

**PEMODELAN DAN STRATEGI KONTROL OPTIMAL
PADA PENYEBARAN PENYAKIT PNEUMONIA DENGAN
PENDEKATAN *AGE-STRUCTURED* SVEIHR**

Skripsi

**Disusun untuk memenuhi salah satu syarat
memperoleh gelar Sarjana Matematika**



**Aulia Damayanti
1305621008**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA**

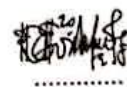
2026

LEMBAR PERSETUJUAN HASIL SIDANG SKRIPSI

Pemodelan dan Strategi Kontrol Optimal pada Penyebaran Penyakit Pneumonia dengan Pendekatan Age-Structured SVEIHR

Nama : Aulia Damayanti

No. Registrasi : 1305621008

	Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Penanggung Jawab Dekan	: Dr. Hadi Nasbey, S.Pd., M.Si. NIP. 197909162005011004		18/08/2026
Wakil Penanggung Jawab Wakil Dekan I	: Dr. Meiliasari, S.Pd., M.Sc. NIP. 197905042009122002		18/08/2026
Ketua	: Drs. Sudarwanto, M.Si., DEA NIP.196503251993031003		12/08/2026
Sekretaris	: Ibnu Hadi, M.Si. NIP.198107182008011017		13/08/2026
Penguji Ahli	: Dr. Lukita Ambarwati, S.Pd., M.Si. NIP. 197210262001122001		14/08/2026
Pembimbing I	: Dr. Eti Dwi Wiraningsih, S.Pd., M.Si. NIP. 198102032006042001		14/08/2026
Pembimbing II	: Devi Eka Wardani M, S.Pd., M.Si. NIP.199005162019032014		14/08/2026

Dinyatakan lulus ujian skripsi tanggal 29 Juli 2026

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswa Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta:

Nama : Aulia Damayanti
No Registrasi : 1305621008
Program Studi : Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi yang saya buat dengan judul **"Pemodelan dan Strategi Kontrol Optimal pada Penyebaran Penyakit Pneumonia dengan Pendekatan Age-Structured SVEIHR"** adalah:

1. Dibuat sendiri, mengadopsi hasil kuliah, buku-buku, dan referensi acuan yang tertera di dalam referensi pada skripsi saya.
2. Bukan merupakan hasil duplikasi skripsi yang telah dipublikasikan atau pernah dipakai untuk mendapatkan gelar sarjana di Universitas lain kecuali pada bagian-bagian sumber informasi dicantumkan berdasarkan tata cara referensi yang semestinya.

Pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan saya bersedia menanggung segala akibat yang timbul jika pernyataan saya tidak benar.

Jakarta, 17 Juli 2026



Aulia Damayanti

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah rabbil 'alamin. Puji syukur kehadiran Allah SWT atas rahmat dan nikmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi sebagai tugas akhir dan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, dengan judul *Pemodelan dan Strategi Kontrol Optimal pada Penyebaran Penyakit Pneumonia dengan Pendekatan Age-Structured SVEIHR*.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, dukungan, dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Dr. Yudi Mahatma, M.Si. selaku Koordinator Program Studi dan Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan dan kemudahan dalam berbagai proses administrasi selama masa perkuliahan.
2. Ibu Dr. Eti Dwi Wiraningsih, M.Si. dan Ibu Devi Eka Wardani M., S.Pd., M.Si. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan bimbingan, arahan, masukan, dan saran, serta meluangkan waktu untuk menjawab berbagai pertanyaan penulis selama proses penyusunan skripsi.
3. Bapak dan Ibu dosen serta seluruh staf akademik Program Studi Matematika yang telah memberikan ilmu dan bantuan selama penulis menjalani masa perkuliahan.
4. Mama, Ayah, serta keluarga besar penulis yang senantiasa memberikan doa, kasih sayang, dan dukungan kepada penulis. Terima kasih karena selalu sabar dan percaya bahwa penulis mampu menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Terima kasih pula atas segala pengorbanan yang

diberikan tanpa henti dalam mendukung penulis untuk memperoleh pendidikan setinggi-tingginya. Kepercayaan, doa, dan kasih sayang tersebut menjadi motivasi terbesar bagi penulis untuk menyelesaikan pendidikan dan memperoleh gelar sarjana.

