

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial merupakan salah satu cabang utama di bidang matematika murni dan aplikatif. Permasalahan di dalam dunia fisis sudah dipelajari sejak dulu yang terbukti bahwa Aristoteles telah menjelaskan gerak dan perubahan (Byrne, 2018, hlm. 10). Berkembangnya zaman, pendapat Archibald dkk. (2005) di dalam *The History of Differential Equations*, secara lengkap memberikan penjelasan bahwa permasalahan fisis berkembang dengan penggunaan persamaan diferensial yang mengalami kemajuan dari abad enam belas hingga sekarang dalam bidang mekanika, geometri, dan masalah fisis lainnya.

Salah satu bentuk persamaan diferensial yang sering dipelajari adalah persamaan Poisson. Persamaan ini dapat memiliki makna sebagai persamaan yang memiliki kepekatan atau densitas muatan sebagai sumber pada kasus potensial listrik (Hackbusch, 2017). Staelin (2011) memberikan penjelasan pula mengenai persamaan Poisson di dalam pembahasan elektromagnetik pada bukunya. Sebagai catatan konvensi penulisan pada skripsi ini, istilah "persamaan" (dengan huruf kecil) secara umum merujuk pada persamaan diferensial. Sementara itu, penyebutan yang diawali huruf kapital dan diikuti penomoran, seperti "Persamaan (1.1)", digunakan untuk merujuk pada rumusan matematis spesifik yang telah dituliskan.

Secara umum, persamaan Poisson memiliki bentuk

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f$$

dengan fungsi tidak diketahui u bervariasi $x_1, x_2, \dots, x_n$ (Tveito dan Winther,

1998). Persamaan pada penelitian ini menggunakan satu dimensi yakni

$$-k \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$$

dengan hanya satu variabel yang dapat mewakili kuantitas tertentu. Bentuk satu variabel digunakan untuk memahami perilaku suatu sistem jika hanya bergantung kepada satu variabel disertai dengan batasan-batasan yang bersesuaian. Selain itu, konstanta k bertujuan untuk mengetahui perubahan solusi jika terjadi perubahan nilai k yang mana perubahan ini dibutuhkan karena medium fisis di kehidupan nyata memiliki nilai berbeda-beda.

Penelitian ini berfokus pada pengonstruksian suatu fungsi Green untuk penyelesaian persamaan Poisson satu dimensi dengan mempunyai batasan tertentu. Pada mulanya, fungsi Green merupakan fungsi yang dibangun oleh George Green (1793–1841) dengan tujuan menentukan potensial muatan di dalam ruang hampa yang padanya terdapat pembatasan oleh konduktor dengan potensial tertentu (Duffy, 2015, hlm. 1). Fungsi Green bermanfaat untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonhomogen dengan kondisi awal ataupun batasan-batasan yang berkorespondensi dengannya (Stakgold dan Holst, 2011). Secara fisis, fungsi Green menjelaskan bagaimana respons suatu sistem terhadap suatu impuls yang mengenai sistemnya (Gu dkk., 2024). Sederhananya, dengan mengetahui bentuk fungsi Green maka bentuk respons yang diberikan suatu sistem untuk suatu impuls atau sumber yang mengenai fungsinya pada suatu titik dapat dijelaskan dengan nilainya.

Menurut Stakgold dan Holst (2011), fungsi Green menjelaskan suatu respons sistem jika sumber impuls itu terkonsentrasi pada suatu titik alih-alih terdistribusi di seluruh sistem. Dengan demikian, solusi dari persamaan dapat ditentukan dengan menjumlahkan respons dari tiap-tiap titik pada interval yang sedang ditinjau.

Menurut Strauss (2007), terdapat tiga jenis batasan umum yang terdapat pada persamaan yakni batasan Dirichlet, Neumann, dan Robin. Tipe batasan pertama (batasan Dirichlet) memberikan nilai solusi u pada ujung-ujung interval

dengan sembarang nilai yang dituliskan menjadi

$$u(0, t) = a, \quad u(l, t) = b$$

dengan a dan b sembarang konstanta. Namun, apabila nilai batasan yang diketahui merupakan nilai turunan pertama dari fungsi solusi, misalkan

$$u_x(0, t) = a, \quad u_x(l, t) = b,$$

batasan tersebut dinamakan tipe batasan Neumann. Batasan ketiga yang dijelaskan Strauss adalah batasan Robin yang merupakan suatu kombinasi dari batasan Dirichlet dan Neumann yang dituliskan menjadi

$$au_x(0, t) + bu(0, t) = c, \quad \alpha u_x(1, t) + \beta u(1, t) = \gamma$$

dengan $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ konstanta. Terdapat batasan lain

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(0, t) = u_x(1, t)$$

yang berbentuk periodik (Tveito dan Winther, 1998).

