

NILAI BANDWIDTH PADA GRAF UBUR-UBUR

Skripsi

**Disusun untuk memenuhi salah satu syarat
memperoleh gelar Sarjana Matematika**



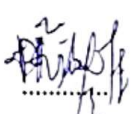
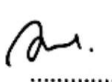
**Adibah Humaira
1305621030**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA
2026**

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

Nilai Bandwidth Pada Graf Ubur-Ubur

Nama : Adibah Humaira
No. Registrasi : 1305621030

	Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab Dekan	: Dr. Hadi Nasbey, S.Pd., M.Si. NIP. 197909162005011004		26/01/2026
Wakil Penanggung Jawab Wakil Dekan I	: Dr. Meiliasari, S.Pd., M.Sc. NIP. 197905042009122002		26/01/2026
Ketua	: Ibnu Hadi, M.Si. NIP.198107182008011017		14/01/2026
Sekretaris	: Dr. Eti Dwi Wiraningsih, S.Pd., M.Si. NIP.198102032006042001		15/01/2026
Penguji Ahli	: Drs. Sudarwanto, M.Si., DEA. NIP.196503251993031003		15/01/2026
Pembimbing I	: Devi Eka Wardani M., S.Pd., M.Si. NIP.199005162019032014		19/01/2026
Pembimbing II	: Dr. Yudi Mahatma, M.Si. NIP.197610202008121001		15/01/2026

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal 23 Desember 2025

LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama : Adibah Humaira
No Registrasi : 1305621030
Program Studi : Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi yang saya buat dengan judul "*Nilai Bandwidth pada Graf Ubur-Ubur*" adalah:

1. Dibuat sendiri, mengadopsi hasil kuliah, buku-buku, dan referensi acuan yang tertera di dalam referensi pada skripsi saya.
2. Bukan merupakan hasil duplikasi skripsi yang telah dipublikasikan atau pernah dipakai untuk mendapatkan gelar sarjana di Universitas lain kecuali pada bagian-bagian sumber informasi dicantumkan berdasarkan tata cara referensi yang semestinya.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, 15 Desember 2025



Adibah Humaira



KEMENTERIAN PENDIDIKAN TINGGI, SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA
PERPUSTAKAAN DAN KEARSIPAN

Jalan Rawamangun Muka Jakarta 13220
Telepon/Faksimili: 021-4894221
Laman: lib.unj.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika Universitas Negeri Jakarta, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : Adibah Humaira
NIM : 1305621030
Fakultas/Prodi : FMIPA / Matematika
Alamat email : adibahhumaira13@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan dan Kearsipan Universitas Negeri Jakarta, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah:

☒ Skripsi ☐ Tesis ☐ Disertasi ☐ Lain-lain (.....)

yang berjudul :

Nilai Bandwidth pada Graf Ubur-Ubur

Dengan Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif ini Perpustakaan dan Kearsipan Universitas Negeri Jakarta berhak menyimpan, mengalihmediakan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (*database*), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di internet atau media lain secara *fulltext* untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan Universitas Negeri Jakarta, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Jakarta, 10 Februari 2026

Penulis

(Adibah Humaira)
nama dan tanda tangan

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. Skripsi ini mulai disusun sejak Oktober 2024 dengan judul *“Nilai Bandwidth pada Graf Ubur-Ubur”*.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini tidak akan selesai tanpa bantuan, doa, dukungan, dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Yudi Mahatma, M.Si., selaku Koordinator Program Studi Matematika FMIPA Universitas Negeri Jakarta, atas arahan, dukungan, serta kebijakan yang diberikan selama penulis menempuh pendidikan di Program Studi Matematika.
2. Ibu Devi Eka Wardani Meganingtyas, S.Pd., M.Si., selaku Dosen Pembimbing I, dan Bapak Dr. Yudi Mahatma, M.Si., selaku Dosen Pembimbing II, atas segala bimbingan, arahan, motivasi, serta kesabaran yang telah diberikan selama proses penyusunan skripsi ini. Tanpa bimbingan dan dukungan beliau berdua, skripsi ini tidak dapat terselesaikan dengan baik.
3. Seluruh Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika FMIPA Universitas Negeri Jakarta, yang telah memberikan ilmu, wawasan, serta pengalaman berharga selama masa perkuliahan.
4. Kedua orang tua penulis, Mama dan Papa, yang senantiasa memberikan doa, dukungan, serta kasih sayang yang tidak pernah putus sehingga penulis dapat menyelesaikan perkuliahan dan penulisan skripsi ini dengan baik.

5. Keluarga dan sahabat-sahabat penulis yang senantiasa menemani, memberikan semangat, serta dukungan moral, terutama di masa-masa sulit, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini hingga tahap akhir.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna karena keterbatasan pengetahuan dan pengalaman. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi perbaikan di masa mendatang.