5. Adhitya D. Chandra, adik penulis yang saat ini masih menjalani perkuliahan. Terima kasih karena selalu menjadi pengingat bagi penulis untuk segera menyelesaikan skripsi ini yang secara tidak langsung, menjadi salah satu motivasi bagi penulis untuk menjalani kehidupan sebaik-baiknya agar dapat selalu menjadi contoh yang baik baginya. Segala doa dan harapan baik penulis senantiasa mengiringi setiap langkahnya dalam menjalani perkuliahan dan menghadapi masa depan.
6. Haura, Savana, Ayu, dan Viona yang telah menjadi bagian penting dalam perjalanan penulis sejak masa sekolah menengah. Terima kasih telah senantiasa kebersamai, menjadi tempat berbagi cerita, serta memberikan semangat, dukungan, dan kepercayaan dalam berbagai fase kehidupan. Kehadiran kalian telah memberikan warna dan membuat perjalanan hingga tahap ini terasa lebih berarti. Semoga segala hal baik senantiasa menyertai setiap langkah kalian dan segala harapan yang sedang diperjuangkan dapat tercapai.
7. Charis H. Febrianto, pasangan penulis, yang telah kebersamai selama masa perkuliahan. Terima kasih atas dukungan, kepercayaan, bantuan, motivasi, dan semangat yang diberikan, terutama selama proses penyelesaian skripsi. Kehadirannya telah membuat perjalanan perkuliahan ini menjadi lebih berkesan dan mengajarkan penulis untuk tetap percaya pada diri sendiri dalam menghadapi setiap proses.
8. Seluruh teman-teman Program Studi Matematika 2021 yang telah kebersamai penulis selama masa perkuliahan. Terima kasih atas kebersamaan, bantuan, dan berbagai pengalaman yang telah dilalui bersama, khususnya kepada teman-teman bimbingan yang telah saling berba-

gi semangat, menguatkan, dan bertahan melewati perjalanan skripsi dengan penuh keceriaan.

9. Seluruh orang yang penulis jumpai selama masa perkuliahan, baik dalam kegiatan organisasi, magang, maupun pekerjaan. Terima kasih telah memberikan pengalaman, pelajaran, dan warna baru yang turut membentuk perjalanan penulis hingga sampai pada tahap ini.
10. Terakhir, namun yang paling penting, kepada diri penulis sendiri, Aulia Damayanti. Terima kasih atas segala perjuangan untuk menyelesaikan apa yang telah dimulai dan keberanian untuk membuktikan bahwa diri ini mampu melakukan lebih dari yang selama ini dipikirkan. Terima kasih karena selalu memilih untuk kuat dan bertahan melewati berbagai fase kehidupan yang tidak selalu mudah, serta terus mengusahakan yang terbaik bagi diri sendiri tanpa melupakan kebahagiaan keluarga. Teruslah melangkah dengan keyakinan bahwa diri ini selalu mampu menghadapi apa pun yang akan datang.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih memiliki kekurangan yang tidak terlepas dari keterbatasan pengetahuan dan pengalaman penulis. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun sebagai bahan evaluasi dan perbaikan di masa yang akan datang.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi lingkungan akademik, khususnya Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta, maupun pihak-pihak lain yang membutuhkan, serta menjadi pengalaman yang bermakna bagi penulis secara pribadi.

