

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika berperan sebagai dasar penting bagi berbagai disiplin ilmu pengetahuan dan teknologi, karena menyediakan kerangka berpikir logis serta alat analisis yang efektif untuk menyelesaikan beragam permasalahan. Salah satu bidang yang berkaitan langsung adalah teori graf, yang berkembang dari permasalahan Jembatan Königsberg yang dikemukakan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Representasi hubungan antar objek melalui simpul (titik) dan sisi (garis penghubung) dalam kasus tersebut menghasilkan konsep yang kini dikenal sebagai graf (Bondy and Murty, 1976).

Seiring waktu, teori graf telah mengalami perkembangan mencakup berbagai topik seperti struktur graf, pewarnaan, keterhubungan (konektivitas), pohon merentang (*spanning tree*), dan analisis jaringan.

Konsep pewarnaan dalam teori graf pertama kali diperkenalkan melalui permasalahan pewarnaan peta, yang lebih dikenal sebagai *Four Color Theorem* (Teorema Empat Warna). Permasalahan ini dikemukakan pada tahun 1852 dan baru berhasil diselesaikan pada tahun 1976 (Bondy and Murty, 2008). Teorema ini menyatakan bahwa setiap peta yang dibagi dalam suatu bidang dapat diwarnai dengan paling banyak empat warna yang berbeda, sedemikian rupa sehingga tidak ada dua wilayah yang bersebelahan memiliki warna yang sama. Pemahaman ini kemudian diperluas ke dalam

graf, di mana sisi (*edge*) atau simpul (*vertex*) diberi warna sesuai dengan kriteria tertentu untuk menghindari konflik; contohnya, dua simpul yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda.

Pewarnaan graf sejak itu berkembang menjadi cabang penting dalam matematika diskret dan ilmu komputer teoretis. Penelitian awal yang dilakukan selama abad ke-20 berkembang menjadi kajian mendalam mengenai pewarnaan sisi dan simpul dengan berbagai aplikasi praktis di berbagai sektor, seperti penjadwalan tugas (untuk mencegah konflik waktu), penggunaan frekuensi dalam komunikasi (untuk menghindari gangguan), pengelompokan data, dan penyelesaian konflik sumber daya dalam sistem transportasi maupun komputer. Pewarnaan graf bahkan telah melahirkan konsep yang lebih kompleks seperti pewarnaan pelangi (*rainbow coloring*), yang menekankan keberagaman jalur atau label dalam suatu jaringan.

Chartrand dan rekan-rekannya memperkenalkan istilah *rainbow coloring* dalam teori graf melalui teknik pewarnaan sisi pada tahun 2008. Suatu graf dikatakan *rainbow-connected* jika terdapat setidaknya satu jalur yang menghubungkan setiap pasangan simpul, di mana semua sisi pada jalur tersebut memiliki warna yang berbeda. Artinya, tidak ada dua sisi pada jalur yang sama yang memiliki warna yang sama, sehingga koneksi yang terbentuk menyerupai "pelangi". Parameter utama yang terkait dengan konsep ini dikenal sebagai *rainbow connection number* dari graf, yang dinotasikan dengan $rc(G)$, yaitu jumlah minimum warna yang diperlukan agar graf tersebut menjadi *rainbow-connected* (Chartrand et al., 2008). Variasi yang lebih kuat dari konsep ini juga diteliti, yang dinotasikan dengan $src(G)$, di mana hanya jalur-jalur terpendek antara setiap pasangan simpul yang diperhitungkan.

Konsep ini kemudian dikembangkan lebih lanjut oleh Krivelevich and Yuster (2010) melalui penerapan metode *rainbow vertex-connection*. Jika pada versi sebelumnya yang diberi warna adalah sisi-sisi yang menghubungkan dua simpul, maka pada versi ini yang diberi warna adalah simpul-simpulnya. Suatu graf dikatakan *rainbow vertex-connected* jika setiap pasang-

an simpul dapat dihubungkan oleh suatu jalur sedemikian rupa sehingga semua simpul internal (simpul-simpul selain simpul awal dan simpul akhir) memiliki warna yang berbeda satu sama lain. Parameter yang diperhatikan dalam konteks ini disebut *rainbow vertex-connection number* dan dinotasikan dengan $rvc(G)$. Konsep ini menimbulkan berbagai permasalahan kombinatorial yang menarik dan telah menjadi fokus dalam sejumlah penelitian lanjutan.

