

# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu yang memiliki banyak manfaat dan menjadi dasar bagi berbagai keilmuan yang digunakan dalam hampir semua aspek kehidupan. Salah satu cabang penting dalam matematika adalah matematika diskrit, yang didalamnya mencakup teori graf. Teori graf memiliki peran yang signifikan dalam mempermudah berbagai aspek kehidupan manusia. Sebagai bagian dari matematika diskrit, teori graf merupakan bidang keilmuan yang menarik untuk dipelajari dan diteliti.

Graf dapat didefinisikan sebagai struktur yang terdiri dari simpul (*vertex*) dan sisi (*edge*) yang menghubungkan simpul-simpul tersebut. Berdasarkan karakteristiknya, graf dapat dibedakan menjadi beberapa jenis, seperti graf sederhana, graf tidak sederhana, graf berarah, graf tidak berarah, dan lain-lain. Penggunaan graf sangat luas, karena mampu merepresentasikan berbagai objek dan hubungan antar objek tersebut. Graf sering dimanfaatkan untuk menyelesaikan berbagai masalah kompleks, seperti dalam jaringan komunikasi, transportasi, logistik, desain rangkaian elektronik, hingga analisis data. Oleh karena itu, teori graf menjadi salah satu bidang yang memiliki kontribusi besar dalam pengembangan teknologi dan solusi untuk kebutuhan sehari-hari.

Dalam teori graf, terdapat sebuah konsep yang bertujuan untuk memi-

nimalkan jarak maksimum antara simpul-simpul yang terhubung pada sebuah graf. Konsep ini dikenal sebagai bandwidth pada graf, dan memiliki peran penting dalam berbagai bidang aplikasi. Bandwidth dari sebuah graf adalah nilai minimum dari jarak maksimum antara dua simpul bertetangga, diambil dari semua kemungkinan pengurutan simpul graf tersebut. Bandwidth digunakan untuk mengukur penyusunan simpul-simpul pada garis lurus sedemikian rupa sehingga jarak maksimum antara simpul-simpul yang saling terhubung menjadi seminimal mungkin.

Permasalahan bandwidth pertama kali muncul pada tahun 1962 di Jet Propulsion Laboratory (JPL) Pasadena, saat digunakan untuk meminimalkan kesalahan absolut rata-rata dan maksimum dalam analisis kubik (Chinn et al., 1982). Setelah solusi awal untuk masalah ini ditemukan, bandwidth mulai menarik perhatian para ilmuwan, yang kemudian mengembangkan teori dan algoritma untuk menganalisis dan mengoptimalkan konsep ini. Bandwidth tidak hanya diterapkan pada berbagai jenis graf, tetapi juga digunakan untuk memecahkan berbagai persoalan praktis. Hingga kini, konsep bandwidth terus digunakan dan dikembangkan dalam penelitian maupun implementasi di berbagai bidang teknologi.

Permasalahan bandwidth pada graf dikenal sebagai permasalahan yang kompleks secara komputasional, dalam arti bahwa waktu yang dibutuhkan untuk menentukan nilai bandwidth minimum meningkat secara signifikan seiring dengan bertambahnya ukuran graf. Dalam teori kompleksitas komputasi, Garey et al. (1978) menunjukkan bahwa masalah bandwidth graf termasuk ke dalam kelas masalah NP-complete. Hal ini berarti bahwa, meskipun suatu solusi yang diusulkan dapat diverifikasi kebenarannya dalam waktu polinomial, hingga saat ini belum diketahui adanya algoritma waktu polinomial yang mampu menentukan nilai bandwidth minimum untuk semua graf. Akibatnya, penentuan bandwidth graf secara umum merupakan permasalahan yang sulit diselesaikan secara efisien, bahkan pada graf dengan struktur tertentu. Monien (1986) mempertegas hal tersebut dengan menunjukkan bahwa *bandwidth minimization* pada graf caterpillar dengan

panjang cabang terbatas tetap merupakan masalah yang sulit secara komputasi. Penelitian-penelitian mutakhir juga terus mengembangkan teori ini. Salah satunya dilakukan oleh Chakraborti et al. (2023), yang memperluas teori bandwidth melalui teorema untuk graf transversal. Penelitian tersebut menunjukkan bahwa bandwidth masih menjadi topik yang aktif dikaji dalam teori graf, terutama pada struktur-struktur graf yang tidak konvensional.