Akhir kata, penulis berharap skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi lingkungan akademik, khususnya Program Studi Matematika FMIPA UNJ, serta bagi pihak lain yang memerlukan.

Jakarta, 15 Desember 2025



Adibah Humaira

ABSTRAK

ADIBAH HUMAIRA. Nilai Bandwidth pada Graf Ubur-Ubur. Skripsi, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta, Desember 2025.

Bandwidth pada graf merupakan salah satu parameter penting dalam teori graf yang berkaitan dengan penomoran simpul sedemikian rupa sehingga selisih label maksimum antara simpul-simpul yang bertetangga menjadi minimum. Permasalahan bandwidth dikenal sebagai permasalahan yang kompleks secara komputasional dan telah banyak diteliti pada berbagai kelas graf. Salah satu graf dengan struktur khas yang menarik untuk dikaji adalah graf ubur-ubur, yang terdiri atas sejumlah simpul kepala dan simpul kaki dengan pola keterhubungan tertentu. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai bandwidth pada graf ubur-ubur berkaki dua dan graf ubur-ubur berkaki empat. Metode penelitian yang digunakan adalah kajian teoretis melalui konstruksi fungsi pelabelan simpul dan analisis selisih label pada setiap sisi graf. Hasil penelitian menunjukkan bahwa nilai bandwidth pada graf ubur-ubur berkaki dua yang dinotasikan dengan $Jf_{h,t,2}$ adalah konstan, yaitu sebesar 2 untuk setiap $h \geq 3$ dan $1 \leq t \leq 10$. Sementara itu, untuk graf ubur-ubur berkaki empat yang dinotasikan dengan $Jf_{h,t,4}$, diperoleh nilai bandwidth sebesar 2 untuk $h = 3$ dan sebesar 3 untuk $4 \leq h \leq 6$, yang berlaku untuk semua $1 \leq t \leq 10$. Hasil ini diperoleh melalui pembuktian umum dengan mempertimbangkan seluruh jenis sisi pada graf, yaitu sisi antarsimpul kepala, antarsimpul kaki, dan antara simpul kepala dan simpul kaki. Penelitian ini diharapkan dapat memperkaya kajian mengenai permasalahan bandwidth pada graf dengan struktur khusus serta menjadi acuan bagi penelitian selanjutnya dalam pengembangan teori graf.

Kata kunci. *Bandwidth Graf, Graf Ubur-Ubur, Pelabelan Simpul, Teori Graf.*

ABSTRACT

ADIBAH HUMAIRA. The Bandwidth of Jellyfish Graphs. Undergraduate Thesis, Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Universitas Negeri Jakarta, December 2025.

The bandwidth of a graph is an important parameter in graph theory that is related to vertex labeling, where the maximum difference between the labels of adjacent vertices is minimized. The bandwidth problem is known to be computationally complex and has been widely studied in various classes of graphs. One class of graphs with a distinctive structure that is of interest is the jellyfish graph, which consists of a set of head vertices and leg vertices connected in a specific pattern. This study aims to determine the bandwidth of two-legged and four-legged jellyfish graphs. The research method is theoretical in nature and is carried out through the construction of vertex labeling functions and the analysis of label differences on each edge of the graph. The results show that the bandwidth of the two-legged jellyfish graph, denoted by $Jf_{h,t,2}$, is constant and equal to 2 for all $h \geq 3$ and $1 \leq t \leq 10$. Meanwhile, for the four-legged jellyfish graph, denoted by $Jf_{h,t,4}$, the bandwidth is 2 when $h = 3$ and 3 when $4 \leq h \leq 6$, which holds for all $1 \leq t \leq 10$. These results are obtained through general proofs by considering all types of edges in the graph, namely edges between head vertices, edges between leg vertices, and edges connecting head vertices and leg vertices. This research is expected to enrich the study of bandwidth problems in graphs with special structures and to serve as a reference for further research in graph theory.

Keywords. *Graph Bandwidth, Jellyfish Graph, Vertex Labeling, Graph Theory.*

DAFTAR ISI

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI	i
LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI	ii
KATA PENGANTAR	iii
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vi
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR TABEL	iv
DAFTAR GAMBAR	v
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	4
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan Penelitian	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA	6
2.1 Graf	6
2.1.1 Kardinalitas Graf	10
2.1.2 Diameter Graf	11
2.1.3 Graf Khusus	12