Cabada dkk. (2021) melakukan penelitian mengenai fungsi Green di dalam keterlibatannya pada persamaan linear orde ke- n dengan batasan nonlokal. Penelitian ini menjelaskan mengenai eksistensi fungsi Green terhadap persamaan linear orde ke- n dengan batasan banyak titik yang bernilai dengan nol. Hal ini membuktikan bahwa terdapat suatu fungsi Green untuk titik-titik batas yang homogen. Camargo dkk. (2013) juga melakukan penelitian fungsi Green terhadap persamaan orde dua dengan batas satu dan dua sisi. Penelitian menyimpulkan bahwa persamaan-persamaan dengan batasan dua nilai lebih umum untuk memiliki suatu bentuk penyelesaian di dalam bentuk fungsi Green. Fungsi Green juga dapat ditemukan di dalam persamaan orde dua dengan batasan Dirichlet yang bernilai nol pada kedua batasannya terhadap fungsi dengan transformasi involusi (Sarsenbi dan Mussirepova, 2022). Alam dkk.

(2021) menambahkan literatur mengenai penyelesaian persamaan diferensial orde ke- n bernilai nol pada beberapa batasan.

Batasan ini mempunyai makna penting di dalam bentuk fisis, Stakgold dan Holst (2011) memberikan contoh deskripsi fisik untuk batasan Dirichlet yang menjelaskan suatu sistem batang memiliki nilai suhu nol pada kedua ujungnya. Dengan ini setiap batasan memiliki peranan penting dalam perilaku di dalam fungsi Green serta solusi nilai fungsi akhir. Penelitian ini bertujuan untuk menunjukkan batasan yang diperumum untuk memahami perannya di dalam eksplorasi secara komprehensif tentang fungsi Green dari suatu sistem dari sisi analitik, numerik, dan aplikasinya.

Sesuai dengan penjelasan Strauss (2007) mengenai tiga batasan umum, penelitian ini mengajukan suatu batasan Robin yang diperumum yang merupakan kombinasi dari batasan standar Dirichlet dan Neumann. Batasan yang diajukan yakni berbentuk sebagai berikut:

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1 \text{ dan } \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2$$

dengan $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ konstanta bernilai riil yang merupakan nonhomogen untuk kombinasi batasan Dirichlet dan Neumann. Batasan lain juga diajukan untuk kasus berupa

$$u(a) = u(b) \quad u'(a) = u'(b)$$

yang berbentuk periodik yang cocok untuk suatu sistem yang tertutup atau berkesinambungan seperti lingkaran atau gelombang yang berperiodik.

Penelitian ini difokuskan pada penentuan solusi analitik persamaan Poisson satu dimensi pada syarat batas Robin nonhomogen dan periodik menggunakan metode Fungsi Green guna mendeskripsikan karakteristik suatu sistem. Sebagai pelengkap, pendekatan numerik juga diaplikasikan untuk menghampiri nilai solusi dari bentuk integral yang rumit atau sulit dievaluasi secara eksak.

Ahmad dkk. (2023) telah menurunkan skema iteratif dengan nilai-nilai pada suku-suku sebelumnya yang dapat menentukan nilai fungsi Green dengan

batasan Bratu secara numerik yang menunjukkan nilai-nilai yang dihasilkan cukup akurat dengan membandingkan penelitian yang dilakukan oleh peneliti lainnya. Penelitiannya menjelaskan metode numerik dapat diturunkan untuk solusi analitik yang sulit ditentukan nilai eksaknya atau tidak ada. Lebih lanjut, terdapat pendekatan numerik yang dapat digunakan pada persamaan dengan menggunakan metode beda hingga dengan mendiskritisasi domainnya (*finite difference*) yang telah dilakukan pada persamaan Poisson (Yuki dan Norikazu, 2022). Penelitian ini berfokus pada penyelesaian secara numerik dengan mendiskritisasi bentuk integral dari solusi analitik menggunakan metode Kuadratur Nyström (Atkinson, 2009). Pemilihan pendekatan ini didasarkan pada keunggulannya dibandingkan metode numerik konvensional seperti metode beda hingga. Jika metode beda hingga sekadar menghampiri operator turunan, metode Kuadratur Nyström mengeksplorasi informasi global dari nilai Fungsi Green secara utuh. Melalui pendekatan ini, evaluasi persamaan berubah menjadi evaluasi persamaan integral, sehingga menghasilkan solusi numerik akhir yang jauh lebih stabil dan memiliki presisi tinggi karena galatnya murni dibatasi oleh skema kuadratur yang digunakan.