Untuk memperluas kerangka pewarnaan dalam graf, sejumlah peneliti mulai mengeksplorasi pendekatan pelabelan numerik pada sisi graf, yang kemudian berkontribusi pada pengembangan konsep pewarnaan baru. Salah satu pendekatan yang berpengaruh adalah teori *edge-antimagic total labeling*, yang pertama kali diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel pada tahun 1990 sebagai bagian dari kajian pelabelan dalam teori graf. Dalam konteks ini, sisi-sisi dari suatu graf diberi label berupa bilangan bulat dari 1 hingga $|E|$ (jumlah sisi), dan bobot dari suatu simpul didefinisikan sebagai jumlah dari label-label sisi yang menempel padanya. Suatu pelabelan dikatakan *edge-antimagic* jika setiap simpul memiliki bobot yang berbeda, artinya tidak ada dua simpul yang memiliki jumlah label sisi yang sama. Teori ini bertujuan untuk membentuk struktur graf yang unik dan teratur melalui pelabelan numerik.

Seiring dengan kemajuan penelitian, muncul variasi kompleks seperti pelabelan *edge-antimagic* (a, d) , yang mensyaratkan bobot-bobot simpul membentuk barisan aritmetika dengan beda tetap d dan suku awal a . Di sisi lain, varian *super edge-antimagic*, di mana label sisi membentuk himpunan tepat dari $1, 2, \dots, |E|$ tanpa ada pengulangan. Selain itu, konsep *vertex-antimagic edge (VAE) labeling* juga dikembangkan, yang tetap memberi label pada sisi tetapi fokus pada keunikan bobot simpul, yang diperoleh dari penjumlahan label sisi yang terhubung ke simpul tersebut. Tujuan dari pendekatan ini tetap sama, yaitu memastikan bahwa setiap simpul memiliki bobot yang unik atau berbeda satu sama lain. Beragam jenis pelabelan *antimagic* ini memiliki peranan penting dalam berbagai aplikasi jaringan,

seperti pengkodean unik, alokasi frekuensi, dan keamanan topologi, karena mampu menghasilkan struktur jaringan yang mudah dibedakan serta tersusun secara sistematis.

Konsep *vertex-antimagic edge (VAE) labeling* ini menjadi landasan munculnya penggabungan dengan konsep *rainbow vertex-connection*, yang melahirkan konsep *Rainbow Vertex Antimagic Coloring (RVAC)* pada tahun 2021 oleh Marsidi, Agustin, Dafik, dan Kurniawati. Dalam RVAC, sisi graf diberi label unik dari 1 hingga $|E|$, lalu bobot simpul dihitung berdasarkan jumlah label sisi yang terhubung dengannya (bersisian). Simpul-simpul kemudian diberi warna berdasarkan bobot, dan pada setiap jalur penghubung dua simpul, semua simpul internal harus memiliki warna berbeda. Parameter utamanya adalah $rvac(G)$, yaitu jumlah warna minimum untuk memenuhi kondisi tersebut.

Sejumlah penelitian sebelumnya telah mengkaji pewarnaan titik pelangi anti-ajaib (*Rainbow Vertex Antimagic Coloring/RVAC*) pada berbagai jenis graf untuk memahami sifat-sifat strukturalnya secara lebih mendalam. Marsidi et al. (2021) meneliti RVAC pada graf jalur (*path*), *fan*, dan *wheel*. Selanjutnya, Marsidi et al. (2022) mengkaji RVAC pada graf berbentuk pohon, seperti *star*, *double-star*, dan *broom*, yang memperkaya pemahaman mengenai pengaruh struktur pohon terhadap sifat pewarnaan pelangi anti-ajaib. Kamila et al. (2023) membahas RVAC pada graf *shell-butterfly* dan *shell-flower* sebagai pengembangan kajian pada graf khusus. Prihandini et al. (2025) mengkaji pewarnaan titik pelangi anti-ajaib (RVAC) pada graf berbentuk prisma dan berbagai operasi graf yang terkait. Selain kajian teoretis pada berbagai kelas graf tersebut, beberapa penelitian juga mengembangkan konsep RVAC dalam konteks terapan. Dafik et al. (2024) mengkaji RVAC pada *Spatial Temporal Graph Neural Networks (STGNN)*, sedangkan Dafik et al. (2025) membahas RVAC dalam pengelolaan beban penumpang kereta api secara efisien. Meskipun kedua penelitian tersebut berorientasi pada aplikasi, hasil-hasilnya menunjukkan bahwa konsep RVAC memiliki potensi yang luas dan terus berkembang, serta turut menjadi motivasi bagi penulis

untuk mengkaji RVAC dari sisi teoretis.

Berdasarkan berbagai hasil penelitian tersebut, terlihat bahwa studi mengenai RVAC masih terus berkembang dan sangat dipengaruhi oleh karakteristik struktur graf yang dikaji. Namun demikian, hingga saat ini masih sangat terbatas penelitian yang membahas sifat RVAC pada graf Roach $R(2n, 2k)$.

