Bab 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu dari banyaknya bagian ilmu matematika. Seperti namanya, teori graf tentu saja berisi tentang semua yang berhubungan dengan graf. Graf bisa disebut dengan kumpulan objek teratur dimana beberapa pasangan objek memiliki hubungan atau saling terkait (Mushthofa, 2021). Lebih jelasnya, graf adalah kumpulan objek-objek yang dinamakan titik (*vertex*), dimana titik-titik tersebut terhubung dengan sisi (*edge*). Graf biasa dibentuk atau digambar seperti kumpulan garis atau garis berpanah yang menghubungkan kumpulan titik (*vertex*). Garis yang menyambungkan satu titik dengan titik yang sama dinamakan gelang (*loop*).

Dengan bantuan graf, banyak sekali struktur yang dapat direpresentasikan dan banyak permasalahan yang dapat diselesaikan. Seperti pada media sosial *Facebook*, jaringan pertemanan di dalam *Facebook* ini bisa direpresentasikan dengan graf, yaitu titik-titiknya adalah pengguna *Facebook* dan diantara pengguna ada sisi jika dan hanya jika mereka saling berteman. Contoh lainnya yaitu seperti dalam pembuatan peta, dimana satu kota dihubungkan jalan atau sarana transportasi dengan kota lainnya.

Suatu graf $G = (V, E)$ terdiri dari himpunan $V = \{v_1, v_2, ...\}$ yang disebut kumpulan titik, yang mana V merupakan himpunan titik tak-kosong dan himpunan $E = \{e_1, e_2, ...\}$, dimana E merupakan kumpulan sisi yang menyambungkan pasangan titik. Suatu deretan sisi-sisi yang tidak putus dan membentuk suatu sambungan pada G disebut jalan (*walk*). Apabila deretan sisi-sisi pada jalan tak berulang disebut jalur (*trail*). Deretan titik-titik pada jalur yang tak berulang disebut juga lintasan (*path*). Bila terdapat suatu lintasan pada graf tidak-berarah yang menghubungkan setiap simpul di G maka disebut graf terhubung.

Pewarnaan graf termasuk ke dalam kasus khusus dari pelabelan graf. Maksud dari pelabelan sendiri adalah meninggalkan warna pada titik atau batas yang ditentukan. Ada 3 pewarnaan pada graf, yakni pewarnaan titik, wilayah dan sisi. Pada pewarnaan graf, bukan hanya sekedar memberikan warna berbeda pada titik yang berdekatan, melainkan juga diinginkan banyak warna yang diberikan seminimal mungkin. Konsep pewarnaan ini terus mengalami perkembangan, salah satu perkembangannya yaitu pelangi terhubung yang pertama kali dikenalkan oleh Chartrand, dkk pada tahun 2006.

Pelangi terhubung ini dibagi menjadi 2 jenis, yaitu pelangi titik terhubung dan pelangi sisi terhubung. Pewarnaan di graf $G = (V(G), E(G))$ disebut terhubung titik pelangi apabila pada tiap dua titik yang berbeda u dan v di G, terdapat jalur pelangi yaitu lintasan $u - v$ dimana semua titik warnanya berbeda. $Rc(G)$ merupakan notasi dari bilangan terhubung pelangi, yaitu minimal warna yang dipakai sehingga G terhubung pelangi. Bilangan terhubung pelangi juga mengalami perkembangan seperti bilangan terhubung pelangi kuat dan bilangan terhubung pelangi total.

Untuk titik u dan v di G, sebuah pelangi geodesik $u - v$ pada G adalah jalur pelangi $u - v$ yang panjangnya $d(u, v)$, yaitu jarak diantara u dan v. Dengan kata lain pelangi geodesik adalah panjang lintasan terpendek di G yang diwarnai sesuai dengan aturan pewarnaan pelangi kuat. Graf G disebut terhubung pelangi kuat jika G memiliki sebuah pelangi geodesik $u - v$ di tiap dua titik u dan v di graf G. Minimal k warna di dalam pewarnaan $c : E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ pada sisi G maka G terhubung pelangi kuat disebut bilangan terhubung pelangi kuat, yang dinotasikan dengan $src(G)$.

