL}^2) \\
c_H - c_L &= 2(q_L^2 - q_H^2) + \beta q_L^1(\theta_{LL}^2 - 1 + \theta_{LH}^2) - \beta q_H^1(\theta_{HH}^2 - 1 + \theta_{LL}^2) \\
c_H - c_L &= 2(q_L^2 - q_H^2) + \beta(S^2 - 1)(q_L^1 - q_H^1) \\
c_H - c_L &= 2X^2 + \beta(S^2 - 1)X^1 \\
c_H - c_L &= \beta(S^2 - 1)X^1 + 2X^2
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Untuk memperoleh penyelesaian maka persamaan linier untuk X^1 dan X^2 diperoleh dengan mengeliminasi persamaan (3.26) dan (3.27).

Untuk X^1, dengan mengalikan persamaan (3.26) dengan 1 dan (3.27) dengan $\frac{1}{2}\beta(S^1 - 1)$, maka kedua persamaan menjadi

$$
2X^1 + \beta(S^1 - 1)X^2 = c_H - c_L \tag{3.28}
$$

dan

$$\frac{\beta^2(S^1-1)(S^2-1)X^1}{2}+\beta(S^1-1)X^2=\frac{\beta(S^1-1)(c_H-c_L)}{2} \tag{3.29}$$

dengan mengeliminasi persamaan (3.28) dan (3.29) diperoleh:

$$\begin{aligned}
2X^1-\frac{\beta^2(S^1-1)(S^2-1)X^1}{2} &= (c_H-c_L)-\frac{\beta(S^1-1)(c_H-c_L)}{2}\\
\Rightarrow \frac{4X^1-\beta^2(S^1-1)(S^2-1)X^1}{2} &= \frac{2(c_H-c_L)-\beta(S^1-1)(c_H-c_L)}{2}\\
\Rightarrow \left[4-\beta^2(S^1-1)(S^2-1)\right]X^1 &= \left[2-\beta^2(S^1-1)\right](c_H-c_L)\\
\Rightarrow \left[4-\beta(1-S^1)(1-S^2)\right]X^1 &= \left[2+\beta^2(1-S^1)\right](c_H-c_L)\\
X^1 &= \frac{\left[2+\beta^2(1-S^1)\right](c_H-c_L)}{\left[4-\beta^2(1-S^1)(1-S^2)\right]} \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

dan untuk X^2, dengan mengalikan persamaan (3.26) dengan $\frac{1}{2}\beta(S^2-1)$ dan (3.27) dengan 1, maka kedua persamaan menjadi

$$\beta(S^2-1)X^1+\frac{\beta^2(S^1-1)(S^2-1)X^2}{2}=\frac{\beta(S^2-1)(c_H-c_L)}{2} \tag{3.31}$$

dan

$$\beta(S^2-1)X^1+2X^2 = c_H-c_L \tag{3.32}$$

dengan mengeliminasi persamaan (3.31) dan (3.32) diperoleh:

$$\begin{aligned}
2X^2-\frac{\beta^2(S^1-1)(S^2-1)X^2}{2} &= (c_H-c_L)-\frac{\beta(S^1-1)(c_H-c_L)}{2}\\
\Rightarrow \frac{4X^2-\beta^2(S^1-1)(S^2-1)X^2}{2} &= \frac{2(c_H-c_L)-\beta(S^2-1)(c_H-c_L)}{2}\\
\Rightarrow \left[4-\beta^2(S^1-1)(S^2-1)\right]X^2 &= \left[2-\beta^2(S^2-1)\right](c_H-c_L)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[4-\beta^2(1-S^1)(1-S^2)\right] X^2 = \left[2+\beta^2(1-S^2)\right](c_H - c_L)$$
$$X^2 = \frac{\left[2+\beta^2(1-S^2)\right](c_H-c_L)}{\left[4-\beta^2(1-S^1)(1-S^2)\right]} \quad (3.33)$$

karena $c_H > c_L$, $\beta = 1$, dan $S^j \leq 1$ maka mengakibatkan $X^1, X^2 > 0$ sehingga $q_L^j > q_H^j$ untuk setiap $j \in \{1,2\}$. Jadi invers fungsi permintaan mengakibatkan $P_{HH}^j > P_{LH}^j > P_{LL}^j$ dan $P_{HH}^j > P_{HL}^j > P_{LL}^j$ untuk setiap $j \in \{1,2\}$