Jakarta, 17 Juli 2026

Aulia Damayanti



KEMENTERIAN PENDIDIKAN TINGGI, SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA
PERPUSTAKAAN DAN KEARSIPAN

Jalan Rawamangun Muka Jakarta 13220
Telepon/Faksimili: 021-4894221
Laman: lib.unj.ac.id

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademika Universitas Negeri Jakarta, yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : Aulia Damayanti
NIM : 1305621008
Fakultas/Prodi : FMIPA / Matematika
Alamat email : auliadmy17@gmail.com

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Perpustakaan dan Kearsipan Universitas Negeri Jakarta, Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif atas karya ilmiah:

☒ Skripsi ☐ Tesis ☐ Disertasi ☐ Lain-lain (.....)

yang berjudul :
Pemodelan dan Strategi Kontrol Optimal pada Penyebaran Penyakit
Pneumonia dengan Pendekatan Age-Structured SVEIHR

Dengan Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif ini Perpustakaan dan Kearsipan Universitas Negeri Jakarta berhak menyimpan, mengalihmediakan, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data (*database*), mendistribusikannya, dan menampilkan/mempublikasikannya di internet atau media lain secara *fulltext* untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta ijin dari saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan atau penerbit yang bersangkutan.

Saya bersedia untuk menanggung secara pribadi, tanpa melibatkan pihak Perpustakaan Universitas Negeri Jakarta, segala bentuk tuntutan hukum yang timbul atas pelanggaran Hak Cipta dalam karya ilmiah saya ini.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Jakarta 16 Agustus 2020

Penulis

(Aulia Damayanti)
nama dan tanda tangan

ABSTRAK

AULIA DAMAYANTI. Pemodelan dan Strategi Kontrol Optimal pada Penyebaran Penyakit Pneumonia dengan Pendekatan *Age-Structured* SVEIHR. Skripsi, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Jakarta. Juli 2026.

Pneumonia adalah kondisi peradangan akut pada jaringan paru yang masih menjadi penyebab utama kematian pada balita dan lanjut usia, dengan pola penularan yang berbeda antar kelompok umur akibat perbedaan daya tahan tubuh, transmisi, serta risiko rawat inap. Penelitian ini bertujuan mengembangkan model matematika penyebaran penyakit pneumonia dengan pendekatan *age-structured* SVEIHR (*Susceptible, Vaccinated, Exposed, Infected, Hospitalized, Recovered*) yang membagi populasi menjadi kelompok balita dan lansia, serta mempertimbangkan pengaruh strategi kontrol berupa vaksinasi dan terapi. Penelitian ini dilakukan dengan menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik, menghitung bilangan reproduksi dasar (R_0) menggunakan metode matriks generasi selanjutnya, menganalisis kestabilan kedua titik kesetimbangan, merumuskan strategi kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin, serta melakukan simulasi numerik dan analisis sensitivitas. Hasil penelitian menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$. Tanpa penerapan kontrol, diperoleh $R_0 = 2,165887 > 1$, yang menunjukkan bahwa penyakit bersifat endemik dan tetap bertahan dalam populasi. Sebagai skenario batas, ketika kontrol vaksinasi diterapkan secara maksimal dan konstan ($u_1 = 1$), R_0 menurun signifikan menjadi 0,038360, yang menunjukkan bahwa penyakit berpotensi menghilang dari populasi. Selain itu, analisis sensitivitas menunjukkan bahwa sebelum kontrol diterapkan, laju individu terinfeksi yang dirawat di rumah sakit merupakan parameter yang paling berpengaruh dalam menekan penyebaran penyakit, sedangkan setelah kontrol diterapkan, intensitas vaksinasi dan laju kehilangan kekebalan vaksin menjadi parameter yang paling dominan. Simulasi kontrol optimal menggunakan metode *forward-backward sweep* berdasarkan Prinsip Minimum Pontryagin menunjukkan bahwa kontrol vaksinasi bekerja dengan menekan laju penularan sejak kompartemen rentan, sehingga populasi terinfeksi pada kedua kelompok umur tidak pernah mengalami gelombang epidemi, sedangkan kontrol terapi bekerja pada tingkat hospitalisasi dengan mempercepat pemulihan tanpa memengaruhi laju penularan baru. Penerapan kombinasi kedua kontrol menghasilkan penekanan penyebaran penyakit yang paling optimal pada kedua kelompok umur, dengan beban penyakit yang secara konsisten lebih tinggi pada kelompok lansia dibandingkan balita.