2.2	Graf Ubur-Ubur	14
2.3	Pelabelan Graf dan Nilai Bandwidth	19
2.4	Konsep Bandwidth	21
2.4.1	Batas Bawah Bandwidth Pada Graf	25
2.4.2	Batas Atas Bandwidth Pada Graf	26
2.5	Hasil Penelitian Terdahulu Terkait Bandwidth Graf	28
BAB 3	METODOLOGI PENELITIAN	31
3.1	Jenis dan Pendekatan Penelitian	31
3.2	Metode Penelitian	31
3.3	Objek Penelitian	31
3.4	Teknik Pengumpulan Data	32
3.5	Teknik Analisis Data	32
3.6	Diagram Alir Penelitian	32
BAB 4	HASIL DAN PEMBAHASAN	34
4.1	Deskripsi Objek Penelitian	34
4.2	Bandwidth pada Graf Ubur-Ubur dengan $l = 2$	34
4.2.1	Kardinalitas, Diameter, Batas Bawah, dan Batas Atas Graf Ubur-Ubur dengan $l = 2$	35
4.2.2	Nilai Bandwidth pada Graf Ubur-Ubur dengan $l = 2$	51
4.3	Bandwidth pada Graf Ubur-Ubur dengan $l = 4$	67
4.3.1	Kardinalitas, Diameter, Batas Bawah, dan Batas Atas Graf Ubur-Ubur dengan $l = 4$	67
4.3.2	Nilai Bandwidth pada Graf Ubur-Ubur dengan $l = 4$	88
BAB 5	KESIMPULAN DAN SARAN	115
5.1	Kesimpulan	115
5.2	Saran	116
	DAFTAR PUSTAKA	117
	DAFTAR RIWAYAT HIDUP	119

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Perbandingan antara Pelabelan Graf dan Bandwidth Graf	20
Tabel 2.2	Hasil Penelitian Bandwidth pada Berbagai Graf	29
Tabel 4.1	Diameter Graf $Jf_{h,t,2}$ untuk Kombinasi h dan t	46
Tabel 4.2	Batas Bawah Bandwidth pada Graf $Jf_{h,t,2}$	48
Tabel 4.3	Batas Atas Bandwidth pada Graf $Jf_{h,t,2}$	50
Tabel 4.4	Diameter Graf $Jf_{h,t,4}$ untuk Kombinasi h dan t	83
Tabel 4.5	Batas Bawah Bandwidth pada Graf $Jf_{h,t,4}$	85
Tabel 4.6	Batas Atas Bandwidth pada Graf $Jf_{h,t,4}$	87

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Graf Tak-Berarah	7
Gambar 2.2	Graf Sederhana	7
Gambar 2.3	Graf Tangga Segitiga	10
Gambar 2.4	Graf G_4 dengan diameter 2	11
Gambar 2.5	Graf Lengkap	13
Gambar 2.6	Graf Lintasan	13
Gambar 2.7	Graf Lingkaran	14
Gambar 2.8	Graf Ubur-Ubur Sederhana	15
Gambar 2.9	Graf Ubur-Ubur	18
Gambar 2.10	Beberapa Pelabelan Bandwidth pada Graf G_4	22
Gambar 3.1	Diagram Alir Penelitian	33
Gambar 4.1	Graf $Jf_{6,3,2}$	36
Gambar 4.2	Graf $Jf_{5,1,2}$ dengan diameter 3	37
Gambar 4.3	Graf $Jf_{7,1,2}$ dengan diameter 4	38
Gambar 4.4	Graf $Jf_{6,2,2}$ dengan diameter 5	40
Gambar 4.5	Graf $Jf_{9,2,2}$ dengan diameter 6	41
Gambar 4.6	Graf $Jf_{8,3,2}$ dengan diameter 7	42
Gambar 4.7	Graf $Jf_{7,4,2}$ dengan diameter 9	44
Gambar 4.8	Graf $Jf_{h,t,2}$	52
Gambar 4.9	Graf $Jf_{4,4,2}$ dengan BW = 2	58
Gambar 4.10	Graf $Jf_{7,5,2}$ dengan BW = 2	61
Gambar 4.11	Graf $Jf_{9,6,2}$ dengan BW = 2	63
Gambar 4.12	Graf $Jf_{10,3,2}$ dengan BW = 2	66
Gambar 4.13	Graf $Jf_{3,5,4}$	68

Gambar 4.14	Graf $Jf_{3,3,4}$	70
Gambar 4.15	Graf $Jf_{4,2,4}$	72
Gambar 4.16	Graf $Jf_{5,4,4}$	74
Gambar 4.17	Graf $Jf_{6,5,4}$	78
Gambar 4.18	Graf $Jf_{3,t,4}$	89
Gambar 4.19	Graf $Jf_{3,7,4}$ dengan BW = 2	94
Gambar 4.20	Graf $Jf_{4,t,4}$	95
Gambar 4.21	Graf $Jf_{4,4,4}$ dengan BW = 3	100
Gambar 4.22	Graf $Jf_{5,t,4}$	101
Gambar 4.23	Graf $Jf_{5,5,4}$ dengan BW = 3	106
Gambar 4.24	Graf $Jf_{6,t,4}$	107
Gambar 4.25	Graf $Jf_{6,6,4}$ dengan BW = 3	113