Lema tersebut membuktikan kondisi pada c_H menjamin persamaan (3.6) memiliki solusi yang tunggal dimana semua kuantitas positif. Selain itu, masing-masing pemain memilih output tertinggi ketika memiliki biaya rendah dibanding mereka memiliki biaya tinggi. Hal ini mengakibatkan bahwa harga tertinggi ketika kedua pemain dengan tipe tinggi. Terendah ketika kedua pemain dengan tipe rendah, dan medium ketika mereka memilih tipe yang berbeda. P_ω^j dinotasikan sebagai harga pemain $j \in \{1,2\}$ pada kondisi $\omega \in \Omega$

Definisi 3.1.2. Keyakinan (*belief*) pada dasarnya sama jika setidaknya satu dari pasangan berikut berlaku

$$(i)\begin{cases} \theta_{LL}^1 = \theta_{LL}^2 \\ \theta_{LH}^1 = \theta_{HL}^2 \\ \theta_{HL}^1 = \theta_{LH}^2 \\ \theta_{HH}^1 = \theta_{HH}^2 \end{cases}, (ii)\begin{cases} \theta_{LL}^1 = \theta_{HH}^2 \\ \theta_{LH}^1 = \theta_{LH}^2 \\ \theta_{HL}^1 = \theta_{HL}^2 \\ \theta_{HH}^1 = \theta_{LL}^2 \end{cases}$$

kondisi (i) pasangan pertama memenuhi bahwa keyakinan simetri ketika pemain memiliki tipe t_1, ia yakin bahwa tipe pemain kedua adalah t_2 sama dengan tipe t_1. Demikian juga pemain kedua menganggap bahwa pemain pertama dengan tipe t_2. Kondisi (ii) sama dengan kondisi (i) kecuali L dan H pada pemain kedua berubah.

Definisi 3.1.3. Pemain pertama memiliki keyakinan yang independen (*independent belief*) jika posteriornya tentang tipe pemain lain tidak tergantung pada tipenya sendiri.

$$\theta^1_{LL} = \theta^1_{HL}, \qquad dan \qquad \theta^1_{LH} = \theta^1_{HH}$$

demikian juga dengan pemain kedua,

$$\theta^2_{LL} = \theta^2_{LH}, \qquad dan \qquad \theta^2_{HL} = \theta^2_{HH}$$

Lemma 3.1.2. *Pemain $j \in \{1,2\}$ memiliki keyakinan yang independen jika dan hanya jika*

$$\theta^j_{LL} + \theta^j_{HH} = 1$$

Bukti: Berdasarkan definisi (3.1.3) dan $\theta^1_{LH} + \theta^1_{LL} = 1$, $\theta^1_{HL} + \theta^1_{HH} = 1$, $\theta^2_{HL} + \theta^2_{LL} = 1$, dan $\theta^2_{HH} + \theta^2_{LH} = 1$ maka untuk pemain pertama

$$\begin{aligned} \theta^1_{LL} &= \theta^1_{HL} \\ \theta^1_{LL} &= 1 - \theta^1_{HH} \\ \theta^1_{LL} + \theta^1_{HH} &= 1 \end{aligned} \tag{3.34}$$

dan untuk pemain kedua

$$\begin{aligned} \theta^2_{LL} &= \theta^2_{LH} \\ \theta^2_{LL} &= 1 - \theta^2_{HH} \\ \theta^2_{LL} + \theta^2_{HH} &= 1 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Δ didefinisikan sebagai $\Delta = \theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1 - \theta^2_{LL} - \theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1 - \theta^1_{LL} -$

θ^1_{HH}). Secara intuisi Δ mengukur sejauh mana keyakinan berasal dari kekonsistenan probabilitas priornya.