Kata kunci. Model Matematika, Analisis Kestabilan, Bilangan Reproduksi Dasar, Analisis Sensitivitas, Pneumonia, Kontrol Optimal

ABSTRACT

AULIA DAMAYANTI. *Mathematical Modeling and Optimal Control Strategy for Pneumonia Transmission Using an Age-Structured SVEIHR Approach. Mini Thesis, Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Universitas Negeri Jakarta. July 2026.*

Pneumonia is an acute inflammatory condition of the lung tissue that remains one of the leading causes of death among toddlers and the elderly, with transmission patterns differing between age groups due to differences in immunity, transmission rate, and risk of hospitalization. This study aims to develop a mathematical model of pneumonia transmission using an age-structured SVEIHR (Susceptible, Vaccinated, Exposed, Infected, Hospitalized, Recovered) approach that divides the population into toddler and elderly groups, while also considering the effect of control strategies in the form of vaccination and therapy. This research was carried out by determining the disease-free and endemic equilibrium points, computing the basic reproduction number (R_0) using the Next Generation Matrix method, analyzing the stability of both equilibrium points, formulating an optimal control strategy using Pontryagin's Minimum Principle, and performing numerical simulation and sensitivity analysis. The results show that the disease-free equilibrium point is locally asymptotically stable when $R_0 < 1$. Without any control intervention, $R_0 = 2,165887 > 1$ was obtained, indicating that the disease is endemic and persists within the population. As a boundary scenario, when vaccination control is applied at its maximum and held constant ($u_1 = 1$), R_0 decreases significantly to 0,038360, indicating that the disease has the potential to be eliminated from the population. Furthermore, sensitivity analysis shows that prior to control implementation, the hospitalization rate of infected individuals is the most influential parameter in suppressing disease spread, whereas after control implementation, vaccination intensity and the vaccine waning rate become the most dominant parameters. Optimal control simulation using the forward-backward sweep method based on Pontryagin's Minimum Principle shows that vaccination control works by suppressing the transmission rate from the susceptible compartment, so that the infected population in both age groups never experiences a subsequent epidemic wave, while therapy control operates at the hospitalization level by accelerating recovery without affecting the rate of new transmission. The combined application of both controls yields the most optimal suppression of disease spread in both age groups, with the disease burden consistently higher in the elderly group compared to the toddler group.

Keyword. *Mathematical Model, Stability Analysis, Basic Reproduction Number, Sensitivity Analysis, Pneumonia, Optimal Control*

DAFTAR ISI

LEMBAR PERSETUJUAN	i
LEMBAR PERNYATAAN	ii
KATA PENGANTAR	iii
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	7
1.3 Batasan Masalah	7
1.4 Tujuan Penelitian	8
1.5 Manfaat Penelitian	9
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA	10
2.1 Pemodelan Matematika	10
2.1.1 Model Matematika Epidemiologi	12
2.2 Sistem Persamaan Diferensial	14

2.2.1	Sistem Persamaan Diferensial Linear	15
2.2.2	Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear	16
2.3	Nilai Eigen dan Vektor Eigen	17
2.4	Titik Keseimbangan	20
2.5	Kestabilan Titik Keseimbangan	21
2.6	Linearisasi	28
2.7	Matriks Generasi Selanjutnya	33
2.8	Bilangan Reproduksi Dasar	37
2.9	Analisis Sensitivitas	39
2.10	Kriteria Routh-Hurwitz	41
2.10.1	Kriteria Routh	41
2.10.2	Kriteria Hurwitz	43
2.11	Teori Kontrol Optimal	45
2.12	Prinsip Minimum Pontryagin	48
2.13	Pneumonia	49
BAB 3	METODOLOGI PENELITIAN	54
3.1	Waktu dan Jenis Penelitian	54
3.2	Pengambilan Data	54
3.3	Tahapan Alur Penelitian	55
BAB 4	HASIL ANALISIS DAN PEMBAHASAN	58
4.1	Formulasi Model SVEIHR Penyebaran Penyakit Pneu- monia	58
4.2	Analisis Titik Keseimbangan	73
4.2.1	Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	73
4.2.2	Titik Keseimbangan Endemik	74
4.3	Uji Asumsi Model Infeksi Penyakit Pneumonia	77
4.4	Analisis Kestabilan dan Bilangan Reproduksi Dasar	83
4.5	Strategi Kontrol Optimal pada Penyebaran Penyakit Pneu- monia	89
4.6	Simulasi Numerik	96