Graf Roach, yang menjadi objek kajian dalam penelitian ini, merupakan graf yang terinspirasi dari bentuk kecoa (*cockroach*), sebagaimana diperkenalkan oleh Dewananda and Perera (2023) yang membahas secara mendalam struktur serta nilai *rainbow vertex-connection* (*rvc*) melalui graf Roach yang dinotasikan dengan $R(2n, 2k)$. Pada graf ini, simpul-simpul ditempatkan pada dua bagian utama, yaitu bagian kepala (*head*) dan badan (*body*), yang tersusun pada dua lintasan sejajar, yaitu lintasan atas dan lintasan bawah, dengan masing-masing lintasan terdiri atas $n + k$ simpul. Selanjutnya, sebanyak k pasang simpul yang saling berhadapan dihubungkan membentuk struktur seperti tangga (*ladder*), sehingga secara visual graf ini menyerupai bentuk kecoa. Meskipun demikian, hingga saat ini belum ada kajian yang secara eksplisit menghitung atau merumuskan nilai *Rainbow Vertex Antimagic Coloring* (*rvac*) pada graf Roach, terutama untuk bentuk umum $R(2n, 2k)$. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk mengisi kekosongan tersebut dengan menyelidiki nilai $rvac(R(2n, 2k))$ secara sistematis dan mencari pola atau rumus umum berdasarkan konstruksi struktur graf, serta penentuan konstruksi fungsi pelabelan sisi dan penentuan bobot simpul pada graf Roach sebagai salah satu bentuk pengembangan kajian RVAC pada graf khusus.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka didapat pokok permasalahan yaitu:

1. Berapa nilai bilangan terhubung titik pelangi anti-ajaib (*rvac*) pada

graf *roach* ($R(2n, 2k)$)?

2. Bagaimana menentukan konstruksi fungsi pelabelan sisi (f) pada graf *roach* ($R(2n, 2k)$)?
3. Bagaimana menentukan konstruksi fungsi bobot simpul (w) pada graf *roach* ($R(2n, 2k)$)?

1.3 Batasan Masalah

Agar penelitian ini terarah dan tidak menyimpang dari fokus utama, maka dibatasi pada hal-hal berikut:

1. Graf yang dikaji adalah graf sederhana, terhubung, dan tidak berarah.
2. Graf yang digunakan adalah graf Roach $R(2n, 2k)$ dengan $n, k \in \mathbb{N}$, dengan batasan $n \geq 1$ dan $k \geq 2$.
3. Pewarnaan yang digunakan adalah pewarnaan titik pelangi anti-ajaib (Rainbow Vertex Antimagic Coloring / RVAC).
4. Pelabelan sisi menggunakan bilangan bulat positif dari 1 sampai $|E(G)|$ tanpa pengulangan.
5. Bobot simpul didefinisikan sebagai jumlah label sisi yang bersisian pada simpul tersebut.
6. Pembuktian yang dibahas meliputi:
 - (a) Konstruksi fungsi pelabelan sisi f ,
 - (b) Penentuan fungsi bobot simpul w , dan
 - (c) Penentuan nilai bilangan terhubung titik pelangi anti-ajaib ($rvac$).
7. Penelitian ini tidak membahas algoritma komputasi, metode optimasi heuristik, maupun implementasi program komputer.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini yaitu:

1. Menentukan nilai bilangan terhubung titik pelangi anti-ajaib ($rvac$) pada graf Roach $R(2n, 2k)$ dengan $n \geq 1$ dan $k \geq 2$.
2. Menentukan konstruksi fungsi pelabelan sisi f pada graf Roach $R(2n, 2k)$.
3. Menentukan fungsi bobot simpul w pada graf Roach $R(2n, 2k)$ berdasarkan pelabelan sisi yang diberikan.
4. Membuktikan bahwa konstruksi pelabelan yang diperoleh memenuhi sifat pewarnaan titik pelangi anti-ajaib (RVAC) pada graf Roach.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian di atas, maka manfaat penelitian ini yaitu:

Manfaat Teoretis

1. Memberikan kontribusi dalam pengembangan teori pelabelan graf, khususnya pada kajian pewarnaan titik pelangi anti-ajaib (RVAC).
2. Menambah referensi dan kajian baru mengenai sifat RVAC pada graf Roach $R(2n, 2k)$ yang masih relatif jarang diteliti.
3. Menjadi dasar untuk penelitian lanjutan terkait RVAC pada kelas-kelas graf lainnya.

Manfaat Akademis

1. Menjadi bahan referensi bagi mahasiswa dan peneliti yang tertarik pada bidang teori graf dan pelabelan graf.
2. Dapat digunakan sebagai rujukan dalam pembelajaran mata kuliah Teori Graf dan Matematika Diskrit.