Lemma 3.1.3. *Dalam model cournot, keyakinan konsisten jika dan hanya jika* $\Delta = 0$

Bukti: Menurut Rodrigues-Neto (2006) siklus persamaan yang berlaku untuk model Cournot adalah

$$\theta^1_{LH}\theta^2_{HH}\theta^1_{HL}\theta^2_{LL} = \theta^2_{HL}\theta^1_{HH}\theta^2_{LH}\theta^1_{LL}$$

sehingga persamaan tersebut dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{\theta^1_{LH}\theta^1_{HL}}{\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}} = \frac{\theta^2_{HL}\theta^2_{LH}}{\theta^2_{LL}\theta^2_{HH}}$$

substitusi $\theta^1_{LH} = 1 - \theta^1_{LL}$, $\theta^1_{HL} = 1 - \theta^1_{HH}$, $\theta^2_{HL} = 1 - \theta^2_{LL}$, dan $\theta^2_{LH} = 1 - \theta^2_{HH}$, maka didapat

$$\begin{gathered}
\tfrac{(1-\theta^1_{LL})(1-\theta^1_{HH})}{\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}} = \tfrac{(1-\theta^2_{LL})(1-\theta^2_{HH})}{\theta^2_{LL}\theta^2_{HH}} \\
\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL})(1-\theta^2_{HH}) = \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL})(1-\theta^1_{HH}) \\
\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}\theta^1_{LL}\theta^1_{HH} = \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}\theta^1_{LL}\theta^1_{HH} \\
\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) = \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) \\
\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) = 0 \\
\Delta = 0
\end{gathered}$$

Definisi 3.1.4. Aksi dikatakan simetri jika $Q_{LH} = Q_{HL}$

Aksi dikatakan simetri jika output total tidak tergantung pada perusahaan mana yang memiliki biaya rendah atau pun yang memiliki biaya tinggi.

Dalam hal ini berarti strategi yang dipilih oleh tiap perusahaan akan simetri tanpa memperhatikan mana perusahaan yang memiliki fungsi biaya rendah atau tinggi. Dengan jumlah output yang dihasilkan sama maka dalam hal ini juga berakibat bahwa harga untuk output perusahaan akan sama yaitu $P^j_{LH} = P^k_{HL}$ untuk setiap $j, k \in \{1, 2\}$.

Lemma 3.1.4. *Rasio selisih antara* Q_{LH} dan Q_{HL} *dengan selisih antara biaya marjinal yang tinggi dan rendah diberikan oleh*:

$$\frac{Q_{LH} - Q_{HL}}{c_H - c_L} = \frac{\beta\left[(\theta^2_{LL} + \theta^2_{HH}) - (\theta^1_{LL} + \theta^1_{HH})\right]}{4 - \beta^2(1 - \theta^1_{LL} - \theta^1_{HH})(1 - \theta^2_{LL} - \theta^2_{HH})} \tag{3.36}$$

terutama, aksi simetri berlaku jika dan hanya jika

$$\theta^1_{LL} + \theta^1_{HH} = \theta^2_{LL} + \theta^2_{HH} \tag{3.37}$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\frac{Q_{LH} - Q_{HL}}{c_H - c_L} &= \frac{q^1_L + q^2_H - (q^1_H + q^2_L)}{c_H - c_L}\\ &= \frac{X^1 - X^2}{c_H - c_L}\end{aligned}$$

substitusi dari persamaan (3.30) dan (3.33)

$$\begin{aligned}\frac{Q_{LH} - Q_{HL}}{c_H - c_L} &= \frac{\frac{\left[2+\beta(1-S^1)\right](c_H-c_L)-\left[2+\beta(1-S^2)\right](c_H-c_L)}{4-\beta^2(1-S^1)(1-S^2)}}{c_H - c_L}\\ &= \frac{\frac{\left[2+\beta(1-S^1)-2-\beta(1-S^2)\right](c_H-c_L)}{4-\beta^2(1-S^1)(1-S^2)}}{c_H - c_L}\\ &= \frac{2 + \beta - \beta S^1 - 2 + \beta S^2}{4 - \beta^2(1 - S^1)(1 - S^2)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\beta S^2 - \beta S^1}{4 - \beta^2(1-S^1)(1-S^2)} \\
&= \frac{\beta (S^2 - S^1)}{4 - \beta^2(1-S^1)(1-S^2)}
\end{aligned}
$$