Penelitian ini juga bertujuan untuk mengkaji dan menganalisis bentuk-bentuk interpretasi fisis yang terjadi pada persamaan Poisson satu dimensi dengan batasan Robin nonhomogen. Salah satu permasalahan di dalam bentuk masalah fisis yang ditemukan yakni konduksi panas atau perpindahan panas yang terjadi suatu batang. Boyce dan DiPrima (2000, hlm. 573) di dalam bukunya menjelaskan secara singkat mengenai persamaan panas

$$\alpha u_{xx} = u_t$$

dengan $0 < x < L, t > 0$ yang menunjukkan transfer panas yang terjadi di dalam suatu batang yang diasumsikan memiliki bahan yang sama. Dengan batang tersebut, persamaan Poisson satu dimensi dapat dibentuk dengan tidak mempertimbangkan variabel waktu. Winterton (1999) menjelaskan mengenai batasan Hukum Pendinginan Newton yang akan menjadi bentuk interpretasi

fisis untuk nilai-nilai yang beragam pada batasan Robin nonhomogen.

Persamaan Poisson satu dimensi juga dapat memiliki nilai batas berupa periodik yang memiliki bentuk interpretasi fisis berkaitan dengan elektrostatik. Permasalahan ini dapat tercermin pada distribusi potensial dengan bentuk kawat beragam bahan yang membentuk cincin (Selvadurai, 2013).

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan dapat dirumuskan menjadi beberapa poin penting:

1. Bagaimana solusi analitik, numerik, dan analisis konvergensi pada persamaan Poisson satu dimensi dengan batas Robin nonhomogen menggunakan fungsi Green?
2. Bagaimana perbedaan solusi persamaan Poisson satu dimensi dengan batasan Robin nonhomogen pada konduksi panas untuk bahan yang berbeda?
3. Bagaimana solusi analitik, numerik, dan analisis konvergensi pada persamaan Poisson satu dimensi dengan batasan periodik menggunakan fungsi Green?
4. Bagaimana perbedaan solusi persamaan Poisson satu dimensi dengan batas periodik pada potensial elektrostatik untuk bahan yang berbeda?

1.3 Tujuan Penelitian

Terdapat beberapa tujuan penelitian yang ingin dicapai:

1. Menemukan bentuk fungsi Green pada persamaan Poisson satu dimensi dengan batasan Robin nonhomogen dan periodik.
2. Menentukan hasil solusi akhir dengan fungsi Green pada persamaan Poisson satu dimensi dengan batasan Robin nonhomogen dan periodik.
3. Memahami bentuk fisis yang direpresentasikan oleh persamaan Poisson satu dimensi dengan batas Robin nonhomogen dan periodik.

1.4 Manfaat Penelitian

Terdapat beberapa manfaat yang didapatkan untuk penelitian ini:

1. Bagi penulis, penelitian ini membantu menjelaskan bentuk persamaan diferensial dalam kasus fisis.
2. Bagi akademik, penelitian ini menambah literatur pengetahuan tentang penyelesaian persamaan diferensial dengan fungsi Green.

1.5 Batasan Masalah

Terdapat beberapa batasan masalah untuk penelitian ini:

1. Metode numerik yang digunakan pada penelitian adalah metode Kuadratur Nyström yang mengubah persamaan diferensial menjadi persamaan integral dengan diskritisasi domain.
2. Fungsi sumber yang digunakan pada penelitian harus kontinu dan terintegralkan Riemann (*Riemann integrable*).
3. Nilai determinan Wronskian tidak bernilai nol untuk menjamin eksistensi fungsi Green standar.
4. Fungsi yang diujikan untuk analisis konvergensi pada pendekatan numerik Persamaan Poisson batasan Robin nonhomogen adalah beberapa contoh fungsi polinomial sebagai fungsi paling sederhana, fungsi eksponensial sebagai fungsi yang menjelaskan pertumbuhan yang cepat, dan beberapa contoh fungsi trigonometri untuk menjelaskan fungsi yang berosilasi.
5. Fungsi yang diujikan untuk analisis konvergensi pada pendekatan numerik solusi Persamaan Poisson batasan periodik adalah contoh fungsi trigonometri dan contoh fungsi nontrigonometri.
6. Bahan yang digunakan pada konduksi panas yakni tembaga dan aluminium sebagai bahan yang sering digunakan di dunia nyata.
7. Bahan yang digunakan pada potensial elektrostatik yakni mika dan karet silikon sebagai bahan yang sering digunakan di dunia nyata.