Penelitian terkait bilangan terhubung pelangi sudah banyak dikembangkan oleh peneliti-peneliti terdahulu dengan bermacam-macam graf. Berikut akan dipaparkan beberapa hasil penelitian yang sudah pernah dilakukan. Pertama, penelitian yang membahas tentang bilangan terhubung pelangi pada graf gurita dan *planter* (Joko dkk, 2019). Graf gurita (O_n) merupakan gabungan dari dua buah graf antara graf kipas dan graf bintang dengan berbagi satu titik yang sama. Banyak titik pada graf ini yaitu $2n + 1$ dan banyak sisinya yaitu $3n - 1$. Sedangkan Graf *planter* (R_n) merupakan gabungan dari dua buah graf antara graf kipas dan graf sikel dengan berbagi satu titik yang sama. Banyak titik pada graf ini yaitu $2n$ dan sisinya $3n - 1$. Berdasarkan penelitian tersebut, didapatkan kesimpulan bahwa bilangan terhubung pelangi dari graf gurita adalah $rc(O_2) =$

3, $rc(O_{n\geq 3}) = n$ dan bilangan terhubung pelangi dari graf *planter* adalah $rc(R_3) = 2, rc(R_4) = 3, rc(R_{n\geq 5}) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Selanjutnya adalah penelitian yang membahas tentang bilangan terhubung pelangi pada graf *ferris wheel* (Lakisa dkk, 2020). Graf *ferris wheel* merupakan gabungan dari graf sikel dan graf roda dengan menambahkan sisi sebanyak $2n$ disebut graf *ferris wheel* Fw_n dengan banyak titik $2n+1$ dan banyak sisi $5n$. Penelitian ini menghasilkan nilai bilangan terhubung pelangi pada graf *ferris wheel* Fw_n yakni $rc(Fw_3, Fw_4) = 2$, $rc(Fw_5, Fw_6) = 3$, $rc(Fw_7, Fw_8) = 4$, $rc(Fw_9, Fw_{10}) = 5$ dan $rc(Fw_n) = j+6$ jika $n = 3j+11, 3j+12, 3j+13$ untuk $j \geq 0$.

Kedua hasil penelitian yang telah dilakukan terhadap graf tersebut baru didapatkan nilai bilangan terhubung pelangi ($rc(G)$) dan belum didapatkan nilai bilangan terhubung pelangi kuat ($src(G)$). Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengembangkan penelitian dari penelitian sebelumnya tersebut dengan mencari bilangan terhubung pelangi kuat ($src(G)$).

1.2 Rumusan Masalah

Perumusan masalah yang akan dibahas pada skripsi ini yaitu:

1. Bagaimana bentuk rumus umum bilangan terhubung pelangi kuat pada graf gurita?
2. Bagaimana bentuk rumus umum bilangan terhubung pelangi kuat pada graf *planter*?
3. Bagaimana bentuk rumus umum bilangan terhubung pelangi kuat pada graf *ferris wheel*?

1.3 Batasan Masalah

Pada tulisan ini, penulis membatasi penelitian pada graf sederhana, terhubung, dan tidak berarah yaitu graf gurita (O_n) dengan $n \geq 2$, *planter* (R_n) dengan $n \geq 3$, dan *ferris wheel* dengan $3 \leq n \leq 6$, serta pewarnaan yang digunakan pada graf yaitu pewarnaan pada sisi.

1.4 Tujuan Penelitian

1. Mengetahui bentuk rumus umum bilangan terhubung pelangi kuat graf gurita
2. Mengetahui bentuk rumus umum bilangan terhubung pelangi kuat graf *planter*
3. Mengetahui bentuk rumus umum bilangan terhubung pelangi kuat graf *ferris wheel*

1.5 Manfaat Penelitian

Pada pembahasan ini, penulis mengharapkan karya tulis ini dapat memberikan pengetahuan, ilmu serta menambah ketertarikan orang yang membaca tulisan ini terkait isi dari tulisan yang penulis susun. Selain itu, diharapkan penelitian ini dapat melengkapi hasil-hasil penelitian sebelumnya dengan topik serupa dan memberi motivasi pada peneliti lain untuk melakukan penelitian lebih lanjut.

1.6 Metode Penelitian

Dalam tulisan ini metode yang digunakan adalah studi pustaka, seperti mencari, membaca, merangkum dan mempelajari beberapa jurnal ataupun buku tentang bilangan terhubung pelangi kuat atau topik-topik lainnya yang berkaitan.