dengan $S^j = \theta^j_{LL} + \theta^j_{HH}$ maka

$$
\frac{Q_{LH} - Q_{HL}}{c_H - c_L} = \frac{\beta\left[(\theta^2_{LL} + \theta^2_{HH}) - (\theta^1_{LL} + \theta^1_{HH})\right]}{4 - \beta^2(1 - \theta^1_{LL} - \theta^1_{HH})(1 - \theta^2_{LL} - \theta^2_{HH})}
$$

berdasarkan definisi (3.1.4) bahwa $Q_{LH} = Q_{HL}$ maka $Q_{LH} - Q_{HL} = 0$ sehingga

$$
\begin{aligned}
\frac{0}{c_H - c_L} &= \frac{\beta\left[(\theta^2_{LL} + \theta^2_{HH}) - (\theta^1_{LL} + \theta^1_{HH})\right]}{4 - \beta^2(1 - \theta^1_{LL} - \theta^1_{HH})(1 - \theta^2_{LL} - \theta^2_{HH})} \\
0 &= \frac{\beta\left[(\theta^2_{LL} + \theta^2_{HH}) - (\theta^1_{LL} + \theta^1_{HH})\right]}{4 - \beta^2(1 - \theta^1_{LL} - \theta^1_{HH})(1 - \theta^2_{LL} - \theta^2_{HH})} \\
\beta\left[(\theta^2_{LL} + \theta^2_{HH}) - (\theta^1_{LL} + \theta^1_{HH})\right] &= 0
\end{aligned}
$$

untuk $\beta = 1$, maka

$$
\begin{aligned}
(\theta^2_{LL} + \theta^2_{HH}) - (\theta^1_{LL} + \theta^1_{HH}) &= 0 \\
\theta^1_{LL} + \theta^1_{HH} &= \theta^2_{LL} + \theta^2_{HH}
\end{aligned}
$$

Proposisi 3.1.1. *Aksi simetri dan keyakinan simetri jika dan hanya jika keyakinan sama atau kedua pemain memilliki keyakinan independen.*

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa aksi simetri. Jika aksi simetri maka haruslah $\Delta = 0$ dan $S^1 = S^2$. Andaikan $S^1 = 1$ maka $S^2 = 1$. Berdasarkan lemma (3.1.2) maka dapat disimpulkan bahwa kedua pemain memiliki keyakinan yang independen. Jika $S^1 \neq 1$ maka $S^2 \neq 1$, dengan $\Delta = 0$ akan ditunjukkan bahwa

$M^1 = M^2$:

$$\begin{aligned}
\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) &= 0 \\
\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) &= \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) \\
M^1(1-S^2) &= M^2(1-S^1) \\
M^1 &= M^2
\end{aligned} \tag{3.38}$$

karena $M^1 = M^2$ maka keyakinan kedua pemain sama.

Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa keyakinan sama atau kedua pemain memiliki keyakinan yang independen. Pertama diasumsikan keyakinan sama, yakni $M^1 = M^2$ maka

$$\begin{aligned}
M^1 &= M^2 \\
M^1(1-S^2) &= M^2(1-S^1) \\
\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) &= \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) \\
\theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) &= 0 \\
\Delta &= 0
\end{aligned}$$

karena $\Delta = 0$ maka keyakinan konsisten. Karena $M^1 = M^2$ pula maka

$$\begin{aligned}
M^1 &= M^2 \\
M^1(1-S^2) &= M^2(1-S^1) \\
1-S^2 &= 1-S^1 \\
S^1 &= S^2
\end{aligned}$$

maka aksi simetri.

