

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam perkembangan ilmu pengetahuan, matematika sering digunakan sebagai dasar untuk memahami berbagai struktur dan pola yang muncul secara alami maupun dari tangan manusia. Matematika memungkinkan manusia untuk memodelkan, menganalisis, dan memecahkan berbagai masalah dengan cara yang sistematis. Matematika telah berkembang sejak zaman dahulu, melahirkan berbagai cabang ilmu yang memiliki peran penting dalam pengembangan teori maupun penerapannya dalam berbagai bidang, juga menarik untuk dipelajari. Salah satu cabang matematika tersebut adalah kombinatorika. Kombinatorika adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari cara menghitung dan menganalisis berbagai kemungkinan susunan suatu objek. Hal menarik dari kombinatorika adalah bagaimana caranya dapat mengungkap pola-pola tersembunyi dari suatu masalah. Selain menarik, kombinatorika juga memiliki peran penting dalam berbagai bidang, seperti ilmu komputer, teori graf dan optimasi.

Dalam kajian kombinatorika, terdapat barisan bilangan yang diperoleh dari penghitungan struktur tertentu, salah satu yang terkenal adalah bilangan Catalan. Bilangan Catalan pertama kali didefinisikan oleh Catalan (1844) sebagai suatu barisan bilangan yang merepresentasikan banyaknya kemungkinan penyusunan suatu objek kombinatorial tertentu. Contoh

suku-suku pertama dari barisan bilangan Catalan adalah

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots$$

Bilangan Catalan memiliki berbagai aplikasi, terutama dalam kombinatorika untuk menghitung struktur diskrit, bahkan secara tidak terduga juga ditemukan dalam bidang seperti olahraga (Koshy, 2008). Objek-objek yang dihitung oleh bilangan Catalan dikenal sebagai objek Catalan, yang di antaranya mencakup triangulasi poligon, lintasan Dyck (*Dyck path*), dan pohon biner (Stanley, 2015). Meskipun objek-objek tersebut memiliki bentuk yang berbeda, banyaknya struktur yang dihasilkan mengikuti barisan bilangan yang sama sehingga menunjukkan adanya hubungan kombinatorial di antara objek-objek tersebut.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa *frieze pattern* juga merupakan salah satu objek Catalan melalui konstruksi korespondensi satu-satu (bijeksi) dengan struktur kombinatorial lainnya. Secara khusus, terdapat bijeksi antara *frieze pattern* berhingga dengan lebar $w = n - 3$ dan triangulasi poligon dengan n titik sudut. Selain itu, triangulasi poligon dengan n titik sudut berkorespondensi satu-satu dengan *planar binary rooted tree*, yang juga berkorespondensi satu-satu dengan lintasan Dyck (*Dyck path*). Oleh karena itu, *frieze pattern*, triangulasi poligon, dan *planar binary rooted tree* termasuk dalam keluarga objek Catalan (Zeng, 2023).

Frieze pattern pertama kali diperkenalkan oleh Conway dan Coxeter sebagai suatu susunan bilangan bulat dalam baris-baris sejajar yang bersifat periodik secara horizontal, dengan baris pertama dan terakhir terdiri dari nol, serta baris kedua dan kedua dari bawah terdiri dari satu. Salah satu sifat fundamental dari *frieze pattern* adalah bahwa setiap empat bilangan yang membentuk pola belah ketupat (*diamond*)

$$\begin{array}{cc} & b \\ a & d \\ & c \end{array}$$

memenuhi relasi

$$ad - bc = 1.$$

Sifat ini, yang dikenal sebagai *unimodular rule*, merupakan karakteristik utama dalam teori *frieze pattern* (Conway & Coxeter, 1973a, 1973b).

Karena pertama kali diperkenalkan oleh Conway dan Coxeter, *frieze pattern* klasik ini sering disebut sebagai *Conway-Coxeter frieze pattern*. Namun, *frieze pattern* tidak berhenti di hanya bentuk klasik. Sudah ada beberapa bentuk generalisasi dari *frieze pattern* yang memungkinkan kajian dalam konsep yang lebih luas. Di antaranya adalah *infinite frieze* yang merupakan perluasan dari *frieze pattern* klasik ke lebar tak hingga tapi masih mempertahankan sifat periodik pada barisnya (Baur dkk., 2016). Ada pula *frieze with coefficients* yang merupakan generalisasi yang memperbolehkan variasi nilai pada sisi batas, sehingga tidak lagi terbatas pada nilai satu seperti pada *frieze pattern* klasik (Cuntz dkk., 2020).