4.7 Analisis Sensitivitas	120
BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN	129
5.1 Kesimpulan	129
5.2 Saran	133
DAFTAR PUSTAKA	134
LAMPIRAN	139
DAFTAR RIWAYAT HIDUP	149



DAFTAR TABEL

2.1	Klasifikasi Titik Kritis Berdasarkan Nilai Eigen	26
2.2	Tabel Routh	42
4.1	Definisi Variabel dalam Model <i>Age-Structured</i> SVEIHR Penyebaran Penyakit Pneumonia	60
4.2	Definisi dan Nilai Parameter dalam Model <i>Age-Structured</i> SVEIHR Penyebaran Penyakit Pneumonia	61
4.3	Parameter Model Penyakit Pneumonia	107
4.4	Indeks Sensitivitas R_0 Jika Tidak Diterapkan Kontrol Vaksinasi ($u_1 = 0$)	123
4.5	Indeks Sensitivitas R_0 Sesudah Penerapan Kontrol ($u_1 = 1$) .	124
4.6	Dampak Perubahan Parameter ($\pm 10\%$) Terhadap R_0 Tanpa Menerapkan Kontrol Vaksinasi	127
4.7	Dampak Perubahan Parameter ($\pm 10\%$) Terhadap R_0 Ketika Kontrol Vaksinasi Optimal, $u_1 = 1$	128

DAFTAR GAMBAR

2.1	Proses Pemodelan Matematika	10
2.2	Contoh Diagram Alir SEIR	12
2.3	Ilustrasi Jenis Kestabilan Titik Keseimbangan	22
2.4	Visualisasi Sifat Kestabilan Titik Keseimbangan Berdasarkan Nilai Eigen	27
3.1	Diagram Alir Penelitian	57
4.1	Diagram Alir Model Matematika <i>Age-Structured</i> SVEIHR	69
4.2	Plot Profil Kontrol Optimal	110
4.3	Perbandingan 4 Skenario pada Kompartemen S_1	111
4.4	Perbandingan 4 Skenario pada Kompartemen S_2	112
4.5	Perbandingan 4 Skenario pada Kompartemen V_1	113
4.6	Perbandingan 4 Skenario pada Kompartemen V_2	113
4.7	Perbandingan 4 Skenario pada Kompartemen E_1	114
4.8	Perbandingan 4 Skenario pada Kompartemen E_2	115
4.9	Perbandingan 4 Skenario pada Kompartemen I_1	115
4.10	Perbandingan 4 Skenario pada Kompartemen I_2	116
4.11	Perbandingan 4 Skenario pada Kompartemen H_1	117
4.12	Perbandingan 4 Skenario pada Kompartemen H_2	118
4.13	Perbandingan 4 Skenario pada Kompartemen R_1	118
4.14	Perbandingan 4 Skenario pada Kompartemen R_2	119
4.15	Diagram Tornado Sensitivitas Parameter terhadap R_0 Tanpa Diterapkan Kontrol Vaksinasi	125
4.16	Diagram Tornado Sensitivitas Parameter terhadap R_0 Ketika Kontrol Vaksinasi konstan, $u_1 = 1$	126

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Penelitian	139
Lampiran 2. Sintaks Maple Titik Keseimbangan Bebas Penyakit . . .	139
Lampiran 3. Sintaks Maple Titik Keseimbangan Endemik	140
Lampiran 4. Sintaks Maple Perhitungan Asumsi (5)	141
Lampiran 5. Sintaks Maple Perhitungan NGM dan R_0	141
Lampiran 6. Sintaks MATLAB Simulasi Numerik Dengan 4 Skenario .	142
Lampiran 7. Sintaks Maple Analisis Indeks Sensitivitas	146
Lampiran 8. Sintaks MATLAB Diagram Tornado Analisis Indeks Sen- sitivitas	148