Proposisi 3.1.2. *Pemain memiliki keyakinan yang independen dan keyakinannya konsisten jika dan hanya jika pemain lainnya memiliki keyakinan independen dan aksi simetri.*

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa keyakinan pemain kedua independen dan aksi simetri. Karena keyakinan pemain pertama independen maka $S^1 = 1$ dan keyakinannya konsisten maka $\Delta = 0$, sehingga:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) \\
0 &= \theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) \\
0 &= M^1(1-S^2) - M^2(1-S^1) \\
0 &= M^1(1-S^2)
\end{aligned}$$

jika $M^1 > 0$ maka $1 - S^2 = 0$ sehingga $S^2 = 1$ yang artinya keyakinan pemain kedua independen. Karena $S^1 = S^2$, berdasarkan lemma (3.1.4) maka aksi simetri.

Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa keyakinan pemain pertama independen dan aksi simetri. Berdasarkan lemma (3.1.2) jika keyakinan pemain kedua independen, maka $S^2 = 1$ dan keyakinannya konsisten maka $\Delta = 0$, sehingga:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) \\
0 &= \theta^1_{LL}\theta^1_{HH}(1-\theta^2_{LL}-\theta^2_{HH}) - \theta^2_{LL}\theta^2_{HH}(1-\theta^1_{LL}-\theta^1_{HH}) \\
0 &= M^1(1-S^2) - M^2(1-S^1) \\
0 &= M^2(1-S^1)
\end{aligned}$$

jika $M^2 > 0$ maka $1 - S^1 = 0$ sehingga $S^1 = 1$ yang artinya keyakinan pemain pertama independen. Karena $S^1 = S^2$, berdasarkan lemma (3.1.4) maka aksi simetri.

Akibat 3.1.1. 1. *Jika seorang pemain memiliki keyakinan independen maka konsistensi keyakinan, aksi simetri dan keindependenan pemain lainnya equivalen.*

2. *Jika keyakinan konsisten dan keyakinan tak sama (keyakinan kedua pemain tidak independen), maka aksi simetri dan keindependenan kedua pemain equivalen.*

3. *Jika aksi simetri dan keyakinan tak sama, maka konsistensi dan keindependenan kedua pemain equivalen.*

3.2 Contoh Kasus

Di suatu kota terdapat dua perusahaan yang bergerak di bidang makanan cepat saji. Kedua perusahaan memproduksi barang yang homogen. Tidak ada informasi yang diketahui masing-masing perusahaan seperti waktu berproduksi, jumlah pekerja, jumlah bahan baku, dan sebagainya sehingga jumlah output yang dihasilkan pun tak dapat diprediksi. Masing-masing perusahaan hanya mengetahui dengan pasti biaya marjinalnya sendiri, tetapi tidak mengetahui biaya perusahaan pesaingnya. Ia beranggapan bahwa perusahaan pesaingnya memiliki biaya marjinal yang kemungkinan rendah atau tinggi. Setiap perusahaan beranggapan bahwa output yang dipilih lawannya pada saat ini akan sama dengan sebelumnya dan kedua perusahaan memaksimumkan saat ini. Jika setiap perusahaan mengetahui fungsi permintaan pasar adalah $P = 1 - Q = 1 - q_1 - q_2$ dan probabilitas bersyarat masing-masing perusahaan memilih tipenya adalah jika kedua perusahaan memilih tipe yang sama adalah $\frac{3}{8}$ dan kedua perusahaan ketika tipe berbeda adalah $\frac{1}{8}$ yang disajikan pada tabel berikut :

		Perusahaan 2	
		L	H
	L	3/8	1/8
Perusahaan 1	H	1/8	3/8

Tabel 3.1: Probabilitas masing-masing tipe pemain

1. Bagaimana keseimbangan bayesian cournotnya?
2. Apakah kedua perusahaan memiliki keyakinan yang independen
3. Apakah aksi yang dilakukan kedua perusahaan simetri?
4. Apakah keyakinan kedua perusahaan konsisten?