Graf ubur-ubur (*jellyfish graph*) merupakan salah satu kelas graf khusus yang telah diperkenalkan dan dibahas dalam beberapa penelitian dengan definisi yang bervariasi. Lee dan Lee (2003, sebagaimana dikutip oleh Arfin, 2025) mendefinisikan graf ubur-ubur  $J_{m,n}$  sebagai graf yang terdiri dari empat simpul pusat yang saling terhubung, dengan dua kelompok simpul tambahan yang masing-masing terhubung pada dua simpul pusat tertentu sehingga membentuk kaki-kaki graf. Azka et al. (2017, sebagaimana dikutip oleh Gustiani et al., 2023) mendefinisikan graf ubur-ubur  $J_n$  sebagai graf yang dibentuk dari sebuah graf siklus sebagai kepala, dengan dua buah lintasan yang dihubungkan pada dua simpul tertentu pada siklus tersebut dan berperan sebagai kaki graf. Sementara itu, Akbar dan Sugeng (2021) mendefinisikan graf ubur-ubur  $J(m,n)$  sebagai graf yang terdiri dari sejumlah simpul kepala yang terhubung pada dua simpul pusat, di mana dari masing-masing simpul pusat tersebut terhubung sejumlah simpul tambahan yang membentuk kaki-kaki graf. Meskipun memiliki perbedaan dalam konstruksi dan notasi, ketiga definisi tersebut menunjukkan karakteristik umum graf ubur-ubur, yaitu adanya struktur kepala sebagai pusat graf dan sejumlah kaki yang terhubung ke bagian pusat tersebut.

Graf ubur-ubur memiliki struktur terpusat dengan pola hubungan simpul yang khas, sehingga menarik untuk diteliti dalam permasalahan optimisasi graf, khususnya permasalahan bandwidth. Nilai bandwidth suatu graf ditentukan melalui pelabelan linear simpul, yaitu pemberian label bilangan bulat pada setiap simpul sedemikian rupa sehingga selisih label maksimum pada setiap sisi dapat diminimalkan. Struktur graf ubur-

ubur, seperti jumlah simpul pada kepala, panjang kaki, serta banyaknya kaki yang terhubung, secara langsung memengaruhi pola pelabelan yang dapat digunakan dan, pada akhirnya, memengaruhi nilai bandwidth graf tersebut. Oleh karena itu, penelitian ini memfokuskan kajian pada graf ubur-ubur berkaki dua dan empat, karena kedua struktur tersebut merepresentasikan tingkat kompleksitas yang berbeda namun masih memungkinkan untuk dianalisis secara sistematis melalui konstruksi pelabelan eksplisit. Graf ubur-ubur berkaki dua dipilih sebagai kasus dasar dengan pola pelabelan yang relatif sederhana, sedangkan graf ubur-ubur berkaki empat dipilih untuk mengamati pengaruh penambahan jumlah kaki terhadap pola pelabelan dan nilai bandwidth. Untuk graf ubur-ubur dengan jumlah kaki yang lebih besar, pola pelabelan yang terbentuk menjadi lebih kompleks dan belum dapat dianalisis secara menyeluruh dalam ruang lingkup penelitian ini, sehingga kajian tersebut tidak dibahas lebih lanjut.

## **1.2 Perumusan Masalah**

Penelitian ini akan berfokus pada konsep bandwidth berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan. Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana nilai bandwidth pada graf ubur-ubur berkaki dua?
2. Bagaimana nilai bandwidth pada graf ubur-ubur berkaki empat?

## **1.3 Batasan Masalah**

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Jenis graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf tidak berarah, sederhana, dan terhubung.
2. Graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf ubur-ubur, dengan  $l$  menyatakan banyaknya kaki yang terhubung ke graf kepala.

Kajian dibatasi pada graf ubur-ubur dengan  $l = 2$  dan  $l = 4$ .

3. Untuk graf ubur-ubur dengan  $l = 2$ , penelitian ini membahas graf dengan jumlah simpul kepala  $h \geq 3$ . Sementara itu, untuk graf ubur-ubur dengan  $l = 4$ , penelitian dibatasi pada graf dengan jumlah simpul kepala  $h$  yang memenuhi  $3 \leq h \leq 6$ .
4. Panjang kaki pada graf ubur-ubur dinyatakan dengan parameter  $t$ . Pada penelitian ini diasumsikan bahwa seluruh kaki memiliki panjang yang sama, dengan nilai  $t$  berada pada rentang  $1 \leq t \leq 10$ .

## 1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan latar belakang di atas, penelitian ini bertujuan untuk mencapai hal-hal berikut:

1. Menentukan nilai bandwidth pada graf ubur-ubur berkaki dua.
2. Menentukan nilai bandwidth pada graf ubur-ubur berkaki empat.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Melalui penelitian ini, penulis berharap dapat memberikan wawasan dan pengetahuan baru mengenai penerapan konsep bandwidth dalam menyelesaikan permasalahan pada graf. Penelitian ini juga dapat digunakan sebagai bahan acuan maupun pembanding untuk para peneliti berikutnya yang ingin melanjutkan penelitian khususnya pada bidang teori graf mengenai konsep bandwidth.