Frieze pattern menjembatani berbagai cabang ilmu matematika karena keterkaitannya dengan beragam pendekatan, seperti kombinatorika, geometri, dan teori representasi (Baur, 2021; Faber, 2025), serta perkembangannya dalam teori modern seperti aljabar klaster dan kategori klaster (Pressland, 2020; Germain dkk., 2023), bahkan disebut sebagai "perempatan" dalam aljabar (Morier-Genoud, 2015). Namun, secara umum konsep ini berakar pada pendekatan geometris, khususnya melalui hubungannya dengan triangulasi poligon (Broline dkk., 1974).

Terdapat operasi yang menarik dalam *frieze pattern*, yaitu operasi pemotongan. Melalui pembuktian induktif, telah ditunjukkan bahwa triangulasi poligon dapat disederhanakan dengan memotong segitiga pada bagian ujung, serta diperlihatkan bagaimana baris pertama dari *frieze pattern* yang bersesuaian mengalami perubahan akibat proses tersebut (Baur dkk., 2021). Lebih lanjut, kajian mengenai reduksi pada *frieze pattern* juga muncul dalam konteks yang lebih umum, yaitu dalam teori

kategori, khususnya pada struktur *Frobenius extriangulated categories*. Dalam struktur tersebut, fenomena pada *frieze pattern* dapat dipahami melalui kerangka teori representasi yang lebih abstrak (Faber dkk., 2023). Gagasan penelitian ini turut terinspirasi oleh penjelasan Prof. Eleonore Faber dalam video "*A Fascination with Fractured Friezes*" pada kanal Numberphile yang memperkenalkan operasi pemotongan pada triangulasi poligon dan pengaruhnya terhadap *frieze pattern* (Faber, 2024).

Berdasarkan paparan yang telah dijelaskan, diketahui bahwa terdapat keterkaitan yang erat antara triangulasi poligon, *planar binary rooted tree*, dan *frieze pattern*, melalui berbagai korespondensi yang telah dikaji sebelumnya. Selain itu, operasi pemotongan pada triangulasi poligon dan reduksi *frieze pattern* telah dipelajari. Namun demikian, hingga saat ini belum terdapat kajian yang secara formal membahas operasi pemotongan triangulasi poligon menjadi dua bagian berdasarkan diagonal tertentu, kemudian menghubungkannya dengan struktur *planar binary rooted tree*, serta korespondensinya terhadap *frieze pattern*. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk mengkaji operasi pemotongan pada triangulasi poligon dan menganalisis keterkaitannya dengan pemotongan pada *planar binary rooted tree* serta perubahan yang terjadi pada *frieze pattern*. Pendekatan geometris yang digunakan diharapkan dapat memberikan pemahaman yang lebih mendalam serta berpotensi untuk dikembangkan lebih lanjut dalam berbagai kajian matematika.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang telah dipaparkan sebelumnya, dapat dirumuskan permasalahan penelitian sebagai berikut:

1. Bagaimana proses pemotongan triangulasi poligon berdasarkan satu diagonal dan bagaimana pengaruhnya terhadap *Conway-Coxeter frieze pattern*?
2. Bagaimana representasi proses pemotongan tersebut dalam bentuk

pemotongan *planar binary rooted tree*?

3. Bagaimana korespondensi antara hasil pemotongan tersebut dengan *Conway-Coxeter frieze pattern* yang dihasilkan?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dirumuskan, penelitian ini membatasi ruang lingkup pembahasannya pada:

1. Poligon yang dikaji adalah poligon sederhana, konveks, dan berhingga.
2. Pohon yang dikaji adalah *planar binary rooted tree* yang dikonstruksi dari triangulasi poligon.
3. Pemotongan triangulasi poligon dibatasi pada satu diagonal pemotong dan menghasilkan dua subpoligon yang tetap tertriangulasi.
4. Pemotongan *planar binary rooted tree* dibatasi pada penghapusan satu sisi yang berkorepondensi dengan diagonal pemotong triangulasi poligon dan menghasilkan dua *sub-planar binary rooted tree*.
5. Kajian difokuskan pada pendekatan geometri dan kombinatorial diskrit.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dikemukakan, maka tujuan dari penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Mendeskripsikan proses pemotongan triangulasi poligon dan pengaruhnya terhadap *Conway-Coxeter frieze pattern* yang dihasilkan.

2. Menganalisis representasi pemotongan triangulasi poligon dalam bentuk pemotongan *planar binary rooted tree*.
3. Mengkaji korespondensi antara kedua proses pemotongan tersebut dan kesesuaian *Conway-Coxeter frieze pattern* yang dihasilkan.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dalam penelitian ini, sebagai berikut:

1. Menambah kajian mengenai hubungan antara triangulasi poligon, *planar binary rooted tree*, dan *Conway-Coxeter frieze pattern* melalui operasi pemotongan.
2. Menjadi referensi dalam pengembangan kajian kombinatorika dan geometri.
3. Membuka peluang untuk penelitian lanjutan yang mengaitkan struktur tersebut dengan teori matematika lainnya.