Penyelesaian:

Model permainan duopoli cournot:

	Pemain pertama	Pemain kedua
T_i	$\{L, H\}$	$\{L, H\}$
τ_i	L, H	L, H
A_i	$\Re_+, q_1 \in A_1$	$\Re_+, q_2 \in A_2$
u_i	$u_i(q_1, q_2, c_t) = q_1(1 - q_1 - q_2 - c_t)$ $t = L, H$	$u_i(q_1, q_2, c_t) = q_2(1 - q_1 - q_2 - c_t)$ $t = L, H$

$\Omega = \{LL, LH, HL, HH\}$ dan $\mu(c_L) = \mu(c_H) = \frac{1}{2}$ dimisalkan pula c_t merupakan tipe perusahaan pertama dan C_t tipe perusahaan kedua dimana $t \in (L, H)$

Probabilitas posterior untuk masing-masing tipe:

$$
\begin{aligned}
\theta^1_{LL} = \mu(c_L|C_L) &= \frac{\mu(C_L|c_L)\mu(c_L)}{\mu(C_L|c_L)\mu(c_L) + \mu(C_L|c_H)\mu(c_H)} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{3}{4} \\
\theta^1_{LH} = \mu(c_L|C_H) &= \frac{\mu(C_H|c_L)\mu(c_L)}{\mu(C_H|c_L)\mu(c_L) + \mu(C_H|c_H)\mu(c_H)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{1}{4} \\
\theta^1_{HL} = \mu(c_H|C_L) &= \frac{\mu(C_L|c_H)\mu(c_H)}{\mu(C_L|c_H)\mu(c_H) + \mu(C_L|c_L)\mu(c_L)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{1}{4} \\
\theta^1_{HH} = \mu(c_H|C_H) &= \frac{\mu(C_H|c_H)\mu(c_H)}{\mu(C_H|c_H)\mu(c_H) + \mu(C_H|c_L)\mu(c_L)} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{16}} = \frac{3}{4} \\
\theta^2_{LL} = \mu(C_L|c_L) &= \frac{\mu(c_L|C_L)\mu(C_L)}{\mu(c_L|C_L)\mu(C_L) + \mu(c_L|C_H)\mu(C_H)} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{3}{4} \\
\theta^2_{HL} = \mu(C_L|c_H) &= \frac{\mu(c_H|C_L)\mu(C_L)}{\mu(c_H|C_L)\mu(C_L) + \mu(c_H|C_H)\mu(C_H)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{1}{4} \\
\theta^2_{LH} = \mu(C_H|c_L) &= \frac{\mu(c_L|C_H)\mu(C_H)}{\mu(c_L|C_H)\mu(C_H) + \mu(c_L|C_L)\mu(C_L)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\theta^2_{HH} = \mu(C_H|c_H) &= \frac{\mu(c_H|C_H)\mu(C_H)}{\mu(c_H|C_H)\mu(C_H) + \mu(c_H|C_L)\mu(C_L)} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

1. Berdasarkan persamaan (3.2), (3.3), (3.4), dan (3.5) keseimbangan bayes dalam kasus ini adalah :

   - Output perusahaan 1 dengan tipe L

$$\begin{aligned}
q^1_L &= \frac{1 - c_L - \beta\left(\theta^1_{LL} q^2_L + \theta^1_{LH} q^2_H\right)}{2} \\
&= \frac{1 - c_L - (1)\left(\frac{3}{4} q^2_L + \frac{1}{4} q^2_H\right)}{2} \\
&= \frac{1 - c_L - \left(\frac{3}{4} q^2_L + \frac{1}{4} q^2_H\right)}{2}
\end{aligned}$$

   - Output perusahaan 1 dengan tipe H

$$\begin{aligned}
q^1_H &= \frac{1 - c_H - \beta\left(\theta^1_{HL} q^2_L + \theta^1_{HH} q^2_H\right)}{2} \\
&= \frac{1 - c_H - (1)\left(\frac{1}{4} q^2_L + \frac{3}{4} q^2_H\right)}{2} \\
&= \frac{1 - c_H - \left(\frac{1}{4} q^2_L + \frac{3}{4} q^2_H\right)}{2}
\end{aligned}$$

   - Output perusahaan 2 dengan tipe L

$$\begin{aligned}
q^2_L &= \frac{1 - c_L - \beta\left(\theta^2_{LL} q^1_L + \theta^2_{HL} q^1_H\right)}{2} \\
&= \frac{1 - c_L - (1)\left(\frac{3}{4} q^1_L + \frac{1}{4} q^1_H\right)}{2} \\
&= \frac{1 - c_L - \left(\frac{3}{4} q^1_L + \frac{1}{4} q^1_H\right)}{2}
\end{aligned}$$

- Output perusahaan 2 dengan tipe H

$$\begin{aligned} q_H^2 &= \frac{1 - c_H - \beta\left(\theta_{LH}^1 q_L^1 + \theta_{HH}^1 q_H^1\right)}{2} \\ &= \frac{1 - c_H - (1)\left(\frac{1}{4}q_L^1 + \frac{3}{4}q_H^1\right)}{2} \\ &= \frac{1 - c_H - \left(\frac{1}{4}q_L^1 + \frac{3}{4}q_H^1\right)}{2} \end{aligned}$$

substitusi keempat persamaan tersebut sehigga menghasilkan:

$$\begin{aligned} 2q_L^1 = 1 - c_L - \frac{3}{4}\left(\frac{1 - c_L - \frac{3}{4}q_L^1 - \frac{1}{4}q_H^1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1 - c_H - \frac{1}{4}q_L^1 - \frac{3}{4}q_H^1}{2}\right) \\ 2q_L^1 = 1 - c_L - \frac{3}{8}\left(1 - c_L - \frac{3}{4}q_L^1 - \frac{1}{4}q_H^1\right) - \frac{1}{8}\left(1 - c_H - \frac{1}{4}q_L^1 - \frac{3}{4}q_H^1\right) \\ 2q_L^1 = 1 - c_L - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}c_L + \frac{9}{32}q_L^1 + \frac{3}{32}q_H^1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}c_H + \frac{1}{32}q_L^1 + \frac{3}{32}q_H^1 \\ 2q_L^1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{8}c_L + \frac{1}{8}c_H + \frac{10}{32}q_L^1 + \frac{6}{32}q_H^1 \\ 2q_L^1 - \frac{10}{32}q_L^1 - \frac{6}{32}q_H^1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{8}c_L + \frac{1}{8}c_H \\ \frac{54}{32}q_L^1 - \frac{6}{32}q_H^1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{8}c_L + \frac{1}{8}c_H \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned} 2q_H^1 = 1 - c_H - \frac{1}{4}\left(\frac{1 - c_L - \frac{3}{4}q_L^1 - \frac{3}{4}q_H^1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1 - c_H - \frac{1}{4}q_L^1 - \frac{3}{4}q_H^1}{2}\right) \\ 2q_H^1 = 1 - c_H - \frac{1}{8}\left(1 - c_L - \frac{3}{4}q_L^1 - \frac{1}{4}q_H^1\right) - \frac{3}{8}\left(1 - c_H - \frac{1}{4}q_L^1 - \frac{3}{4}q_H^1\right) \\ 2q_H^1 = 1 - c_L - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}c_L + \frac{3}{32}q_L^1 + \frac{1}{32}q_H^1 - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}c_H + \frac{3}{32}q_L^1 + \frac{9}{32}q_H^1 \\ 2q_H^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}c_L - \frac{5}{8}c_H + \frac{6}{32}q_L^1 + \frac{10}{32}q_H^1 \\ 2q_H^1 - \frac{10}{32}q_H^1 - \frac{6}{32}q_L^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}c_L - \frac{5}{8}c_H \end{aligned}$$

$$\frac{54}{32}q_H^1 - \frac{6}{32}q_L^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}c_L - \frac{5}{8}c_H \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
2q_L^2 &= 1 - c_L - \frac{3}{4}\left(\frac{1 - c_L - \frac{3}{4}q_L^2 - \frac{1}{4}q_H^2}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1 - c_H - \frac{1}{4}q_L^2 - \frac{3}{4}q_H^2}{2}\right) \\
2q_L^2 &= 1 - c_L - \frac{3}{8}\left(1 - c_L - \frac{3}{4}q_L^2 - \frac{1}{4}q_H^2\right) - \frac{1}{8}\left(1 - c_H - \frac{1}{4}q_L^2 - \frac{3}{4}q_H^2\right) \\
2q_L^2 &= 1 - c_L - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}c_L + \frac{9}{32}q_L^2 + \frac{3}{32}q_H^2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}c_H + \frac{1}{32}q_L^2 + \frac{3}{32}q_H^2 \\
2q_L^2 &= \frac{1}{2} - \frac{5}{8}c_L + \frac{1}{8}c_H + \frac{10}{32}q_L^2 + \frac{6}{32}q_H^2 \\
2q_L^2 - \frac{10}{32}q_L^2 - \frac{6}{32}q_H^2 &= \frac{1}{2} - \frac{5}{8}c_L + \frac{1}{8}c_H \\
\frac{54}{32}q_L^1 - \frac{6}{32}q_H^1 &= \frac{1}{2} - \frac{5}{8}c_L + \frac{1}{8}c_H
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
2q_H^2 &= 1 - c_H - \frac{1}{4}\left(\frac{1 - c_L - \frac{3}{4}q_L^2 - \frac{3}{4}q_H^2}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1 - c_H - \frac{1}{4}q_L^2 - \frac{3}{4}q_H^2}{2}\right) \\
2q_H^2 &= 1 - c_H - \frac{1}{8}\left(1 - c_L - \frac{3}{4}q_L^2 - \frac{1}{4}q_H^2\right) - \frac{3}{8}\left(1 - c_H - \frac{1}{4}q_L^2 - \frac{3}{4}q_H^2\right) \\
2q_H^2 &= 1 - c_L - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}c_L + \frac{3}{32}q_L^2 + \frac{1}{32}q_H^2 - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}c_H + \frac{3}{32}q_L^2 + \frac{9}{32}q_H^2 \\
2q_H^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}c_L - \frac{5}{8}c_H + \frac{6}{32}q_L^2 + \frac{10}{32}q_H^2 \\
2q_H^2 - \frac{10}{32}q_H^2 - \frac{6}{32}q_L^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}c_L - \frac{5}{8}c_H \\
\frac{54}{32}q_H^2 - \frac{6}{32}q_L^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}c_L - \frac{5}{8}c_H
\end{aligned} \tag{3.42}$$

substitusi persamaan (3.39) dengan (3.40) dan (3.41) dengan (3.42), sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} q_L^1 &= \frac{1}{3} - \frac{11}{30}c_L + \frac{1}{30}c_H \\ q_H^1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{30}c_L - \frac{11}{30}c_H \\ q_L^2 &= \frac{1}{3} - \frac{11}{30}c_L + \frac{1}{30}c_H \\ q_H^2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{30}c_L - \frac{11}{30}c_H \end{aligned}$$

2. Karena

$$\begin{aligned} \theta_{HH}^1 + \theta_{LL}^1 &= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \\ \theta_{HH}^2 + \theta_{LL}^2 &= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

berdasarkan lemma (3.1.2) maka keyakinan masing-masing tak independen.

3. Karena

$$\theta_{HH}^1 + \theta_{LL}^1 = \theta_{HH}^2 + \theta_{LL}^2$$

berdasarkan lemma (3.1.4) maka aksi yang dipilih kedua pemain simetri.

4. Karena

$$\begin{aligned} \Delta &= \theta_{LL}^1\theta_{HH}^1(1 - \theta_{LL}^2 - \theta_{HH}^2) - \theta_{LL}^2\theta_{HH}^2(1 - \theta_{LL}^1 - \theta_{HH}^1) \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

berdasarkan lemma (3.1.3) maka keyakinan konsisten.